

**Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng  
đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng**

**Chương 4**

**CÁC MỐI QUAN HỆ ỨNG SUẤT–BIẾN DẠNG  
ĐỐI VỚI VẬT LIỆU CHẢY DẺO LÝ TƯỞNG**

**4.1. Giới thiệu**

**4.2. Thế năng chảy dẻo và định luật chảy**

**4.3. Định luật chảy kết hợp với hàm chảy *von Mises***

**4.4. Định luật chảy kết hợp với hàm chảy *Tresca***

**4.5. Định luật chảy kết hợp với hàm chảy *Mohr–Coulomb***

**4.6. Tính trực giao, tính lồi và tính đơn nhất đối với vật rắn  
dàn–dẻo lý tưởng**

**4.7. Bài toán dàn–dẻo đơn giản: sự giản nở của hình trụ  
thành dày**

**4.8. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng gia số**

**4.9. Mô hình vật liệu *Prandtl–Reuss* (lý thuyết  $J_2$ )**

**4.10. Mô hình vật liệu *Drucker–Prager***

**4.11. Vật liệu đẳng hướng tổng quát**

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

### 4.1. Giới thiệu

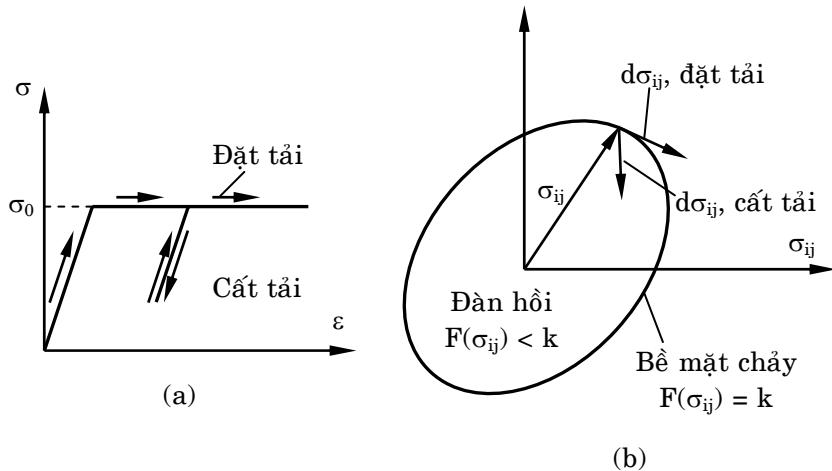
Đối với nhiều ứng dụng thực tế, một vật liệu có thể được lý tưởng hóa và được giả định có hiệu ứng biến cứng có thể bỏ qua, nghĩa là, biểu đồ ứng suất–biến dạng đơn trực của nó vượt qua điểm chảy có thể được xấp xỉ bởi đường thẳng nằm ngang, với mức ứng suất hằng  $\sigma_0$  (hình 4.1a). Do đó, biến dạng dẻo được giả định là xảy ra dưới ứng suất chảy hằng. Ứng xử này được gọi là ứng xử *chảy dẻo một cách hoàn hảo* hay ứng xử chảy dẻo lý tưởng.

Sự lý tưởng hóa chảy dẻo một cách hoàn hảo có thể dẫn đến sự đơn giản hóa mạnh mẽ trong việc phân tích bài toán kết cấu phức tạp. Cụ thể, đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng, những định lý giới hạn trên và dưới đầy hiệu lực của phép phân tích giới hạn có thể được thiết lập, từ đó các phương pháp đơn giản, trực tiếp, và hiện thực đối với việc ước lượng khả năng mang tải của các cấu trúc theo phương cách trực tiếp có thể được khai triển. Các lý thuyết giới hạn này và những ứng dụng của chúng cho các bài toán kỹ thuật kết cấu sẽ được bàn đến trong các tài liệu riêng. Chương này chỉ đề cập đến các quan hệ ứng suất–biến dạng của vật liệu chảy dẻo lý tưởng.

Quan hệ ứng suất–biến dạng trong trường hợp đơn trực như được biểu diễn trong hình 4.1a thì khá đơn giản. Tuy nhiên, ứng xử tổng quát của vật liệu dưới một trạng thái ứng suất phức tạp thì không dễ hiểu, bởi vì nó bao gồm sáu thành phần ứng suất và sáu thành phần biến dạng. Do đó, vấn đề nảy sinh ra là làm thế nào từ các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đơn giản được khảo sát từ thí nghiệm ứng suất đơn trực có thể được tổng quát hóa để dự đoán ứng xử của vật liệu dưới trạng thái ứng suất tổ hợp bất kỳ.

Chương này được chia thành ba phần. Phần đầu, từ mục 4.2 đến 4.6, được dành hết cho lý thuyết biến dạng dẻo kinh điển. Các khái niệm cơ bản của quy luật chảy và tính lồi, tính pháp tuyến, và tính đơn nhất đối với các vật liệu đàn–dẻo lý tưởng được bàn luận một cách chi tiết. Phần hai, mục 4.7, cung cấp một thí dụ đơn giản và giới thiệu một số đặc tính của ứng xử đàn–dẻo kết cấu. Phần cuối, từ mục 4.8 đến 4.11, đề cập đến các quan hệ cơ sở đối với các vật liệu đàn–dẻo lý tưởng. Các dạng riêng biệt của các quan hệ ứng suất–biến dạng gia số đối với các mô hình vật liệu khác nhau cũng được giới thiệu trong phần này.

## Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng



Hình 4.1. Một vật liệu đàn–dẻo lý tưởng. (a) Quan hệ ứng suất – biến dạng đơn trực; (b) sự biểu diễn hình học của bề mặt chảy và tiêu chuẩn đặt tải và cắt tải.

### 4.1.1. Giới hạn đàn hồi và hàm chảy

Sự tổng quát hóa của *giới hạn đàn hồi* đã được bàn luận trước đây trong chương hai, nơi mà giới hạn đàn hồi của vật liệu dưới tất cả các tổ hợp có thể của ứng suất đã được định nghĩa như là một hàm chảy theo ứng suất  $\sigma_{ij}$  dưới dạng

$$f(\sigma_{ij}) = F(\sigma_{ij}) - k = 0 \quad (4.1)$$

Ý nghĩa của hàm chảy này có thể được hiểu tốt nhất theo cách hình học như là một bề mặt trong không gian ứng suất. Đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng, hàm chảy được giả thiết giữ không đổi. Do đó, thông số  $k$  trong phương trình (4.1) là hằng số, và bề mặt chảy được giữ cố định trong không gian ứng suất (hình 4.1b).

### 4.1.2. Tiêu chuẩn đặt tải và cắt (dỡ) tải

Biến dạng dẻo xảy ra với điều kiện là điểm ứng suất ở trên bề mặt chảy. Để duy trì chảy dẻo, trạng thái ứng suất phải giữ nguyên trên bề mặt chảy. Điều kiện này được gọi là “đặt tải”. Trái lại, trạng thái ứng suất phải giảm dưới bề mặt chảy; trong trường hợp này, không có biến dạng dẻo xảy ra nữa và tất cả các biến dạng gia tăng là đàn hồi. Điều kiện này được gọi là “cắt (dỡ) tải”.

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

Khái niệm về đặt tải và cất tải đối với trạng thái ứng suất phức tạp được hiểu rõ nhất khi  $f$  được xem như là một bề mặt và  $\sigma_{ij}$  và  $d\sigma_{ij}$  như là *vector* ứng suất và *vector* giá số ứng suất trong không gian ứng suất (hình 4.1b). Thí dụ, khảo sát một phân tố vật liệu trong trạng thái chảy dẻo, được đặt trưng bởi *vector*  $\sigma_{ij}$ . Nếu ta thêm vào trạng thái ứng suất hiện hành  $\sigma_{ij}$  một giá số ứng suất vô cùng bé  $d\sigma_{ij}$  (đặt tải bổ sung). Ứng suất bổ sung này sẽ gây ra biến dạng dẻo nữa hay không? Đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng, điểm ứng suất không thể di chuyển ra bên ngoài bề mặt chảy. Chảy dẻo có thể xảy ra chỉ khi điểm ứng suất ở trên bề mặt chảy, và, do đó, việc đặt tải bổ sung  $d\sigma_{ij}$  phải di chuyển dọc theo phương tiếp tuyến của bề mặt chảy. Vì thế, điều kiện cho sự tiếp tục chảy dẻo, hay tiêu chuẩn đặt tải, là

$$f(\sigma_{ij}, k) = 0 \quad \text{và} \quad df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \quad (4.2)$$

và tiêu chuẩn cho sự cất tải là

$$f(\sigma_{ij}, k) = 0 \quad \text{và} \quad df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \quad (4.3)$$

Như vậy, hàm chảy  $f(\sigma_{ij})$  cũng phục vụ như là *tiêu chuẩn đặt tải* để biến dạng dẻo tiếp tục, hay như là *tiêu chuẩn cất tải* để biến dạng đàn hồi. Hàm hoặc bề mặt chảy  $f(\sigma_{ij})$  cũng được gọi là *hàm hoặc bề mặt đặt tải*.

### 4.1.3. Tensor gia số biến dạng đàn hồi và tensor gia số biến dạng dẻo

Do độ lớn của biến dạng dẻo  $\epsilon_{ij}^p$  không bị giới hạn trong quá trình chảy dẻo, do đó, ta phải suy nghĩ về mặt các suất biến dạng  $\dot{\epsilon}_{ij}$  hay các thay đổi biến dạng vô cùng bé, hoặc các giá số biến dạng,  $d\epsilon_{ij}$ . *Tensor* gia số biến dạng tổng được giả thiết là tổng của *tensor* gia số biến dạng đàn hồi và *tensor* gia số biến dạng dẻo:

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (4.4)$$

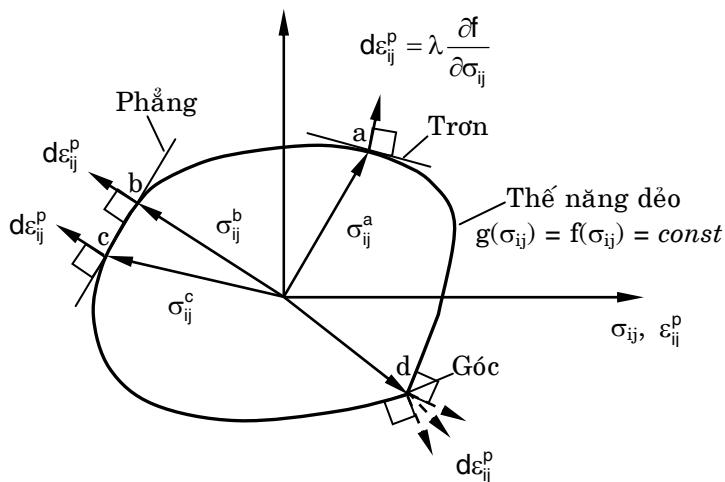
Vì định luật *Hooke* hay mô hình đàn hồi phi tuyến bất kỳ khác (xem chương 3) có thể được giả định để cung cấp mối quan hệ cần thiết các thay đổi ứng suất giá số và biến dạng đàn, quan hệ ứng suất–biến dạng

## Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng

đối với vật liệu chảy dẻo quy về một quan hệ bao gồm trạng thái hiện hành và các thay đổi gia số của ứng suất và biến dạng dẻo. Mối quan hệ mới này đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng sẽ thu được một cách chi tiết trong chương này.

### 4.2. Thé năng chảy dẻo và định luật chảy

Định luật chảy là sự giả định động học cần thiết được quy định cho biến dạng dẻo hay *chảy dẻo*. Nó đưa ra tỷ số hay các độ lớn tương đối của các thành phần của *tensor* gia số biến dạng dẻo  $d\varepsilon_{ij}^p$ . Do gia số  $d\varepsilon_{ij}^p$  có thể được biểu diễn theo cách hình học bởi một *vector* với chín thành phần trong không gian biến dạng, như được biểu diễn trong hình 4.2, do đó, định luật chảy cũng định nghĩa hướng của *vector* gia số biến dạng dẻo  $d\varepsilon_{ij}^p$  trong không gian biến dạng.



Hình 4.2. Sự minh họa hình học của định luật chảy kết hợp.

Chúng ta đã thấy trong chương 3 rằng biến dạng đàn hồi có thể thu được một cách trực tiếp bằng cách lấy vi phân *hàm thé năng đàn hồi* hay *hàm mật độ năng lượng bù đ đổi* với các ứng suất  $\sigma_{ij}$  [xem phương trình (3.118)]. Năm 1928, von Mises đã đề nghị khái niệm tương tự của *hàm thé năng dẻo*, nó là hàm vô hướng của các ứng suất,  $g(\sigma_{ij})$ . Thì khi các phương trình chảy dẻo có thể được viết dưới dạng

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.5)$$

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

ở đây  $\lambda$  là hệ số vô hướng dương của tính tỷ lệ, nó khác không chỉ khi chảy dẻo xảy ra. Phương trình  $g(\sigma_{ij}) = \text{constant}$  định nghĩa một bề mặt (*siêu bề mặt*) của thế năng dẻo trong không gian ứng suất chín chiều. Các *cosine* chỉ phương của *vector* pháp với bề mặt này ở điểm  $\sigma_{ij}$  trên bề mặt thì tỷ lệ với độ dốc  $\partial g / \partial \sigma_{ij}$ . Quan hệ (4.5) hàm ý rằng *vector* chảy dẻo  $d\epsilon_{ij}^p$ , nếu được vẽ như một *vector* tự do trong không gian ứng suất, được hướng theo pháp tuyến của bề mặt thế năng dẻo (hình 4.2).

Tầm quan trọng đặc biệt là trường hợp đơn giản nhất khi hàm chảy và hàm thế năng dẻo trùng nhau,  $f = g$ . Do đó,

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.6)$$

và chảy dẻo tiến triển theo phương pháp tuyến của bề mặt chảy  $\partial f / \partial \sigma_{ij}$  (xem hình 4.2). Phương trình (4.6) được gọi là *định luật chảy kết hợp* bởi vì chảy dẻo được kết nối hay liên kết với tiêu chuẩn chảy, trong khi quan hệ (4.5) với  $f \neq g$  được gọi là *định luật chảy không kết hợp*.

*von Mises* đã dùng định luật chảy kết hợp cho sự khai triển các quan hệ ứng suất- biến dạng đối với các kim loại. Như sau này sẽ được chỉ rõ rằng (1) định luật chảy kết hợp (4.6) phù hợp với các vật liệu chảy dẻo không thuận nghịch nơi mà công được tiêu tốn trong biến dạng dẻo không thể được phục hồi; (2) định luật ứng suất- biến dạng của vật liệu được dựa trên định luật chảy kết hợp sẽ đưa đến lời giải duy nhất cho bài toán trị biên; và (3) định luật chảy kết hợp làm cho nó có thể và thuận tiện để trình bày rõ ràng những sự tổng quát hóa khác nhau của các phương trình chảy dẻo bằng cách khảo sát các bề mặt chảy và đặt tải có dạng phức tạp hơn.

### 4.3. Định luật chảy kết hợp với hàm chảy von Mises

Bây giờ ta lấy hàm chảy *von Mises*

$$f(\sigma_{ij}) = J_2 - k^2 = 0 \quad (4.7)$$

như là thế năng dẻo. Thế thì định luật chảy có dạng đơn giản:

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda s_{ij} \quad (4.8)$$

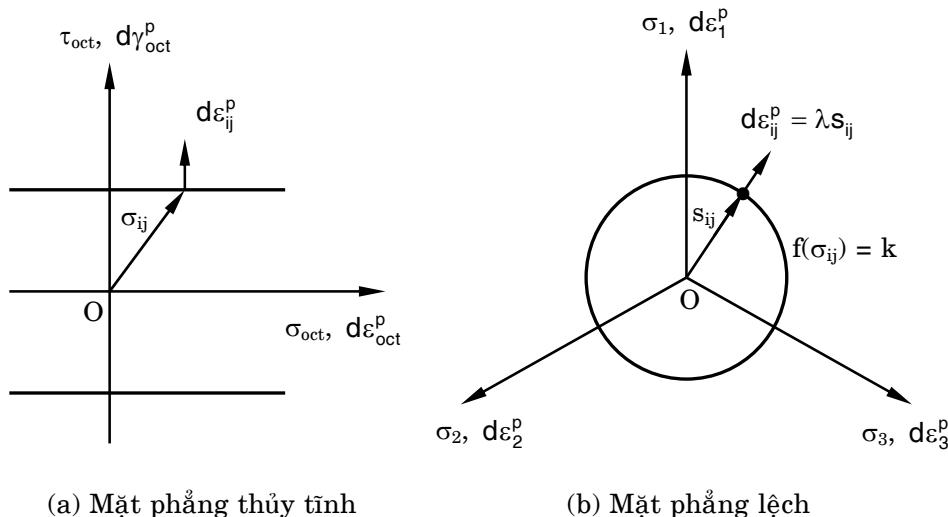
#### Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng

ở đây  $s_{ij}$  là tensor ứng suất lệch và  $d\lambda$  là hệ số của sự tỷ lệ với giá trị

$$d\lambda \begin{cases} = 0 & \text{ở nơi có } J_2 < k^2 \text{ hay } J_2 = k^2, \text{ nhưng } dJ_2 < 0 \\ > 0 & \text{ở nơi có } J_2 = k^2 \text{ và } dJ_2 = 0 \end{cases}$$

Phương trình (4.8) cũng có thể được biểu diễn theo những thành phần của các giá số biến dạng và các ứng suất như

$$\frac{d\varepsilon_x^p}{s_x} = \frac{d\varepsilon_y^p}{s_y} = \frac{d\varepsilon_z^p}{s_z} = \frac{d\gamma_{yz}^p}{2\tau_{yz}} = \frac{d\gamma_{zx}^p}{2\tau_{zx}} = \frac{d\gamma_{xy}^p}{2\tau_{xy}} = d\lambda \quad (4.9)$$



Hình 4.3. Định luật chảy được kết hợp với hàm chảy *von Mises*.

Các quan hệ (4.9) được biết như là các phương trình *Prandtl-Reuss*. Chính *Prandtl*, vào năm 1924, đã mở rộng các phương trình *Levy-von Mises* [xem phương trình (4.15)] và là người đầu tiên đã đề nghị quan hệ ứng suất–biến dạng trong trường hợp biến dạng phẳng đối với vật liệu đàn-dẻo lý tưởng. *Reuss*, vào năm 1930, đã mở rộng các phương trình của *Prandtl* cho trường hợp ba chiều và đưa ra dạng tổng quát của phương trình (4.9).

Mỗi quan hệ giữa giá số biến dạng dẻo  $d\varepsilon_{ij}^p$  và hàm chảy *von Mises*  $f = J_2$  như được cho bởi các phương trình (4.8) hay (4.9), hoặc định luật chảy

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

được kết hợp với điều kiện chảy *von Mises* có thể được biểu thị bằng đồ họa trong không gian ứng suất chính ba chiều. Tuy nhiên, hình ba chiều khó vẽ và thay cho việc này tốt nhất biểu thị hình bằng mặt cắt trên mặt phẳng thủy tĩnh và bằng mặt cắt trên mặt phẳng lệch của bề mặt ba chiều như trong hình 4.3. Pháp tuyến của bề mặt chảy như được nhìn dọc theo trục thủy tĩnh là một đường hướng kính (hình 4.3b) song song với mặt phẳng  $\pi$ . Do đó, hướng của nó song song với hướng của hình chiếu của vector ứng suất thích hợp  $\sigma_{ij}$  trên mặt phẳng  $\pi$ , dĩ nhiên, hình chiếu này là vector thành phần ứng suất lệch  $s_{ij}$  của vector ứng suất  $\sigma_{ij}$ .

Phương trình (4.8) hay (4.9) phát biểu rằng một giá số nhỏ của biến dạng dẻo  $d\varepsilon_{ij}^p$  chỉ phụ thuộc vào trạng thái hiện hành của ứng suất lệch  $s_{ij}$ , chứ không phụ thuộc vào giá số ứng suất  $d\sigma_{ij}$  được yêu cầu để duy trì chảy dẻo. Ngoài ra, các trục chính của ứng suất  $\sigma_{ij}$  hay  $s_{ij}$  và giá số biến dạng dẻo  $d\varepsilon_{ij}^p$  trùng nhau. Chú ý rằng các phương trình này chỉ trình bày về tỷ số hoặc các độ lớn tương đối của các thành phần trong tensor giá số biến dạng dẻo; chúng không cung cấp thông tin trực tiếp về độ lớn tuyệt đối của nó.

Theo phương trình (4.8), Không có biến thể tích dẻo; nghĩa là,

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda s_{ij} = 0 \quad (4.10)$$

Điều này cũng có thể được thấy trong hình 4.3a nơi mà vector giá số biến dạng dẻo  $d\varepsilon_{ij}^p$  vuông góc với trục thủy tĩnh, và do đó, thành phần biến dạng thủy tĩnh,  $d\varepsilon_{oct}^p$  bằng zero.

Gia số biến dạng tổng  $d\varepsilon_{ij}$  là tổng của các giá số biến dạng đàn hồi và dẻo (hình 4.4). Nếu định luật *Hooke* [các phương trình (3.84) hay (3.96)] được ứng dụng cho thành phần biến dạng đàn hồi  $d\varepsilon_{ij}^e$  và định luật chảy [phương trình (4.8)] cho thành phần biến dạng dẻo  $d\varepsilon_{ij}^p$ , ta có

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1+v}{E} d\sigma_{ij} - \frac{v}{E} d\sigma_{kk} \delta_{ij} + d\lambda s_{ij} = \frac{d\sigma_{kk}}{9K} \delta_{ij} + \frac{ds_{ij}}{2G} + d\lambda s_{ij} \quad (4.11)$$

Phương trình (4.11) cũng có thể được tách thành các biểu thức giá số biến dạng thể tích và lệch hay trượt dưới các dạng

#### Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng

$$d\varepsilon_{ii} = \frac{1}{3K} d\sigma_{kk}$$

$$de_{ij} = \frac{1}{2G} ds_{ij} + d\lambda s_{ij} \quad (4.12)$$

Trong các ứng dụng thực tế, ta khai triển phương trình (4.11) một cách rõ ràng theo các thành phần ứng suất và biến dạng, bằng ba phương trình đối với các giá số biến dạng pháp dưới dạng:

$$d\varepsilon_x = \frac{1}{E} [d\sigma_x - v(d\sigma_y + d\sigma_z)] + \frac{2}{3} d\lambda \left[ \sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_z) \right], \dots \quad (4.13)$$

và ba phương trình đối với các giá số biến dạng trượt dưới dạng:

$$d\gamma_{yz} = \frac{1}{G} d\tau_{yz} + 2d\lambda\tau_{yz}, \dots \quad (4.14)$$

Trong những bài toán chảy dẻo lớn, biến dạng đàn hồi có thể được bỏ qua. Trong trường hợp như thế, vật liệu có thể được lý tưởng hóa như vật liệu cứng–dẻo lý tưởng, và giá số biến dạng tổng  $d\varepsilon_{ij}$  bằng với giá số biến dạng dẻo  $d\varepsilon_{ij}^p$ . Các quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật liệu như thế có thể được viết như

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda s_{ij}$$

hay

$$\frac{d\varepsilon_x}{s_x} = \frac{d\varepsilon_y}{s_y} = \frac{d\varepsilon_z}{s_z} = \frac{d\gamma_{yz}}{2\tau_{yz}} = \frac{d\gamma_{zx}}{2\tau_{zx}} = \frac{d\gamma_{xy}}{2\tau_{xy}} = d\lambda \quad (4.15)$$

trong đó các chỉ số trên, p, của các phương trình (4.8) và (4.9) đã được bỏ đi. Các phương trình (4.15) được biết như là các phương trình *Levy-von Mises*. Trong sự tiến triển lịch sử của chúng, chính *St. Venant*, vào năm 1870, là người đầu tiên đã đề nghị rằng các trục chính của giá số biến dạng trùng với các trục chính ứng suất. Các quan hệ ứng suất–biến dạng tổng quát này đã thu được sau này bởi *Levy* vào năm 1871 và một cách độc lập bởi *von Mises* vào năm 1913.

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

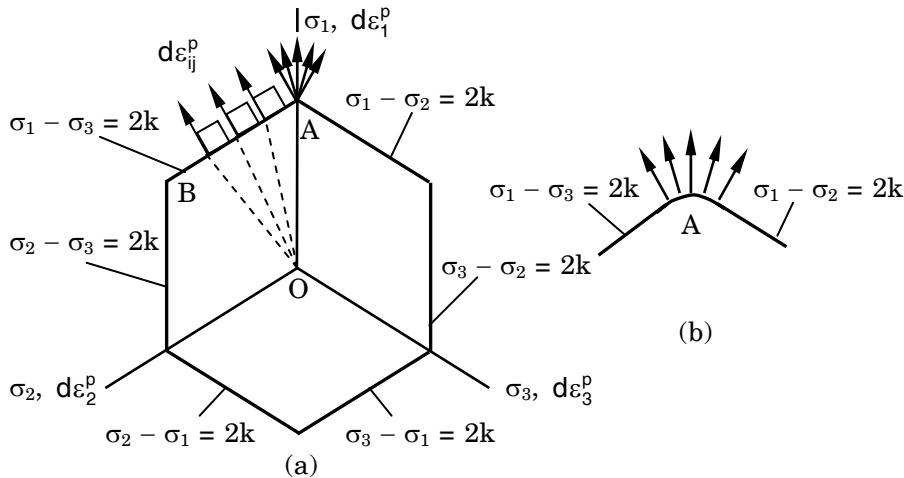
Khai triển quan hệ *Levy-von Mises* theo các thành phần ứng suất sẽ dẫn đến ba phương trình đối với các giá số biến dạng dẻo pháp dưới dạng

$$d\varepsilon_x = \frac{2}{3}d\lambda \left[ \sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right], \dots \quad (4.16)$$

và ba phương trình đối với các giá số biến dạng dẻo trượt dưới dạng

$$d\gamma_{yz} = 2\tau_{yz}d\lambda, \dots \quad (4.17)$$

### 4.4. Định luật chảy kết hợp với hàm chảy Tresca



Hình 4.4. Định luật chảy kết hợp với hàm chảy Tresca. (a) Tính pháp tuyến của vector giá số biến dạng dẻo; (b) đỉnh A như là giới hạn của bề mặt trơn.

Bây giờ lấy hàm chảy Tresca như là thể năng chảy dẻo, trong không gian ứng suất chính nó là hình lăng trụ lục giác thẳng gồm có sáu mặt phẳng. Mặt cắt lệch của hình lăng trụ được biểu diễn trong hình 4.4a. Giả sử rằng thứ tự độ lớn của các ứng suất chính là  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ; thế thì ta có thể viết hàm chảy tương ứng hay hàm thể năng chảy dưới dạng

$$f = F(\sigma_{ij}) - 2k = \sigma_1 - \sigma_3 - 2k = 0 \quad (4.18)$$

Theo định luật chảy kết hợp, các giá số biến dạng dẻo chính,  $d\varepsilon_1^p$ ,  $d\varepsilon_2^p$ ,  $d\varepsilon_3^p$ , thỏa các quan hệ sau:

#### Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng

$$d\varepsilon_1^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} = d\lambda$$

$$d\varepsilon_2^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} = 0$$

$$d\varepsilon_3^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} = -d\lambda$$

hay, trong dạng cô đọng hơn,

$$(d\varepsilon_1^p, d\varepsilon_2^p, d\varepsilon_3^p) = d\lambda (1, 0, -1), \quad d\lambda \geq 0 \quad (4.19)$$

Những kết quả tương tự có thể thu được đối với năm tổ hợp có thể của các thứ tự giá trị đại số của các ứng suất chính  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , và  $\sigma_3$ .

Do đó, các giá số biến dạng dẻo có thể được minh họa bằng hình học trong không gian giá số ứng suất chính/biến dạng chính tổ hợp như được biểu diễn trong hình 4.4a. Có thể thấy rằng bất kỳ điểm nào trên mặt phẳng AB, nơi có  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , các hướng của các giá số biến dạng dẻo thì song song với nhau và vuông góc với mặt phẳng AB của lục giác Tresca. Các mối quan hệ tương tự có thể được trình bày đối với những mặt phẳng khác của lục giác.

Trong trường hợp đặc biệt nơi mà, thí dụ,  $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ , tình huống sẽ rắc rối hơn, bởi vì ứng suất tiếp cực đại bằng với giá trị chảy k không chỉ trên những mặt phẳng trượt  $45^\circ$  song song trực chính thứ hai  $x_2$  mà còn trên những mặt phẳng trượt  $45^\circ$  song song trực chính thứ ba  $x_3$ . Do đó, ta có quyền giả định rằng sự trượt có thể xảy ra dọc một hay hai mặt phẳng trượt cực đại có thể:

(i)  $\sigma_{\max} = \sigma_1$ ,  $\sigma_{\min} = \sigma_3$

$$(d\varepsilon_1^p, d\varepsilon_2^p, d\varepsilon_3^p) = d\lambda (1, 0, -1), \quad \text{đối với } d\lambda \geq 0$$

(ii)  $\sigma_{\max} = \sigma_1$ ,  $\sigma_{\min} = \sigma_2$

$$(d\varepsilon_1^p, d\varepsilon_2^p, d\varepsilon_3^p) = d\mu (1, -1, 0), \quad \text{đối với } d\mu \geq 0$$

Trong trường hợp này, ta sẽ giả định rằng *vector* giá số biến dạng dẻo sinh ra là tổ hợp tuyến tính của hai giá số được cho ở trên, nghĩa là,

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

$$(d\epsilon_1^p, d\epsilon_2^p, d\epsilon_3^p) = d\lambda(1, 0, -1) + d\mu(1, -1, 0), \text{ đối với } d\lambda \geq 0, d\mu \geq 0 \quad (4.20)$$

Tình huống này tương đương với trường hợp đặc biệt nơi mà trạng thái ứng suất hiện hành  $\sigma_{ij}$  nằm trên đỉnh của lục giác. Như vậy, *vector* giá số biến dạng dẻo phải nằm giữa hai phương pháp tuyến với hai cạnh kề nhau của lục giác (hình 4.4a). Đỉnh này hoặc *điểm suy biến* ở bề mặt thế năng cũng có thể được xem như là một trường hợp giới hạn của bề mặt trơn ở điểm góc này (hình 4.4b).

Tổng quát, ở *điểm suy biến* nơi giao nhau của một vài bề mặt chảy trơn, các giá số biến dạng có thể được biểu diễn một cách tổng quát như là một tổ hợp tuyến tính của những giá số được cho bởi các pháp tuyến của các bề mặt tương ứng giao nhau ở điểm, nghĩa là,

$$d\epsilon_{ij}^p = \sum_{k=1}^n d\lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.21)$$

Như vậy, ở đỉnh, phương của *vector* giá số biến dạng không thể được xác định một cách duy nhất. Hơn nữa, nếu bề mặt chảy chứa một phần phẳng (hình 4.2 hay 4.4a), cũng không tồn tại mối quan hệ duy nhất giữa giá số ứng suất và biến dạng. Tổng quát, sự tương ứng giữa *vector* giá số biến dạng dẻo  $d\epsilon_{ij}^p$  và *vector* ứng suất  $\sigma_{ij}$  không luôn là mối quan hệ một-một. Tuy nhiên, ta có thể thấy trong thí dụ dưới đây công dẻo giá số  $dW_p$  đã được thực hiện hay suất tiêu tốn năng lượng luôn được xác định một cách duy nhất bởi độ lớn của suất biến dạng dẻo như được cho bởi

$$dW_p = \sigma_1 d\epsilon_1^p + \sigma_2 d\epsilon_2^p + \sigma_3 d\epsilon_3^p = 2k \max |d\epsilon^p| \quad (4.22)$$

ở đây  $\max |d\epsilon^p|$  ký hiệu giá trị tuyệt đối cực đại của thành phần chính của *vector* giá số biến dạng dẻo.

### 4.5. Định luật chảy kết hợp với hàm chảy Mohr-Coulomb

Trong những ứng dụng của phân tích giới hạn, một số vật liệu như bê tông hay đất được lý tưởng hóa như là những vật liệu đàn-dẻo lý tưởng tuân theo tiêu chuẩn chảy Mohr-Coulomb. Bề mặt chảy Mohr-Coulomb là hình chóp lục giác không đều. Các mặt cắt lệch của nó là những lục

#### Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng

giác không đều như được biểu diễn trong hình 4.5. Hàm chảy có dạng như sau [xem phương trình (2.174)]:

$$\sigma_1 \frac{1 + \sin \phi}{2c \cos \phi} - \sigma_3 \frac{1 - \sin \phi}{2c \cos \phi} = 1 \quad (4.26)$$

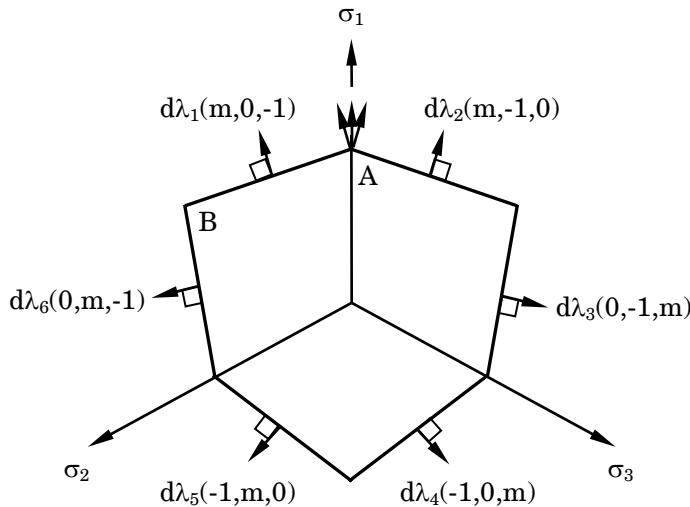
ở đây  $\phi$  là góc ma sát nội và  $c$  là lực cốt kết. Phương trình (4.26) cũng có thể được viết trong dạng nén như [xem phương trình (2.179)]

$$m\sigma_1 - \sigma_3 = f_c \quad \text{đối với } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (4.27)$$

ở đây  $f_c$  là độ bền nén đơn trực và  $m$  là hệ số độ bền giữa  $f_c$  và  $f_t$ ,  $f_t$  là độ bền kéo đơn trực (xem mục 2.3.3). Để thu được biểu thức cho gia số biến dạng dẻo  $(d\varepsilon_1^p, d\varepsilon_2^p, d\varepsilon_3^p)$ , ba trường hợp sau đây phải được khảo sát một cách tách biệt.

*Trường hợp 1.* Điểm ứng suất chảy nằm trên mặt phẳng bề mặt của hình chóp, thí dụ, trên mặt AB (hình 4.5), ở đây  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  và phương trình (4.27) có hiệu lực. Theo định luật chảy kết hợp, ta có các gia số biến dạng dẻo như sau:

$$d\varepsilon_1^p = m d\lambda, \quad d\varepsilon_1^p = 0, \quad d\varepsilon_3^p = -d\lambda \quad \text{đối với } d\lambda \geq 0 \quad (4.28)$$



Hình 4.5. Định luật chảy được kết hợp với bề mặt chảy Mohr–Coulomb.

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

hay, dưới dạng nén,

$$(d\varepsilon_1^p, d\varepsilon_2^p, d\varepsilon_3^p) = d\lambda(m, 0, -1), \quad \text{đối với } d\lambda \geq 0 \quad (4.29)$$

Những kết quả tương tự có thể thu được đối với năm thứ tự đại số khác có thể của các ứng suất chính  $\sigma_1, \sigma_2$ , và  $\sigma_3$ . Những kết quả này được tóm tắt và được biểu thị bằng đồ họa trong hình 4.5.

Chú ý rằng gia số biến dạng thể tích dẻo là

$$d\varepsilon_v^p = d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_3^p = d\lambda(m - 1) \quad (4.30)$$

Do  $m = f_c/f_t \geq 1$ , nó dẫn đến mô hình vật liệu Mohr-Coulomb với tiêu chuẩn chảy kết hợp luôn dự đoán sự giãn nở thể tích trừ trường hợp đặc biệt  $m = 1$ , nó rút về trường hợp của mô hình vật liệu Tresca.

Từ phương trình (4.30), ta có thể tách tổng của các gia số biến dạng dẻo chính thành hai phần: thành phần nén

$$\sum |d\varepsilon_c^p| = d\lambda \quad (4.31)$$

và thành phần kéo

$$\sum d\varepsilon_t^p = m d\lambda \quad (4.32)$$

Một sự tách rời như thế cũng có thể được thực hiện đối với năm mặt phẳng khác của hình chóp. Do đó ta có

$$\frac{\sum d\varepsilon_t^p}{\sum |d\varepsilon_c^p|} = m \quad (4.33)$$

và

$$d\varepsilon_v^p = \sum d\varepsilon_t^p - \sum |d\varepsilon_c^p| \quad (4.34)$$

Bây giờ, ta khảo sát thêm gia số công dẻo  $dW_p$ . Theo định nghĩa, ta có

$$dW_p = \sigma_1 d\varepsilon_1^p + \sigma_2 d\varepsilon_2^p + \sigma_3 d\varepsilon_3^p = (\sigma_1 m - \sigma_3) d\lambda \quad (4.35)$$

#### Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng

Bằng cách dùng các phương trình (4.27) và (4.31), phương trình (4.35) trở thành

$$dW_p = f'_c \sum |d\varepsilon_c^p| \quad (4.36)$$

hoặc

$$dW_p = \frac{f'_c}{m} \sum d\varepsilon_t^p \quad (4.37)$$

*Trường hợp 2.* Điểm ứng suất chảy nằm trên các mép của hình chóp, thí dụ, dọc theo mép A (hình 4.5), ở đây  $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$  và hai bề mặt

$$m\sigma_1 - \sigma_3 = f'_c$$

và

$$m\sigma_1 - \sigma_2 = f'_c$$

giao nhau. Trong trường hợp này, phương trình (4.21) có thể được áp dụng. Do đó, các giá số biến dạng dẻo tương ứng được biểu diễn như

$$\begin{aligned} (d\varepsilon_1^p, d\varepsilon_2^p, d\varepsilon_3^p) &= d\lambda_1(m, 0, -1) + d\lambda_2(m, -1, 0) \\ &= [(d\lambda_1 + d\lambda_2)m, -d\lambda_2, -d\lambda_1] \end{aligned} \quad (4.38)$$

Vector biến dạng này nằm giữa các phương pháp tuyến với hai bề mặt kề nhau. Các quan hệ tương tự có thể thu được đối với năm cạnh khác.

Sự thay đổi thể tích dẻo thu được từ phương trình (4.38) như

$$d\varepsilon_v^p = m(d\lambda_1 + d\lambda_2) - (d\lambda_1 + d\lambda_2)$$

nó là tổng của hai phần: phần nén

$$\sum |d\varepsilon_c^p| = d\lambda_1 + d\lambda_2$$

và phần kéo

$$\sum |d\varepsilon_t^p| = m(d\lambda_1 + d\lambda_2)$$

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

và chúng ta có thể thấy rằng

$$d\epsilon_v^p = \sum d\epsilon_t^p - \sum |d\epsilon_c^p| \quad (4.39)$$

Ta có thể thấy rằng  $d\epsilon_v^p > 0$  đối với  $m > 1$ , và rằng các phương trình (4.33) và (4.34) vẫn còn giá trị. Bằng phép vi phân tương tự như phương trình (4.35), ta có thể thu được biểu thức gia số công dẻo  $dW_p$  trong dạng như sau:

$$\begin{aligned} dW_p &= (\sigma_1 m - \sigma_3) d\lambda_1 + (\sigma_1 m - \sigma_2) d\lambda_2 \\ &= f'_c (d\lambda_1 + d\lambda_2) = f'_c \sum |d\epsilon_c^p| \end{aligned} \quad (4.40)$$

*Trường hợp 3.* Điểm ứng suất chảy trùng với đỉnh của hình chóp, nơi sáu bề mặt giao nhau. Theo thủ tục tương tự, một biểu thức tương tự với phương trình (4.38) đối với biến dạng dẻo  $d\epsilon_v^p$  có thể thu được. Chúng ta cũng có thể chỉ ra rằng các phương trình (4.34) và (4.36) vẫn còn giá trị.

### 4.6. Tính trực giao, tính lồi và tính đơn nhất đối với vật rắn dàn-dẻo lý tưởng

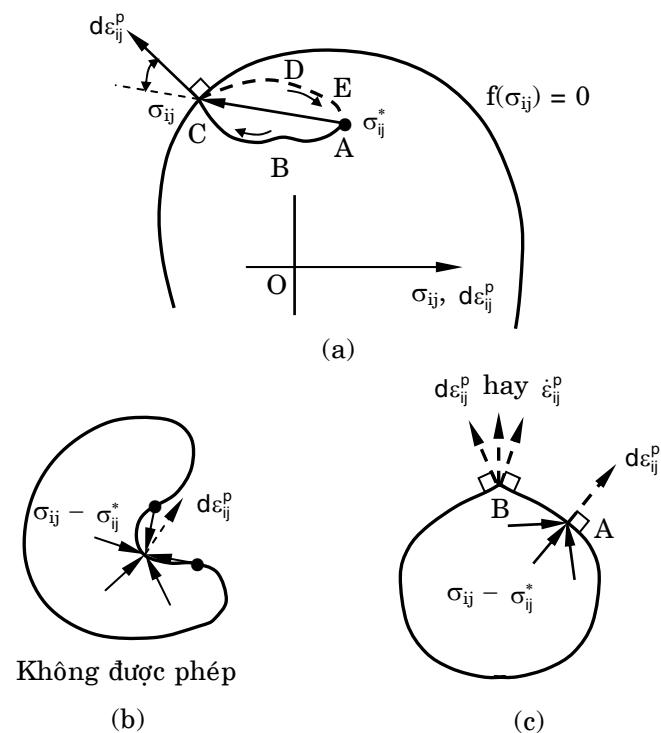
Định luật chảy kết hợp hay *định luật trực giao* đã được thảo luận trước đây đã được thiết lập một cách vững chắc trong lý thuyết toán của *biến dạng dẻo kim loại*. Sẽ được chứng tỏ trong phần sau đây rằng do điều kiện không hồi phục của biến dạng dẻo ngụ ý rằng công được tiêu tốn vào biến dạng dẻo trong một chu kỳ là dương, công dẻo dương dẫn đến tính lồi của bề mặt chảy và tính trực giao của chảy dẻo, và rằng điều kiện trực giao, hay định luật chảy kết hợp, đảm bảo tính duy nhất của lời giải của bài toán trị biên dàn-dẻo. Tính trực giao của chảy dẻo và tính lồi của bề mặt chảy là bản chất rất tổng quát đối với các vật liệu dàn-dẻo lý tưởng cũng như những vật liệu biến cứng.

#### 4.6.1. Tính lồi của bề mặt chảy và tính trực giao của chảy dẻo

Bởi vì đặc tính không hồi phục của biến dạng dẻo, công được tiêu tốn vào biến dạng dẻo không thể được phục hồi. Điều này nghĩa là công của các ứng suất trong sự thay đổi của biến dạng dẻo là dương mỗi khi sự thay đổi biến dạng dẻo xảy ra. Trong chương này, ta sẽ nghiên cứu các hạn chế nào mà *điều kiện không hồi phục* này đặt chồng lên mối quan hệ ứng suất–biến dạng dẻo.

#### Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng

Hãy khảo sát thể tích vật liệu đơn vị trong đó có một trạng thái ứng suất đồng nhất  $\sigma_{ij}^*$  ở trên hay ở trong bề mặt chảy (hình 4.6a). Giả sử một tác nhân bên ngoài làm tăng các ứng suất dọc theo lộ trình ABC nằm bên trong bề mặt cho đến khi  $\sigma_{ij}$  nambi trên bề mặt chảy được đạt đến. Cho đến bây giờ chỉ có công dàn hồi đã xảy ra. Bây giờ giả sử rằng tác nhân bên ngoài giữ cho trạng thái ứng suất  $\sigma_{ij}$  nambi trên bề mặt chảy trong thời gian ngắn. Chảy dẻo phải xảy ra, và chỉ có công chảy dẻo xảy ra suốt quá trình chảy dẻo. Tiếp theo tác nhân bên ngoài làm giảm  $\sigma_{ij}$  và trở lại trạng thái ứng suất  $\sigma_{ij}^*$  dọc theo đường dàn hồi DE. Do tất cả các thay đổi dàn hồi thuần túy là hồi phục hoàn toàn và độc lập với lộ trình từ  $\sigma_{ij}^*$  đến  $\sigma_{ij}$  và trở về  $\sigma_{ij}^*$ , tất cả năng lượng dàn được hồi phục. Công chảy dẻo được thực hiện bởi tác nhân bên ngoài trên chu kỳ đặt và cất tải là tích vô hướng của vector ứng suất  $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*$  và vector gia số biến dạng dẻo  $d\varepsilon_{ij}^p$ . Sự yêu cầu công này là dương đối với biến dạng dẻo dẫn đến



Hình 4.6. Tính lồi của bề mặt chảy và tính trực giao của chảy dẻo.

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)d\varepsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (4.41)$$

Ý nghĩa hình học của biểu thức (4.41) được cho dưới đây. Nếu các tọa độ biến dạng dẻo được đặt chồng lên các tọa độ ứng suất, như hình 4.6, tích vô hướng dương đòi hỏi một góc nhọn giữa vector ứng suất  $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*$  và vector gia số biến dạng dẻo  $d\varepsilon_{ij}^p$ . Do tất cả các vector ứng suất khả dĩ,  $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*$ , phải thỏa phương trình (4.41), điều này chắc chắn dẫn đến các hệ quả sau đây:

- (i) Tính lồi: Bề mặt chảy phải lồi. Nếu không lồi như được biểu thị trong hình 4.6b, các phương có thể của  $d\sigma_{ij}$  bao trùm hơn  $180^\circ$  đối với một vài mặt phẳng đi qua  $d\varepsilon_{ij}^p$ . Do đó, góc giữa  $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*$  và  $d\varepsilon_{ij}^p$  có thể lớn hơn  $90^\circ$ . Tuy nhiên, phương trình (4.41) yêu cầu góc giữa chúng nhỏ hơn  $90^\circ$ . Vì thế bề mặt phải lồi.
- (ii) Tính trực giao: Vector gia số biến dạng dẻo  $d\varepsilon_{ij}^p$  phải vuông góc với bề mặt chảy ở một điểm trơn và nằm giữa các pháp tuyến kề nhau ở một góc. Như được biểu thị trong hình 4.6c, nếu bề mặt lồi và phẳng ở điểm A,  $d\varepsilon_{ij}^p$  phải vuông góc với bề mặt để mà nó làm với tất cả các vector ứng suất khả dĩ  $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*$  một góc vuông hay nhỏ hơn, và điều kiện (4.41) được thỏa. Nếu bề mặt có một góc tại điểm B, có vài sự tự do về phương của  $d\varepsilon_{ij}^p$  nhưng vector này phải nằm giữa các pháp tuyến ở điểm kề với góc để cho phương trình (4.41) được thỏa.

Đặc trưng không hồi phục của biến dạng dẻo đòi hỏi gia số công dẻo dương

$$dW_p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \geq 0 \quad (4.42)$$

Vì tích vô hướng của vector bán kính  $\sigma_{ij}$  trên bề mặt chảy và pháp tuyến ngoài của bề mặt chảy  $\partial f / \partial \sigma_{ij}$  không âm (hình 4.2), chúng phải hợp thành một góc nhọn đối với bề mặt lồi. Nhân tử  $d\lambda$  trong phương trình (4.6) được xem là có liên hệ với độ lớn của gia số công dẻo  $dW_p$ , và hệ số  $d\lambda$  này phải luôn dương khi chảy dẻo xảy ra để đảm bảo bản chất không

#### Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng

hồi phục của biến dạng dẻo. Chú ý rằng hàm chảy là  $f = F - k$ ; do đó,  $\partial f / \partial \sigma_{ij} = \partial F / \partial \sigma_{ij}$ , và phương trình (4.42) có thể được rút gọn về

$$dW_p = d\lambda \sigma_{ij} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda nF \quad (4.43)$$

khi  $F$  là hàm đồng nhất bậc  $n$  theo các ứng suất, như đối với hầu hết các lý thuyết trong biến dạng dẻo kim loại.

##### **4.6.2. Tính đơn nhất của lời giải và điều kiện trực giao của chảy dẻo**

Tính đơn nhất của lời giải của bài toán trị biên đối với vật liệu đàn hồi đã được thảo luận trong mục 3.6.4. Trong mục này, chúng ta sẽ xem xét rằng yêu cầu tính đơn nhất cũng được thỏa đổi với vật liệu đàn–dẻo lý tưởng nếu điều kiện trực giao được đặt chồng lên quan hệ ứng suất–biến dạng.

Chúng ta hãy giả định rằng bài toán trị biên chứa hai lời giải:  $d\sigma_{ij}^{(a)}, d\varepsilon_{ij}^{(a)}$  và  $d\sigma_{ij}^{(b)}, d\varepsilon_{ij}^{(b)}$ , cả hai tương ứng với  $dT_i$  trên  $A_T$ ,  $du_i$  trên  $A_u$ , và  $dF_i$  trong  $V$ . Tiếp theo phương trình công ảo được áp dụng, giả sử  $u_i$  liên tục ở khắp nơi trong  $V$ ,

$$\int_{A_T} dT_i^* du_i dA + \int_{A_u} dT_i^* du_i dA + \int_V dF_i^* du_i dV = \int_V d\sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij} dV \quad (4.44)$$

ở đây các đại lượng được đánh dấu ngôi sao được quan hệ thông qua sự cân bằng và các đại lượng không đánh dấu ngôi sao là tương thích. Không cần có quan hệ giữa hai tập hợp gia số. Do đó, hiệu giữa hai trạng thái giả định a và b có thể được thay vào phương trình (4.44) mặc dù  $d\sigma_{ij}^{(b)} - d\sigma_{ij}^{(a)}$  không cần và thường không gây ra  $d\varepsilon_{ij}^{(b)} - d\varepsilon_{ij}^{(a)}$ . Sự thay thế đưa đến

$$\int_V (d\sigma_{ij}^{(b)} - d\sigma_{ij}^{(a)}) (d\varepsilon_{ij}^{(b)} - d\varepsilon_{ij}^{(a)}) dV = 0 \quad (4.45)$$

bởi vì  $dT_i^{(a)} = dT_i^{(b)}$  trên  $A_T$ ,  $du_i^{(a)} = du_i^{(b)}$  trên  $A_u$ , và  $dF_i^{(a)} = dF_i^{(b)}$  trong  $V$ .

Bằng cách dùng sự biểu diễn hình học của mục trước, ta diễn đạt hiệu của hai gia số ứng suất ở một điểm đã cho của vật thể trong phương

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

trình (4.45) bởi  $\Delta d\sigma_{ij} = d\sigma_{ij}^{(b)} - d\sigma_{ij}^{(a)}$ , hiệu của các giá số biến dạng dàn bởi  $\Delta d\varepsilon_{ij}^e$ , và hiệu của các giá số biến dạng dẻo bởi  $\Delta d\varepsilon_{ij}^p$ . Nay giờ hàm bị tích phân của tích vô hướng trong phương trình (4.45) phải triệt tiêu, nghĩa là,

$$dI = \Delta d\sigma_{ij} \Delta d\varepsilon_{ij} = \Delta d\sigma_{ij} (\Delta d\varepsilon_{ij}^e + \Delta d\varepsilon_{ij}^p) = 0 \quad (4.46)$$

Áp dụng quan hệ ứng suất–biến dạng vào phương trình (4.46),  $dI$  có thể được biểu diễn trong dạng bậc hai. Nếu ta có thể chứng tỏ rằng  $dI$  xác định dương, phương trình (4.46) sẽ dẫn đến  $\Delta d\varepsilon_{ij} = 0$  và  $\Delta d\sigma_{ij} = 0$ , tính đơn nhất được thỏa. Nói cách khác, bất cứ quan hệ ứng suất–biến dạng giá số nó đảm bảo rằng hàm bị tích phân  $dI$  xác định dương sẽ thỏa điều kiện đơn nhất.

Bây giờ  $\Delta d\varepsilon_{ij}^e$  được quan hệ với  $\Delta d\sigma_{ij}$  bởi định luật *Hooke* tổng quát, và tích vô hướng  $\Delta d\sigma_{ij} \Delta d\varepsilon_{ij}^e$  xác định dương. Đối với tích vô hướng  $\Delta d\sigma_{ij} \Delta d\varepsilon_{ij}^p$ , ba trường hợp phải được khảo sát một cách riêng rẽ:

**Trường hợp 1.** Cả hai lời giải cấu thành quá trình đặt tải ở điểm đang được xem xét. Trong trường hợp này,  $\Delta d\sigma_{ij}$  phải nằm trên mặt phẳng tiếp tuyến với bề mặt chảy dẻo lý tưởng (hình 4.1b). Để thấy rằng nếu vector giá số biến dạng dẻo  $d\varepsilon_{ij}^p$  vuông góc với bề mặt chảy, thì tích vô hướng  $\Delta d\sigma_{ij} \Delta d\varepsilon_{ij}^p$  sẽ không âm đối với tất cả các vector  $\Delta d\sigma_{ij}$  chúng tiếp tuyến với bề mặt này.

**Trường hợp 2.** Cả hai lời giải cấu thành quá trình cất tải. Trong trường hợp này,  $\Delta d\varepsilon_{ij}^p = 0$ , kết quả là  $dI$  xác định dương do  $\Delta d\sigma_{ij} \Delta d\varepsilon_{ij}^e$  xác định dương.

**Trường hợp 3.** Một lời giải cấu thành quá trình đặt tải, lời giải khác cấu thành quá trình cất tải. Nếu ta lấy  $d\sigma_{ij}^{(b)}$  như là đặt tải với  $d\varepsilon_{ij}^{p(b)}$  và  $d\sigma_{ij}^{(a)}$  như là cất tải với  $d\varepsilon_{ij}^{p(a)} = 0$ , tích vô hướng  $\Delta d\sigma_{ij} \Delta d\varepsilon_{ij}^p$  có dạng

$$(d\sigma_{ij}^{(b)} - d\sigma_{ij}^{(a)}) d\varepsilon_{ij}^{p(b)} = d\sigma_{ij}^{(b)} d\varepsilon_{ij}^{p(b)} - d\sigma_{ij}^{(a)} d\varepsilon_{ij}^{p(b)} \quad (4.47)$$

#### Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng

Do  $d\sigma_{ij}^{(b)}$  cấu thành quá trình đặt tải nên *vector* gia số ứng suất  $d\sigma_{ij}^{(b)}$  phải nằm trên mặt phẳng tiếp tuyến. Nếu *vector* gia số biến dạng dẻo  $d\varepsilon_{ij}^{p(b)}$  theo hướng pháp tuyến ngoài của bề mặt chảy (hình 4.2), tích vô hướng  $d\sigma_{ij}^{(b)} d\varepsilon_{ij}^{p(b)}$ , số hạng đầu tiên trên vế phải của phương trình (4.47), bằng không bởi vì  $d\sigma_{ij}^{(b)}$  trực giao với  $d\varepsilon_{ij}^{p(b)}$ . *Vector* gia số ứng suất khác  $d\sigma_{ij}^{(a)}$  phải hướng vào bên trong của bề mặt chảy bởi vì nó tạo thành quá trình cắt tải (hình 4.1b). Nếu *vector* gia số biến dạng dẻo  $d\varepsilon_{ij}^{p(b)}$  vuông góc với bề mặt chảy lồi  $f$ , *vector* gia số ứng suất  $d\sigma_{ij}^{(a)}$  sẽ luôn tạo thành góc tù với  $d\varepsilon_{ij}^{p(b)}$ . Do đó, số hạng thứ hai trên vế phải của phương trình (4.47) sẽ một đại lượng không âm. Trong trường hợp đang khảo sát, thứ tự mà hai lời giải được thực hiện không ảnh hưởng đến dấu của tích vô hướng  $\Delta d\sigma_{ij} \Delta d\varepsilon_{ij}^p$  bởi vì cả hai  $\Delta d\sigma_{ij}$  và  $\Delta d\varepsilon_{ij}^p$  thay đổi dấu khi thứ tự này bị đảo ngược. Do đó, ta có thể kết luận rằng định luật chảy kết hợp thỏa điều kiện đơn nhất.

Nên chú ý ở đây rằng mặc dù số hạng dẻo trong phương trình (4.46),  $\Delta d\sigma_{ij} \Delta d\varepsilon_{ij}^p$ , có thể bằng không, số hạng đàm hồi,  $\Delta d\sigma_{ij} \Delta d\varepsilon_{ij}^e$ , luôn xác định dương trừ khi  $\Delta d\sigma_{ij} = 0$ . Tính đơn nhất, trong ý nghĩa này, được thiết lập đối với trường hợp đàm–dẻo nhưng không được thiết lập đối với trường hợp cứng–dẻo nơi mà số hạng đàm bằng không ở mọi thời điểm.

Bây giờ chúng ta có thể phát biểu rằng quan hệ đơn giản  $g = f$  có một ý nghĩa đặc biệt trong lý thuyết toán học của chảy dẻo. Hai hệ quả trực tiếp của điều này bây giờ đã rõ ràng. (1) *Vector* gia số biến dạng dẻo  $d\varepsilon_{ij}^p$  phải vuông góc với bề mặt chảy hoặc bề mặt đặt tải  $f(\sigma_{ij}) = 0$ . Điều này bây giờ được biết như là điều kiện trực giao. (2) Loại các quan hệ ứng suất–biến dạng này dẫn đến tính đơn nhất của lời giải của bài toán trị biên. Như sẽ được thấy trong những tài liệu liên quan, quan hệ trực giao (4.6) cũng dẫn đến một cách khá trực tiếp sự thiết lập các định lý mạnh mẽ về phân tích giới hạn của chảy dẻo lý tưởng.

Loại điều kiện trực giao này là một bản chất rất tổng quát. Trong chương 5, tài liệu sẽ chứng tỏ rằng quan hệ này cũng thích hợp đối với những vật liệu có biến cứng. Điều kiện trực giao được áp đặt lên định luật ứng suất–biến dạng dẻo có những hàm ý mạnh mẽ đối với tính đơn nhất của lời giải cho những vật thể biến cứng và chảy dẻo lý tưởng. Nó

## Lý thuyết dàn-déo kỹ thuật

cũng dẫn đến các sự hình thành của các nguyên lý biến phân và cực tiểu tuyệt đối.

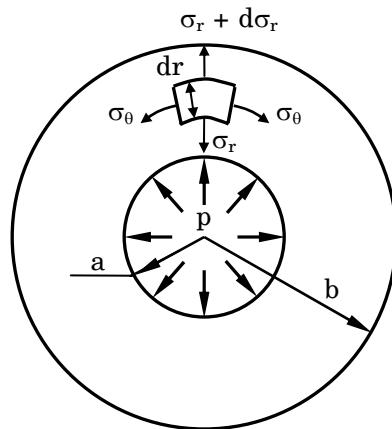
### 4.7. Bài toán dàn-déo đơn giản: sự giãn nở của hình trụ thành dày

Trong mục này, ta sẽ đề cập một cách khá tường tận ứng xử của một kết cấu đơn giản được làm bằng vật liệu dàn-déo. Sự thảo luận này sẽ giúp chúng ta hiểu một số đặc tính cơ bản và những khái niệm hữu ích của biến dạng dàn-déo của kết cấu. Thí dụ được lựa chọn để phân tích là một ống thành dày, với hai đầu được đóng kín, dưới tác động của áp suất bên trong. Ống có bán kính trong  $a$  và bán kính ngoài  $b$  (hình 4.7). Ta sẽ giả định rằng ống đủ dài để các ảnh hưởng của đầu mút không được cảm thấy là vùng cần được nghiên cứu.

Đối với bài toán này, tốt nhất làm việc trong tọa độ trụ ( $r, \theta, z$ );  $r$  là khoảng cách bán kính được đo vuông góc từ trục của ống,  $\theta$  là tọa độ chu vi góc được đo từ mốc (chuẩn) tùy ý, và  $z$  là khoảng cách trực được đo từ một mặt phẳng mốc tùy ý song song với trục.

#### 4.7.1. Các phương trình cơ bản

Chỉ có một phương trình cân bằng có giá trị là phương trình cân bằng theo hướng kính



Hình 4.7. Mặt cắt ngang của ống thành dày chịu áp suất trong.

#### Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} = 0 \quad (4.48)$$

Các phương trình tương thích biểu diễn các mối quan hệ hình học giữa biến dạng và chuyển vị. Chuyển vị vẫn được giả sử nhỏ, và nếu  $u$  là chuyển vị hướng kính của điểm có bán kính ban đầu là  $r$ ,

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (4.49)$$

và, bằng cách giả định biến dạng đối xứng,

$$\varepsilon_r = \frac{u}{r} \quad (4.50)$$

Theo phương đọc trực, lúc này ta chỉ có thể phát biểu điều kiện “ống dài” đối với sự giãn dài của ống không uốn:

$$\varepsilon_z = \text{constant} = C \quad (4.51)$$

Các quan hệ này đơn thuần là hình học, và do đó chúng có ảnh hưởng bất chấp biến dạng là dẻo hay đàn hồi.

Vật liệu của ống được giả sử là đàn-dẻo lý tưởng. Trong miền đàn hồi, ứng xử của vật liệu được mô tả theo hai hằng số đàn hồi, *Young's modulus E* và *hệ số Poisson v*. Bởi vì  $r$ ,  $\theta$ , và  $z$  là, do đối xứng, những hướng chính, ta có thể viết các quan hệ cơ bản đàn hồi:

$$\begin{aligned} E\varepsilon_r &= \sigma_r - v(\sigma_\theta + \sigma_z) \\ E\varepsilon_\theta &= \sigma_\theta - v(\sigma_r + \sigma_z) \\ E\varepsilon_z &= \sigma_z - v(\sigma_r + \sigma_\theta) \end{aligned} \quad (4.52)$$

Điều kiện chảy là của *Tresca*, và định luật chảy được kết hợp với nó bằng cách thức của điều kiện trực giao.

*Các điều kiện biên đặc biệt đơn giản:*

$$\sigma_r = 0 \quad \text{tại } r = b \quad (4.53)$$

$$\sigma_r = -p \quad \text{tại } r = a \quad (4.54)$$

## Lý thuyết dẻo kẽm

ở đây p là áp lực bên trong. Cuối cùng, theo phương dọc trực, sự cân bằng toàn thể yêu cầu

$$p\pi a^2 = \int_a^b 2\pi \sigma_z r dr \quad (4.55)$$

### 4.7.2. Lời giải dàn hồi

Phân tích dàn hồi cho bài toán này thì không phức tạp. Trước tiên sử dụng phương trình (4.51) để khử  $\sigma_z$  khỏi phương trình (4.52). Rồi tiếp tục khử  $u$  khỏi các phương trình (4.49) và (4.50) để đưa đến quan hệ *tương thích*

$$\varepsilon_r = \frac{d}{dr}(r\varepsilon_\theta) \quad (4.56)$$

Thay  $\varepsilon_r$  và  $\varepsilon_\theta$  theo  $\sigma_0$ ,  $\sigma_r$ , và C [phương trình (4.51)], bằng cách dùng các quan hệ vừa thu được. Điều này dẫn đến phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất theo  $\sigma_0$ ,  $\sigma_r$ , ( $d\sigma_r/dr$ ) và ( $d\sigma_0/dr$ ), nhưng thực tế không chứa C. Khử  $\sigma_0$  và  $d\sigma_0/dr$  bằng cách dùng phương trình này và phương trình (4.48) để dẫn đến phương trình vi phân bậc hai theo  $\sigma_r$ . Giải phương trình này với các điều kiện (4.53) và (4.54) để có

$$\sigma_r = p \left( -\frac{b^2}{r^2} + 1 \right) / \left( \frac{b^2}{a^2} - 1 \right) = \frac{pa^2(r^2 - b^2)}{r^2(b^2 - a^2)} \quad (4.57)$$

Thay thế vào phương trình (4.48) đưa đến

$$\sigma_\theta = p \left( \frac{b^2}{r^2} + 1 \right) / \left( \frac{b^2}{a^2} - 1 \right) = \frac{pa^2(r^2 + b^2)}{r^2(b^2 - a^2)} \quad (4.58)$$

Để xác định ứng suất  $\sigma_z$ , ta dùng các kết quả này thay vào phương trình thứ ba của các phương trình (4.52) và chú ý phương trình (4.51). Việc này sẽ tạo ra

$$\sigma_z = v(\sigma_r + \sigma_\theta) + EC = 2v \frac{pa^2}{(b^2 - a^2)} + EC \quad (4.59)$$

Thay thế  $\sigma_z$  vào phương trình (4.55) ta có

#### Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng

$$\varepsilon_z = C = p a^2 (1 - 2v) / [E(b^2 - a^2)]$$

Nếu ta giả sử biến dạng phẳng, nghĩa là,  $\varepsilon_z = 0$ , thế thì

$$v = 0,5 \quad \text{và} \quad \sigma_z = 0,5(\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (4.60)$$

Phương trình (4.60) ngụ ý rằng, đối với bài toán này, để thỏa cả hai điều kiện  $\varepsilon_z = 0$  và phương trình (4.55),  $v$  phải lấy giá trị đặc biệt là 0,5.

Chuyển vị hướng kính,  $u$ , thu được từ những phương trình (4.50) và quan hệ thứ hai của (4.52):

$$u = r \varepsilon_\theta = \frac{(1+v)a^2 p}{E(b^2 - a^2)} \left[ \frac{(1-2v)r}{(1+v)} + \frac{b^2}{r^2} \right] \quad (4.61)$$

Đĩ nhiên, sự phân bố ứng suất đàn hồi này chỉ áp dụng nếu  $p$  đủ nhỏ để điểm ứng suất ( $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_z$ ) ở tất cả các bán kính ở bên trong thành ống nằm trong quỹ đạo chảy.

Chú ý rằng, từ phương trình (4.60),  $\sigma_z$  luôn lấy giá trị là ứng suất chính thứ hai, nghĩa là,

$$\sigma_\theta > \sigma_z > \sigma_r$$

Do đó, điều kiện chảy của Tresca là

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_0 \quad (4.62)$$

ở đây  $\sigma_0$  là ứng suất chảy trong kéo đơn trực. Thay thế các phương trình (4.57) và (4.58) vào phương trình (4.62) dẫn đến

$$\sigma_0 - \sigma_r = 2p \left( \frac{b^2}{r^2} \right) / \left( \frac{b^2}{a^2} - 1 \right) = \sigma_0 \quad (4.63)$$

Từ phương trình (4.63), ta thấy nếu áp suất được gia tăng một cách đều đặn, ứng suất chảy trước tiên sẽ đạt đến ở bề mặt trong,  $r = a$ . Do đó, dùng phương trình (4.63) với  $r = a$ , ta tìm thấy rằng áp suất để điểm chảy đầu tiên xảy ra được cho bởi

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

$$p = p_c = \frac{\sigma_0}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \quad (4.64)$$

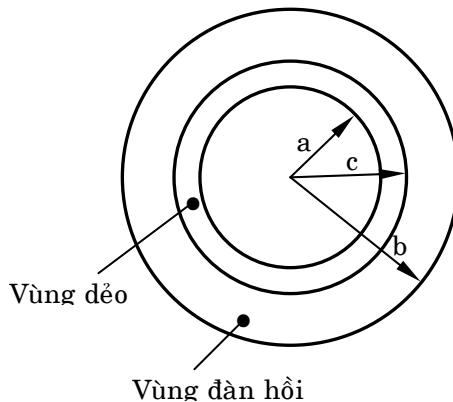
Chú ý rằng áp suất đối với chảy dẻo đầu tiên tại  $r = a$  là một hàm của tỷ số  $b/a$  và không hàm của kích thước tuyệt đối của ống.

### 4.7.3. Sự giãn nở đàn-dẻo

Nếu áp suất được gia tăng trên giá trị cho chảy dẻo đầu tiên, vùng chảy dẻo mở rộng sẽ trải ra phía ngoài từ bề mặt bên trong.

Để phân tích trạng thái một phần đàm, một phần dẻo này, giả sử rằng ở một số trạng thái trong sự giãn nở của ống, biên đàm-dẻo có bán kính  $c$ . với  $a \leq c \leq b$ , như được biểu diễn trong hình 4.8. Tại  $r = c$ , để  $\sigma_r = -q$ ; nghĩa là, xem áp suất hướng kính  $q$  tại bán kính này. Vùng đàm hồi phía ngoài không thể phân biệt giữa áp suất  $q$  được gây ra bởi vùng chảy dẻo hoặc  $q$  được cung cấp bởi chất lỏng. Do đó, ta có thể thấy rằng do mặt ngoài không chịu tải, các phương trình mà ta đã thu được áp dụng trong miền đàm hồi với ký hiệu  $a$  được thay thế bởi  $c$ . Cụ thể, vì ứng suất phải ở tại điểm chảy tại  $r = c$ , phương trình (4.64) cho

$$q = \frac{\sigma_0}{2} \left( 1 - \frac{c^2}{b^2} \right) \quad (4.65)$$



Hình 4.8. Vùng dẻo được chứa bên trong vùng đàm hồi.

#### Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng

Bây giờ bằng cách quay lại vùng dẻo, ta tìm thấy rằng chìa khóa cho trạng thái là *điều kiện chảy* (4.62). Thay thế (4.62) vào phương trình cân bằng (4.48), ta có thể tích phân trực tiếp để thu được

$$\sigma_r = \sigma_0 \ln r + constant \quad (4.66)$$

Hằng số được xác định từ điều kiện biên  $\sigma_r = -q$  tại  $r = c$ . Sau cùng, ta có

$$\sigma_r = -q + \sigma_0 \ln \frac{r}{c}$$

Thay thế (4.65) đổi với  $q$  và sử dụng điều kiện chảy (4.62) sẽ mang lại các ứng suất trong vùng dẻo như

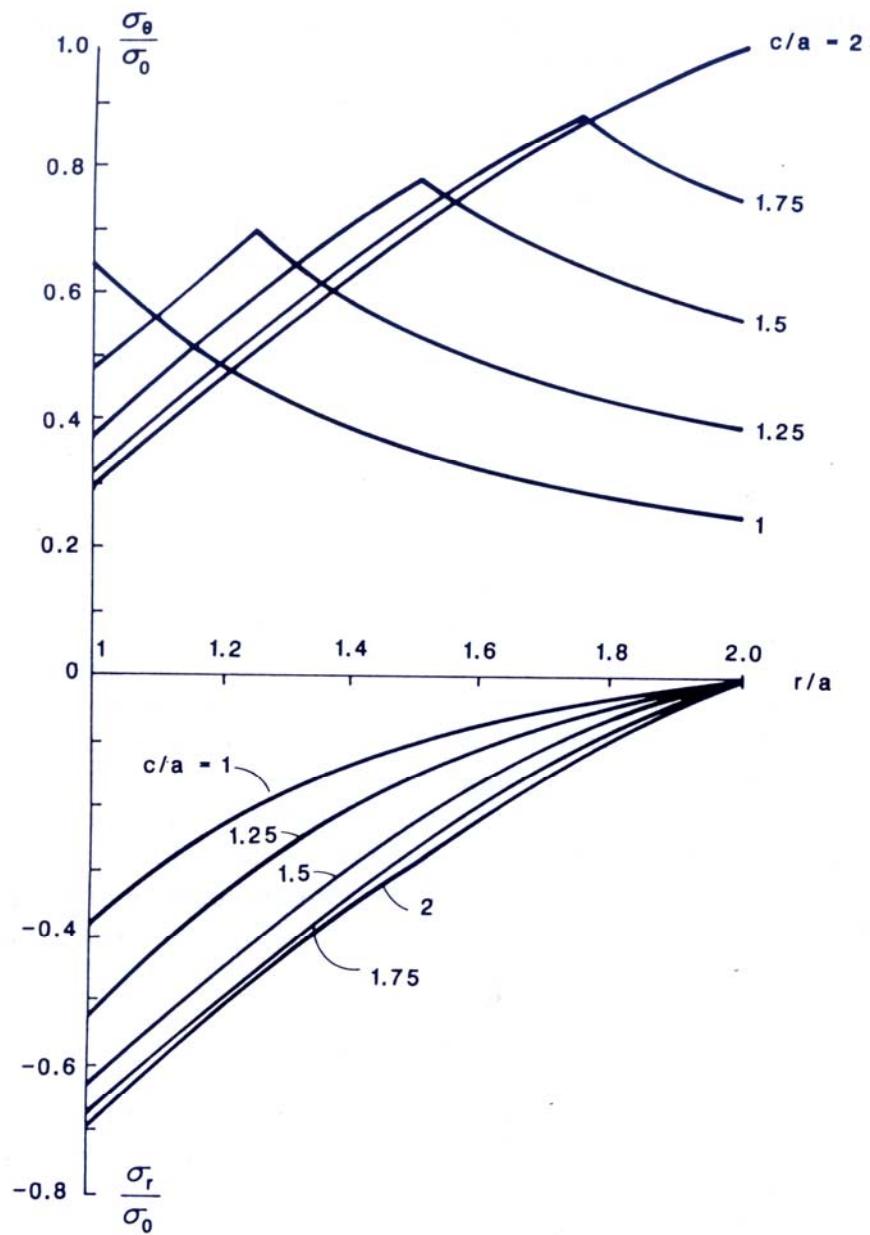
$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_0 \left[ \ln \frac{r}{c} - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{c^2}{b^2} \right) \right] \\ \sigma_\theta &= \sigma_0 \left[ \ln \frac{r}{c} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{c^2}{b^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.67)$$

Bây giờ ta có thể dùng điều kiện biên  $\sigma_r = -p$  tại  $r = a$  để thu được

$$p = q + \sigma_0 \ln \frac{c}{a} = \frac{\sigma_0}{2} \left( 1 - \frac{c^2}{b^2} \right) + \sigma_0 \ln \frac{c}{a} \quad (4.68)$$

Do đó, đối với giá trị bất kỳ của  $c$  giữa  $a$  và  $b$ , áp suất tương ứng có thể được tính toán và các ứng suất  $\sigma_\theta$  và  $\sigma_r$  trong ống cũng có thể được xác định với mọi giá trị của  $c$ . Hình 4.9 chỉ ra những kết quả cho ống với  $b/a = 2$  đối với các giá trị khác nhau của  $c/a$ . Chú ý rằng trong vùng dẻo các ứng suất xác định tinh, và, khi đã cho áp suất ở một biên thì áp suất ở một biên khác được xác định. Do đó, các phương trình trong vùng dẻo, ngoài tính đơn giản hơn những phương trình trong vùng đàn hồi, là loại khác. Thực tế phương trình cân bằng và điều kiện dẻo có thể được giải một cách trực tiếp mà không có sự tham khảo đến biến dạng–nghĩa là, trạng thái là xác định tinh–là kết quả của việc không bắt cặp ứng suất và biến dạng, nó sinh ra từ dạng không biến cứng đặc biệt của vật liệu chảy dẻo lý tưởng.

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật



Hình 4.9. Các phân bố liên tục của các ứng suất pháp theo phương chu vi và hướng kính trong bài toán giãn nở đòn-dẻo của ống:  $b/a = 2$ .

## Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng

### 4.7.4. Biến dạng đàn dẻo

Cần chú ý rằng sự giãn nở hướng kính của vùng dẻo được điều khiển bởi biến dạng đàn hồi của vùng đàn bao quanh hoàn toàn vùng dẻo. Vùng đàn hồi có thể được xem như chịu đựng một áp suất  $q$  giống như phần dẻo bên trong của ống được làm đầy chất lỏng. Điều này dẫn đến mô hình biến dạng bên trong ống trong điều kiện đàn-dẻo là mô hình rất đơn giản–không có sự giãn dài dọc trực, và do vật liệu không nén trong cả hai miền đàn hồi và chảy dẻo, biến dạng có thể được biểu diễn một cách dễ dàng theo một thông số đơn giản. Một ký hiệu tiện lợi của biến dạng là sự mở rộng hướng kính của ống,  $u_b$ , tại  $r = b$ .

$$\frac{u_b}{b} = \frac{3}{4} \frac{\sigma_0}{E} \left( \frac{c}{b} \right)^2 \quad (4.69)$$

Sử dụng kết quả này vào phương trình (4.68) và sắp xếp lại, ta tìm được

$$\frac{2p}{\sigma_0} = 1 - \frac{4}{3} \frac{E}{\sigma_0} \frac{u_b}{b} + \ln \left( \frac{4}{3} \frac{E}{\sigma_0} \frac{u_b}{b} \right) + 2 \ln \frac{b}{a} \quad (4.70)$$

Mối quan hệ giữa áp suất và sự mở rộng hướng kính này áp dụng với số liệu đã cho  $a \leq c \leq b$ , từ đó, dùng phương trình (4.69), ta thu được

$$\frac{a^2}{b^2} \leq \frac{4}{3} \frac{E}{\sigma_0} \frac{u_b}{b} \leq 1 \quad (4.71)$$

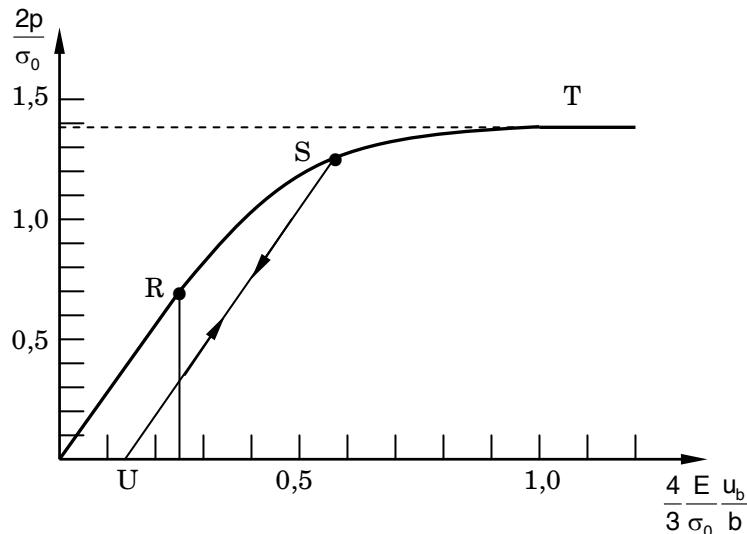
Khi ứng xử là đàn hồi hoàn toàn, phương trình tương ứng là

$$\frac{2p}{\sigma_0} = \left( \frac{b^2}{a^2} - 1 \right) \left( \frac{4}{3} \frac{E}{\sigma_0} \frac{u_b}{b} \right) \quad (4.72)$$

Khi biến đàn-dẻo đạt đến bề mặt ngoài,  $c = b$ , và phương trình (4.68) trở thành

$$\frac{2p_c}{\sigma_0} = 2 \ln \frac{b}{a} \quad (4.73)$$

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật



Hình 4.10. Đường cong giãn nở-áp suất dàn-dẻo biểu thị ứng xử cất tải.

Áp suất “chảy dẻo hoàn toàn”  $p_c = \sigma_0 \ln(b/a)$  được duy trì nếu ống giãn nở thêm. Theo giả thiết dàn-dẻo lý tưởng, có khả năng các biến dạng lớn vô hạn xảy ra mà không cần vòng tròn dàn hồi bao quanh.

Những kết quả này được vẽ đối với  $b/a = 2$  như đường cong ORST trong hình 4.10.

Sau cùng, có ba giai đoạn ứng xử đối với ống không ứng suất ban đầu với các đầu được bịt kín, được làm bằng vật liệu dàn-dẻo lý tưởng và chịu một áp suất bên trong gia tăng đều đặn:

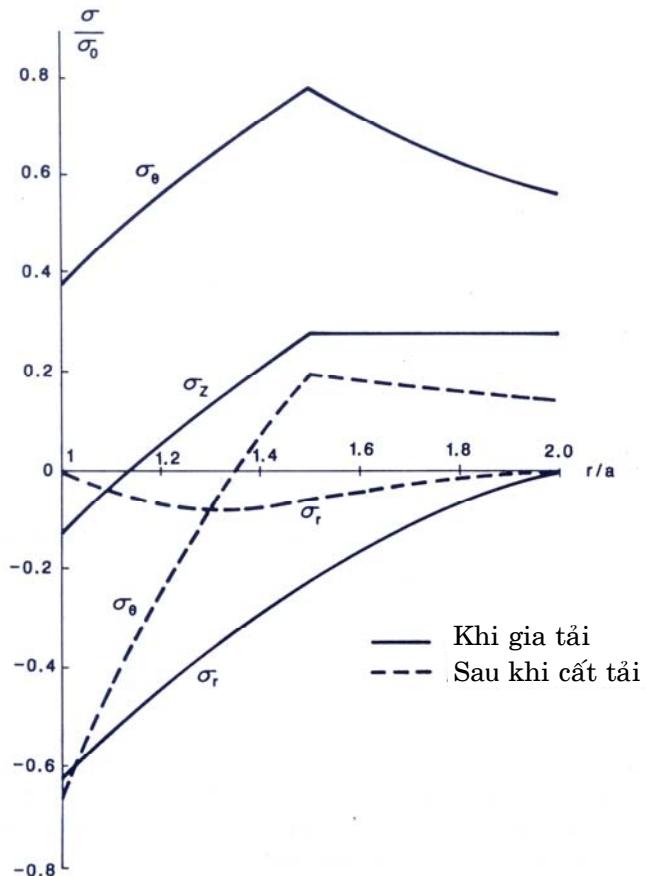
- Giai đoạn dàn hồi, trong đó tất cả vật liệu biến dạng trong miền dàn hồi.
- Giai đoạn dàn-dẻo trong đó vùng dẻo phía trong được chứa trong miền dàn hồi. Vùng dẻo mở rộng khi áp suất gia tăng, nhưng các sự thay đổi dạng-nó được điều khiển bởi vùng dàn hồi-có cùng kiểu như trong giai đoạn dàn hồi.
- Giai đoạn chảy dẻo hoàn toàn trong đó, vùng dàn hồi phía ngoài đã biến mất, ống không bị ràng buộc để giãn nở bằng biến dạng dẻo và đạt đến những thay đổi hình dáng lớn hơn miền dàn hồi nhiều. Ngoại trừ các ảnh hưởng bậc hai, sự giãn nở dẻo xảy ra ở áp suất

#### Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng

hàng được gọi là *áp suất suy sụp dẻo*. Ở áp suất này, ta dự đoán, ống sẽ phồng ra đáng kể, và có thể *vỡ* ra.

##### 4.7.5. Cắt tải

Bây giờ giả sử áp suất, đã được tăng lên đến miền đàn-dẻo, được giảm một cách đều đặn cho đến khi áp suất bằng lại zero. Điều gì xảy ra cho các ứng suất trong ống?



Hình 4.11. Sự phân bố của ứng suất pháp theo phương chu vi, hướng kính, và dọc trục ở một giai đoạn cụ thể trong giản nở đàn-dẻo của ống và sau khi bỏ áp suất.

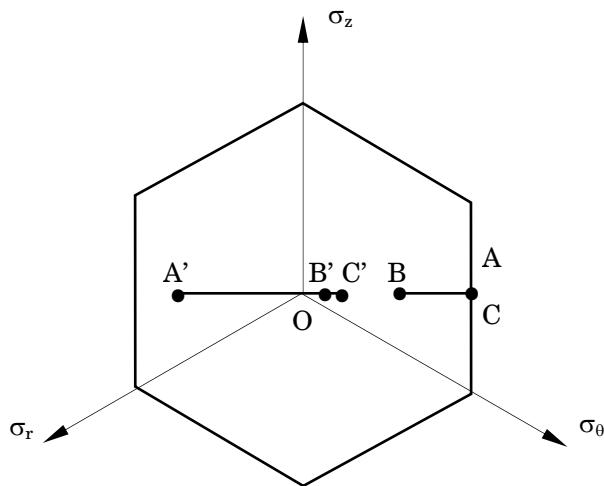
## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

Vì sự rõ ràng, ta khảo sát một trường hợp cụ thể,  $b = 2a$ , với áp suất (được tác động vào ống không có ứng suất ban đầu) đã tăng đến giá trị tương ứng với  $c = 1,5a$ , nghĩa là, theo phương trình (4.68),  $p = \sigma_0[7/32 + \ln(1,5)] = 0,624\sigma_0$ . Các phân bố của các ứng suất chính dưới những điều kiện này được biểu thị trong hình 4.11 (các đường cong đầy đủ). Khi áp suất bắt đầu giảm, đường như là vật liệu, nó đã ở ứng suất chảy, sẽ có “mức” ứng suất của nó bị giảm, và do đó sẽ lại trở vào miền đàn hồi ngay lập tức. Bởi vì bây giờ ta có biến dạng dẻo vĩnh cửu trong vùng chảy dẻo đã có trước đây, ta phải lưu ý các quan hệ đàn hồi (4.52) khi xem xét những thay đổi của ứng suất và biến dạng. Khi tất cả vật liệu đang ứng xử đàn hồi, ta có thể sử dụng những kết quả từ (4.57) đến (4.59) để tính toán *những thay đổi* về  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ , và  $\sigma_z$  đối với các giá số áp lực âm. Thí dụ, đối với sự cất bỏ áp suất hoàn toàn, ta phải trừ khỏi phân bố ứng suất đàn-dẻo trong hình 4.11 một phân bố ứng suất sẽ xảy ra ở cùng áp suất nếu vật liệu vẫn đàn hồi. Điều này được biểu thị trong hình 4.11 (những đường cong bị gãy). Dĩ nhiên, bây giờ ta phải kiểm tra rằng nơi nào vật liệu chịu tác động ứng suất mà không chảy dẻo. Điều này được tiến hành một cách dễ dàng trong trường hợp hiện tại vì  $-\sigma_z$  là ứng suất chính thứ hai-ta phải kiểm chứng rằng  $|\sigma_\theta - \sigma_r| < \sigma_0$  ở mọi nơi; trong hình 4.11 điều này thì rõ ràng.

Hình 4.12 biểu thị việc cung cấp dữ liệu về các đường cong ứng suất trong mặt phẳng  $\pi$ . Do  $\sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\theta)/2$  ở mọi nơi (điều này chưa đựng giả thiết rằng đây là trường hợp trong vùng dẻo của quá trình đặt tải đầu tiên), tất cả các điểm nằm trên đường thẳng đi qua gốc vuông góc với hình chiếu của trục  $\sigma_z$ . Các điểm A, B, và C tương ứng với các bán kính a, b, và c, khi  $p = 0,624\sigma_0$ , và A', B', và C' tương ứng với cùng các bán kính khi áp suất đã được cất bỏ. Rõ ràng là điều kiện chảy không bị vi phạm trong trạng thái cất tải. Bằng cách đặt tải để đưa ống vào miền chảy dẻo cục bộ và rồi cất tải, ta tạo ra *sự phân bố ứng suất dư*.

Bây giờ nếu ta gia tăng lại áp suất, các điểm ứng suất trong hình 4.12 sẽ vẹt lại các lô trình cũ của chúng giữa A', B', C' và A, B, C; chảy dẻo sẽ bắt đầu lại ở  $p = 0,624\sigma_0$ , và ở các áp suất cao hơn ứng xử sẽ chính xác như thế là áp suất đã được gia tăng vượt qua điểm này ở lần đặt tải đầu tiên. Ứng xử áp suất-chuyển vị hướng kính dưới chương trình đặt tải này được biểu thị bởi đường cong ORSU trong hình 4.10; nó rất giống với ứng xử tải-giãn dài trong thí nghiệm kéo của vật liệu biến cứng.

#### Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng



Hình 4.12. Các đường cong ứng suất đối với ống chảy dẻo  
cục bộ khi đặt áp suất và sau kho cất bỏ áp suất

#### 4.7.6. “Sự lăng xuống”

Một khía cạnh quan trọng khác của hiện tượng điều chỉnh sự phân bố ứng suất lại trong các kết cấu bằng chảy dẻo được giới hạn của vật liệu dẻo được thấy trong những cấu trúc mang các tải tác động lặp lại và lần lượt. Một mô hình phá hủy khả dĩ dưới những tình huống này là *hồng do mỏi* chu kỳ thấp của phần kết cấu qua biến dạng dẻo chu kỳ. Điều gì có khuynh hướng xảy ra trong nhiều cấu trúc trong khi một số tác động đầu tiên của tải, kết cấu “làm hết sức của nó”, bằng cách thức chảy dẻo được giới hạn, để thiết lập các phân bố ứng suất dư nhằm cực tiểu hóa các biến dạng mồi dẻo trong những chu kỳ tiếp sau.

Để cung cấp một minh họa đơn giản về điều này, hãy khảo sát áp suất  $p = 0,624\sigma_0$  tác động lặp lại lên ống ( $b/a = 2$ ). Giả sử ban đầu ống không có ứng suất, chảy dẻo sẽ đạt được ở  $p = 0,375\sigma_0$  [xem phương trình (4.64)]: do đó có thể nghĩ rằng–ít nhất, theo những người không quen thuộc với phân tích chảy dẻo–đây sẽ là giới hạn áp suất để tránh chảy dẻo lặp lại trong quá trình đặt tải áp suất lặp lại. Tuy nhiên, việc phân tích mà ta đã tiến hành chỉ ra rằng tác động đơn giản của  $p = 0,624\sigma_0$  gây ra mẫu ứng suất dư nó cho phép kết cấu đáp ứng lại tác động áp suất lặp lại lên đến mức này bởi tác động đàn hồi thuần. Chúng ta nói rằng kết cấu sẽ *lăng xuống* ứng xử đàn hồi đối với việc gây áp lực lặp lại giữa  $p = 0$  và  $p = 0,624\sigma_0$ ; ta rút ra một sự giống nhau với ứng xử của

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

miếng đệm được làm dày bằng lông nó “lắng xuống” khi được ngồi lên lại.

Hình 4.12 gợi ý rằng ống đang khảo sát của chúng ta sẽ lắng xuống đối với ngay cả các áp suất cao hơn: thực tế, có thể dễ dàng thấy được sự lắng xuống sẽ xảy ra đối với tất cả các áp suất lên đến áp suất phá hủy dẻo. Tuy nhiên kết quả này là, về một ý nghĩa nào đó, kết quả đặc biệt đối với những giá trị đủ nhỏ của  $b/a$ . Đối với các giá trị của tỷ số này lớn hơn khoảng 2,2, sự lắng xuống thì chỉ có thể đối với những áp suất thấp hơn áp suất phá hủy dẻo (bài tập 4.6).

Cần nhận ra rằng thí dụ lắng xuống có trước là vô cùng đơn giản: một kết cấu đơn giản chịu chỉ một loại đặt tải với dấu không hề thay đổi. Rõ ràng, một sự bàn luận đầy đủ về việc lắng xuống nên chứa các hệ đặt tải độc lập phức tạp với khả năng thay đổi dấu. Tuy nhiên điều này vượt quá phạm vi của tài liệu này.

Một ứng dụng thực tế của sự lắng xuống trong các ống dày là quá trình “*autofrettage-sự đóng đai tự động*”, nó đã được dùng trong nhiều năm trong việc chế tạo các nòng súng. Ta mong muốn nòng trong của nòng súng nên duy trì độ chính xác kích thước của nó trên việc gây áp lực lặp lại do cháy. Bằng cách bắt nòng súng chịu một áp suất quá mức trước khi việc gia công bề mặt cuối cùng được thực hiện, hệ ứng suất dư được thiết lập trong nòng đảm bảo rằng nòng trong không bao giờ đi vào miền chảy dẻo sau đó, dưới các điều kiện bình thường.

### 4.8. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng gia số

Trong phân tích dàn dẻo bằng phép tính gần đúng số, kỹ thuật thường dùng nhất là phương pháp gia số dùng độ cứng tiếp tuyến. Các phương trình cơ bản được cho trong các mục 4.2 đến 4.5 không thể được áp dụng một cách trực tiếp. Một mối quan hệ gia số giữa ứng suất và biến dạng được cần đến trong việc hình thành ma trận độ cứng tiếp tuyến. Những loại quan hệ cơ bản này được trình bày trong mục này.

Như đã được bàn luận trước đây, ứng xử chảy dẻo lý tưởng đa trực đòi hỏi rằng *vector* gia số ứng suất tiếp tuyến với bề mặt chảy và gia số biến dạng dẻo vuông góc với bề mặt đặt tải. Theo khái niệm chảy dẻo lý tưởng, độ lớn của gia số biến dạng dẻo không thể được xác định một cách đơn nhất bởi các ứng suất hiện hành đã được cho  $\sigma_{ij}$  và gia số ứng suất  $d\sigma_{ij}$ . Tuy nhiên, đối với các ứng suất hiện hành đã được cho  $\sigma_{ij}$  và

## Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng

gia số biến dạng dẻo đã được cho  $d\varepsilon_{ij}^p$  thỏa định luật chảy, gia số ứng suất  $d\sigma_{ij}$  có thể được xác định bởi *điều kiện nhất quán* nó đảm bảo rằng trạng thái ứng suất vẫn duy trì trên bề mặt chảy.

### 4.8.1. Dạng tổng quát của quan hệ cơ bản

Theo mục 4.1, gia số biến dạng tổng được giả sử là tổng của gia số biến dạng đàn hồi và gia số biến dạng dẻo [phương trình (4.4)]:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (4.74)$$

Gia số biến dạng đàn hồi có thể thu được từ định luật *Hooke* [xem các phương trình (3.89) và (3.96)]:

$$d\varepsilon_{ij}^e = D_{ijk\ell} d\sigma_{k\ell} \quad (4.75a)$$

hay

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{dl_1}{9K} \delta_{ij} + \frac{ds_{ij}}{2G} \quad (4.75b)$$

và gia số biến dạng dẻo được thu từ định luật chảy, phương trình (4.6). Thế rồi các quan hệ biến dạng–ứng suất đầy đủ đối với vật liệu đàn–dẻo lý tưởng được biểu diễn như

$$d\varepsilon_{ij} = D_{ijk\ell} d\sigma_{k\ell} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.76a)$$

hoặc

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{dl_1}{9K} \delta_{ij} + \frac{ds_{ij}}{2G} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.76b)$$

ở đây  $d\lambda$  là hệ số (thừa số) chưa xác định với giá trị

$$d\lambda \begin{cases} = 0 & \text{nơi } f < 0 \text{ hay } f = 0 \text{ nhưng } df < 0 \\ > 0 & \text{nơi } f = 0 \text{ và } df = 0 \end{cases} \quad (4.77)$$

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

Ta sẽ xác định dạng của hệ số  $d\lambda$  dưới đây. Việc này có thể được thực hiện bằng cách kết hợp các quan hệ ứng suất–biến dạng (4.76) với *điều kiện nhất quán*

$$d\lambda = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \quad (4.78)$$

nó đảm bảo rằng trạng thái ứng suất ( $\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}$ ) tồn tại sau khi sự thay đổi giá số  $d\sigma_{ij}$  đã xảy ra vẫn thỏa tiêu chuẩn chảy f

$$f(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}) = f(\sigma_{ij}) + df = f(\sigma_{ij}) \quad (4.79)$$

Giải phương trình (4.76) đối với  $d\sigma_{ij}$ , hoặc dùng trực tiếp định luật *Hooke* [phương trình (3.72)], định luật chảy [phương trình (4.6)], và phương trình (4.74), ta có thể xác định tensor gia số ứng suất

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p) = C_{ijkl} d\varepsilon_{kl} - d\lambda C_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{kl}} \quad (4.80)$$

Thay thế phương trình (4.80) vào phương trình (4.78) và giải đối với  $d\lambda$

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \partial \varepsilon_{kl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} C_{rstu} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{tu}}} \quad (4.81)$$

Tất cả các chỉ số trong phương trình (4.81) là các chỉ số câm, biểu thị tính chất vô hướng của  $d\lambda$ . Do đó, nếu f được định nghĩa cho vật liệu quan tâm cụ thể và các giá số biến dạng  $d\varepsilon_{ij}$  đã được quy định, hệ số  $d\lambda$  được xác định một cách đơn nhất.

Phương trình (4.81) bây giờ được thay vào phương trình (4.80); thế thì quan hệ gia số ứng suất–biến dạng có thể được biểu diễn một cách rõ ràng dưới dạng sau

$$d\sigma_{ij} = \left[ C_{ijkl} - \frac{C_{ijmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} C_{pqkl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} C_{rstu} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{tu}}} \right] d\varepsilon_{kl} \quad (4.82a)$$

#### Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng

trong đó một số chỉ số câm đã được biến đổi một cách thích hợp. *Tensor* hệ số trong dấu ngoặc biểu diễn *tensor* các *modulus* tiếp tuyến dàn–dẻo đối với vật liệu dàn–dẻo lý tưởng:

$$C_{ijk\ell}^{ep} = C_{ijk\ell} - \frac{C_{ijmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} C_{pqk\ell}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} C_{rstu} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{tu}}} \quad (4.82b)$$

Phương trình (4.82) là sự hình thành quan hệ cơ sở tổng quát nhất đối với vật liệu dàn–dẻo lý tưởng. Ta thấy các gia số ứng suất có thể được xác định một cách đơn nhất bởi hàm chảy  $f(\sigma_{ij})$  và các gia số biến dạng  $d\varepsilon_{ij}$ . Nói cách khác, nếu trạng thái ứng suất hiện hành  $\sigma_{ij}$  được biết và các gia số biến dạng  $d\varepsilon_{ij}$  đã quy định, các gia số ứng suất  $d\sigma_{ij}$  tương ứng có thể được xác định từ phương trình (4.82). Tổng quát, nếu trạng thái ứng suất hiện hành được biết và các gia số ứng suất đã quy định, các gia số biến dạng tương ứng không thể được xác định một cách đơn nhất bởi vì các gia số biến dạng dẻo không thể được xác định chỉ dựa vào hệ số vô định  $d\lambda$  [xem phương trình (4.76)].

#### 4.8.2. Quan hệ cơ bản dưới dạng các *modulus* dàn hồi E và v hoặc G và K

Bây giờ ta cần biểu diễn *tensor* dàn hồi,  $C_{ijk\ell}$ , trong phương trình cơ bản một cách rõ ràng theo các *modulus* dàn hồi E và v hoặc G và K. Ta thay phương trình (3.88) đổi với  $C_{ijk\ell}$  vào phương trình (4.81) để thu được biểu thức đổi với hệ số  $d\lambda$ :

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{v}{1-2v} d\varepsilon_{kk} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \delta_{ij}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} + \frac{v}{1-2v} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} \delta_{rs} \right)^2} \quad (4.83a)$$

Chú ý rằng  $v = 0,5(3K - 2G)/(3K + G)$ . Do đó, biểu thức trên có thể được viết lại như

## Lý thuyết dẻo kẽ thuật

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{3K - 2G}{6G} d\varepsilon_{kk} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \delta_{ij}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} + \frac{3K - 2G}{6G} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} \delta_{rs} \right)^2} \quad (4.83b)$$

Ngoài ra, ta có thể thay phương trình (3.88) đổi với  $C_{ijkl}$  vào phương trình (4.80) để thu được biểu thức đổi với  $d\sigma_{ij}$  theo E và v như

$$d\sigma_{ij} = \frac{E}{1+v} d\varepsilon_{ij} + \frac{vE}{(1+v)(1-2v)} d\varepsilon_{kk} \delta_{ij} - d\lambda \left[ \frac{E}{1+v} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{vE}{(1+v)(1-2v)} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \delta_{mn} \delta_{ij} \right] \quad (4.84a)$$

hoặc theo G và K như

$$d\sigma_{ij} = 2G d\varepsilon_{ij} + K d\varepsilon_{kk} \delta_{ij} - d\lambda \left[ \left( K - \frac{2}{3}G \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \delta_{mn} \delta_{ij} + 2G \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right] \quad (4.84b)$$

Đối với một số vật liệu, hàm chảy được biểu diễn tổng quát theo các biến ứng suất  $I_1$  và  $J_2$  dưới dạng

$$f(\sigma_{ij}) = F(I_1, \sqrt{J_2}) - k = 0 \quad (4.85)$$

Nó dẫn đến

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.86)$$

hay

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \delta_{ij} + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \frac{\partial f}{\partial \sqrt{J_2}} s_{ij} \quad (4.87)$$

Với biểu thức này, phương trình (4.84b) trở thành

#### Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng

$$d\sigma_{ij} = 2Gde_{ij} + Kd\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - d\lambda \left( 3K \frac{\partial f}{\partial l_1} \delta_{ij} + \frac{G}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial f}{\partial \sqrt{J_2}} s_{ij} \right) \quad (4.88)$$

ở đây  $d\lambda$  có dạng

$$d\lambda = \frac{3K d\varepsilon_{kk} (\partial f / \partial l_1) + (G / \sqrt{J_2}) (\partial f / \partial \sqrt{J_2}) s_{mn} de_{mn}}{9K (\partial f / \partial l_1)^2 + G (\partial f / \partial \sqrt{J_2})^2} \quad (4.89)$$

Trong hai mục tiếp theo, ta sẽ bàn luận cách thức dùng những phương trình đối với những hàm chảy đặc trưng.

#### 4.9. Mô hình vật liệu *Prandtl-Reuss* (lý thuyết $J_2$ )

Hầu hết những điểm đặc trưng cần thiết của lý thuyết dẻo gia số có thể được minh họa bởi dạng cơ bản nhất,  $F = F(J_2)$ . Dạng đơn giản nhất của  $F(J_2)$  là  $\sqrt{J_2}$ , bây giờ được biết như là tiêu chuẩn chảy *von Mises*. Các quan hệ ứng suất–biến dạng đàn–dẻo lý tưởng đã nhận được trên cơ sở của tiêu chuẩn chảy *von Mises*

$$f = \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (4.90)$$

và định luật chảy kết hợp của nó bây giờ được biết như là mô hình vật liệu *Prandtl-Reuss*. Mô hình này hầu như là mô hình được sử dụng rộng rãi nhất và có lẽ mô hình vật liệu đàn–dẻo lý tưởng đơn nhất.

Để tìm ra các quan hệ ứng suất–biến dạng hoàn chỉnh của vật liệu *Prandtl-Reuss*, ta thay phương trình (4.90) đổi với hàm chảy  $f$  vào phương trình (4.89) để nhận được  $d\lambda$  và rồi thay  $d\lambda$  vào các phương trình (4.76b) và (4.88) để thu được

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{ds_{ij}}{2G} + \frac{dl_1}{9K} \delta_{ij} + \frac{s_{mn} de_{mn}}{2k^2} s_{ij} \quad (4.91)$$

$$d\sigma_{ij} = 2Gde_{ij} + Kd\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - \frac{Gs_{mn} de_{mn}}{k^2} s_{ij} \quad (4.92)$$

Khi những điều kiện để chảy dẻo xảy ra được thỏa,

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

$$J_2 = k^2 \quad \text{và} \quad df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = s_{ij} ds_{ij} = 0 \quad (4.93)$$

Đại lượng  $s_{mn}de_{mn}$  trong số hạng thứ ba của các phương trình (4.91) và (4.92) được nhận ra như là suất của công do lệch (thay đổi hình dáng). Khai triển đại lượng này theo các giá số biến dạng dẻo và đàn hồi, ta nhận được

$$s_{mn}de_{mn} = s_{mn}(de_{mn}^e + de_{mn}^p) \quad (4.94)$$

Khi ta chú ý đến

$$de_{mn}^e = \frac{ds_{mn}}{2G} \quad (4.95)$$

và sử dụng sự kiện

$$dJ_2 = s_{mn}ds_{mn} = 0 \quad (4.96)$$

Phương trình (4.94) rút gọn thành

$$s_{mn}de_{mn} = s_{mn}de_{mn}^p \quad (4.97)$$

nó chỉ ra rằng suất của công lệch trong miền chảy dẻo thì chỉ do biến dạng dẻo. Hơn nữa, từ những phương trình (4.91) và (4.92) ta có

$$de_{kk} = \frac{dl_1}{3K} = de_{kk}^e \quad (4.98)$$

nó ngụ ý rằng

$$de_{kk}^p = de_{kk} - de_{kk}^e = 0 \quad (4.99)$$

Sự thay đổi thể tích thuần là đàn hồi và không có sự thay đổi thể tích dẻo xảy ra đối với mô hình vật liệu Prandtl-Reuss. Suất biến dạng dẻo chỉ có một thành phần lệch, nó được định nghĩa bởi định luật chảy [xem phương trình (4.8)]:

$$de_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda s_{ij} \quad (4.100)$$

## Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng

Suất của công dẻo có thể nhận được một cách đơn giản:

$$dW_p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \sigma_{ij} s_{ij} = 2d\lambda J_2 = 2d\lambda k^2 \quad (4.101)$$

Từ kết quả này, ta xác định hệ số  $d\lambda$

$$d\lambda = \frac{dW_p}{2k^2} = \frac{s_{mn} de_{mn}^p}{2k^2} = \frac{s_{mn} de_{mn}}{2k^2} \quad (4.102)$$

Khi  $d\lambda = 0$ , các phương trình (4.91) và (4.92) biến đổi thành định luật *Hooke* dưới dạng vi phân. Do đại lượng  $d\lambda$  tỷ lệ với giá số  $s_{mn}de_{mn}$ , rõ ràng là các giá số biến dạng  $d\varepsilon_{ij}$  trong phương trình (4.91) không được xác định một cách đơn nhất đối với trạng thái ứng suất  $\sigma_{ij}$  đã cho; nhưng nếu các giá số biến dạng  $d\varepsilon_{ij}$  và trạng thái ứng suất hiện hành  $\sigma_{ij}$  được cung cấp, các giá số ứng suất tương ứng được xác định một cách duy nhất bởi phương trình (4.92).

Sau cùng, các đặc trưng của vật liệu *Prandtl-Reuss* có thể được tóm tắt như sau:

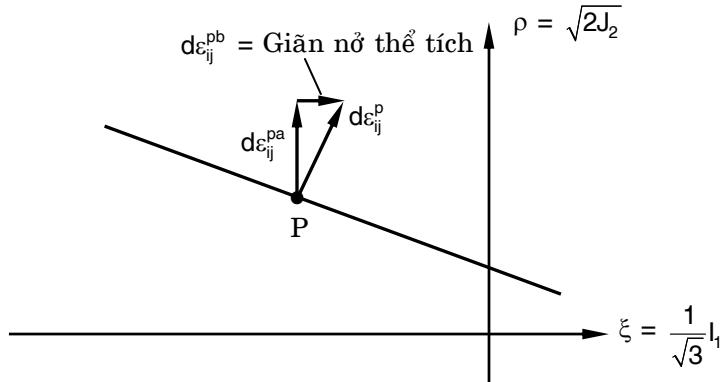
1. Các giá số biến dạng dẻo phụ thuộc vào các giá trị hiện hành của trạng thái ứng suất lệch, mà không phụ thuộc vào giá số ứng suất được yêu cầu để đạt đến trạng thái này.
2. Các trục chính của *tensor* ứng suất và *tensor* giá số biến dạng dẻo trùng nhau.
3. Sự thay đổi thể tích dẻo không thể xảy trong suốt quá trình chảy dẻo.
4. Các tỷ số của các giá số biến dạng dẻo theo những hướng khác nhau được định rõ, nhưng các độ lớn thực của các giá số được xác định bởi  $d\lambda$ , nó được liên hệ với lượng giá số thực trong công biến dạng dẻo  $dW_p$ .

### 4.10. Mô hình vật liệu *Drucker-Prager*

Tiêu chuẩn chảy *Drucker-Prager* f có dạng (xem mục 2.3.4)

$$f = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - k = 0 \quad (4.117)$$

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật



Hình 4.15. Sự giãn nở thể tích dẻo được liên kết với bề mặt chảy Drucker–Prager.

ở đây  $\alpha$  và  $k$  là hai hằng số dương của vật liệu. Như đã được mô tả trong chương 2, bề mặt chảy,  $f = 0$ , trong không gian ứng suất chính là mặt nón tiết diện tròn với trực của nó nghiêng đều so với các trực tọa độ và đỉnh của nó trong phần tám kéo.

Theo các phương trình (4.76) và (4.89), quan hệ ứng suất–biến dạng tương ứng với hàm chảy (4.117) là

$$d\epsilon_{ij} = \frac{ds_{ij}}{2G} + \frac{dl_1}{9K} \delta_{ij} + d\lambda \left( \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} + \alpha \delta_{ij} \right) \quad (4.118)$$

ở đây

$$d\lambda = \frac{\left(G/\sqrt{J_2}\right)s_{mn}de_{mn} + 3K\alpha d\epsilon_{kk}}{G + 9K\alpha^2} \quad (4.119)$$

Một đặc điểm rất quan trọng của phương trình (4.118) là suất giãn nở khối dẻo được cho bởi số hạng thứ ba ở vế phải của phương trình này là

$$d\alpha_{kk} = 3\alpha d\lambda \quad (4.120)$$

Phương trình (4.120) chỉ ra rằng biến dạng dẻo phải được kèm theo sự gia tăng thể tích nếu  $\alpha \neq 0$ . Đặc tính này được xem như là *sự giãn nở*; nó là hệ quả của sự phụ thuộc của hàm chảy dẻo vào áp lực thủy tĩnh. Đối với sự mở rộng bề mặt chảy bất kỳ về hướng trực thủy tĩnh âm, sự

#### Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng

giản nở thể tích dẻo xảy ra lúc chảy dẻo với định luật chảy kết hợp. Điều này có lẽ thấy dễ hơn từ các luận cứ hình học.

Các kinh tuyến của bề mặt chảy là những đường cong giao nhau giữa bề mặt chảy và mặt phẳng (mặt phẳng kinh tuyến) chứa trục thủy tĩnh; nghĩa là,  $\theta = \text{const}$  trong hàm chảy tổng quát. Hình 4.15 chỉ ra một kinh tuyến điển hình của sự mở rộng bề mặt chảy *Drucker-Prager* theo hướng trục thủy tĩnh âm. Điều kiện pháp tuyến hoặc định luật chảy kết hợp đòi hỏi rằng vector gia số biến dạng dẻo  $d\varepsilon_{ij}^p$  vuông góc với bề mặt chảy ở điểm chảy thực P. Do đó, nó cũng vuông góc với kinh tuyến đi qua P. Vector  $d\varepsilon_{ij}^p$  bây giờ được phân tích thành các thành phần đứng và ngang  $d\varepsilon_{ij}^{pa}$  và  $d\varepsilon_{ij}^{pb}$  lần lượt song song với các trục  $\rho$  và  $\xi$ . Thành phần ngang  $d\varepsilon_{ij}^{pb}$  biểu diễn sự thay đổi thể tích dẻo, nó luôn luôn dương khi bề mặt chảy mở rộng theo hướng trục thủy tĩnh âm (hình 4.15). Điều này hàm ý rằng chảy dẻo phải luôn được đi kèm sự gia tăng thể tích.

Sự gia tăng biến dạng thể tích tổng  $d\varepsilon_{kk} = d\varepsilon_{kk}^e + d\varepsilon_{kk}^p$  có thể được xác định từ phương trình (4.118) và  $d\lambda$  từ (4.119). Từ phương trình (4.118), ta có

$$d\varepsilon_{kk} = \frac{dl_1}{3K} + 3\alpha \frac{\left(G/\sqrt{J_2}\right)\left[\sigma_{mn}d\varepsilon_{mn} - l_1(d\varepsilon_{kk}/3)\right] + 3K\alpha d\varepsilon_{kk}}{G + 9K\alpha^2} \quad (4.121)$$

Giải phương trình trên để tìm  $d\varepsilon_{kk}$  và dùng phương trình (4.117), ta thu được

$$d\varepsilon_{kk} = \frac{\sqrt{J_2} dl_1}{3KGk} \left( G + 9K\alpha^2 \right) + \frac{3\alpha}{k} \sigma_{mn} d\varepsilon_{mn} \quad (4.122)$$

Thay hàm chảy (4.117) vào các phương trình (4.88) và (4.89), ta nhận được mối quan hệ sau đây cho tensor gia số ứng suất đối với vật liệu *Drucker-Prager*

$$d\sigma_{ij} = 2Gd\varepsilon_{ij} + Kd\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - d\lambda \left( \frac{G}{\sqrt{J_2}} s_{ij} + 3K\alpha\delta_{ij} \right) \quad (4.123)$$

ở đây  $d\lambda$  được cho bởi phương trình (4.119). Phương trình (4.123) có thể được viết lại dưới dạng thích hợp hơn

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

$$d\sigma_{ij} = C_{ijmn}^{ep} d\varepsilon_{mn} \quad (4.124)$$

nhằm sử dụng trực tiếp trong việc thiết lập phần tử hữu hạn, ở đây

$$\begin{aligned} C_{ijmn}^{ep} = & 2G\delta_{im}\delta_{jn} + \left(K - \frac{2}{3}G\right)\delta_{ij}\delta_{mn} - \\ & - \frac{\left(G/\sqrt{J_2}\right)s_{ij} + 3K\alpha\delta_{ij}}{G + 9K\alpha^2} \left( \frac{G}{\sqrt{J_2}}s_{mn} + 3K\alpha\delta_{mn} \right) \end{aligned} \quad (4.125)$$

*Tensor*  $C_{ijmn}^{ep}$  là dạng riêng của *tensor* các *modulus* tiếp tuyến dàn-dép đối với mô hình vật liệu Drucker-Prager. Dạng tổng quát của  $C_{ijmn}^{ep}$  được cho bởi phương trình (4.82b).

### 4.11. Vật liệu dẻo hướng tổng quát

Các bề mặt chảy được xem xét trong những mục trước đây được định nghĩa chỉ theo các bất biến  $I_1$  và  $J_2$ , và độc lập với bất biến  $J_3$ , hay tương ứng góc  $\theta$ . Tuy nhiên, đối với vật liệu dẻo hướng tổng quát, bề mặt chảy là một hàm của  $I_1$ ,  $J_2$ , và  $J_3$ , được biểu diễn bởi

$$f(I_1, J_2, J_3) = 0 \quad (4.139)$$

Độ dốc (*gradient*) trong trường hợp này có thể được viết như

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.140a)$$

hoặc

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = B_0 \delta_{ij} + B_1 s_{ij} + B_2 t_{ij} \quad (4.140b)$$

ở đây  $B_0$ ,  $B_1$ , và  $B_2$  tương ứng ký hiệu các đạo hàm riêng  $\partial f / \partial I_1$ ,  $\partial f / \partial J_2$ ,  $\partial f / \partial J_3$ , và  $\delta_{ij}$  là ký hiệu Kronecker,  $s_{ij}$  là *tensor* ứng suất lệch, và  $t_{ij}$  là độ lệch của bình phương của lệch ứng suất  $s_{ij}$ :

$$t_{ij} = \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ik}s_{kj} - \frac{2}{3}J_2\delta_{ij} \quad (4.141)$$

#### Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng

Thực tế, các tiêu chuẩn chảy dẻo của *Tresca* và *Mohr–Coulomb* được dùng thông dụng nhất thuộc loại này. Như một minh họa, ta xem lại phương trình (2.180), nó là một biểu thức dạng khác củ tiêu chuẩn *Mohr–Coulomb*:

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{1}{3} I_1 \sin \phi + \sqrt{J_2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - c \cos \phi = 0 \quad (4.142)$$

và chú ý rằng

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \quad (4.143)$$

Do đó, ta có

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial J_2} &= \frac{3\sqrt{3}}{4 \sin 3\theta} \frac{J_3}{J_2^{5/2}} = \frac{\cot 3\theta}{2J_2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial J_3} &= -\frac{\sqrt{3}}{2 \sin 3\theta} \frac{1}{J_2^{3/2}} = -\frac{\cot 3\theta}{3J_3} \end{aligned} \quad (4.144)$$

Lấy đạo hàm riêng của phương trình (4.142) theo  $I_1$ ,  $J_2$ , và  $J_3$ , ta thu được

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{\partial f}{\partial I_1} = \frac{\sin \phi}{3} \\ B_1 &= \frac{\partial f}{\partial J_2} = \frac{\sin(\theta + \pi/3)}{2\sqrt{J_2}} \left\{ \left[ 1 + \cot\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \cot 3\theta \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin \phi}{\sqrt{3}} \left[ \cot\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - \cot 3\theta \right] \right\} \\ B_2 &= \frac{\partial f}{\partial J_3} = \frac{\sin(\theta + \pi/3) \sin \phi - \sqrt{3} \cos(\theta + \pi/3)}{2J_2 \sin 3\theta} \end{aligned} \quad (4.145)$$

Từ phương trình (4.140), ta có thể thấy rằng chỉ những hằng số  $B_i$  cần được định nghĩa bởi bề mặt chảy. Nói cách khác, chỉ ba đại lượng này phải được biến đổi giữa bề mặt chảy này đến bề mặt chảy khác. Những hằng số  $B_i$  được cho trong bảng 4.1 đối với bốn hàm chảy được khảo sát

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

trong mục này. Những hàm chảy khác có thể được biểu diễn một cách dễ dàng trong cùng dạng.

Bảng 4.1. Các hằng số  $B_i$  được xác định bởi các bề mặt chảy khác nhau.

Hàm chảy	$B_0$	$B_1$	$B_2$
<i>von Mises</i> (2.143)	0	1	0
<i>Tresca</i> (2.138)	0	$\left[ \frac{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{J_2}} \right] \left[ 1 + \cot\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \cot 3\theta \right]$	$\left[ \frac{-\sqrt{3} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}{J_2 \sin 3\theta} \right]$
<i>Mohr-Coulomb</i> (2.180)	$\sin\phi/3$	$\left[ \frac{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}{2\sqrt{J_2}} \right] \left[ 1 + \cot\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \cot 3\theta \right]$ $+ \sin\phi \left[ \cot\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - \cot 3\theta \right] / \sqrt{3}$	$\left[ \frac{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \sin\phi - \sqrt{3} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}{2J_2 \sin 3\theta} \right]$
<i>Drucker-Prager</i> (2.185)	$\alpha$	$1/(2\sqrt{J_2})$	0

Trong các ứng dụng phần tử hữu hạn, quan hệ cơ bản của vật liệu được phản ánh bởi ma trận độ cứng vật liệu  $C_{ijkl}^{ep}$ , nó được dùng trong việc hình thành độ cứng tiếp tuyến. Ma trận độ cứng này liên hệ gia số biến dạng với gia số ứng suất được cho bởi phương trình (4.82a):

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{ep} d\varepsilon_{kl} \quad (4.146)$$

Để thu được dạng tổng quát của tensor  $C_{ijkl}^{ep}$ , ta viết lại phương trình (4.82b) như

$$C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl}^p + C_{ijkl}^p \quad (4.147)$$

trong đó  $C_{ijkl}$  là tensor đàn hồi được cho bởi phương trình (3.88) như

#### Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng

$$C_{ijkl}^p = \frac{E}{2(1+v)} \left[ \frac{2v}{(1-2v)} \delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} \right] \quad (4.148)$$

trong khi  $C_{ijkl}^p$  là *tensor* dẻo được biểu diễn như

$$C_{ijkl}^p = -\frac{H_{ih}H_{kl}}{h} \quad (4.149)$$

ở đây

$$h = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} C_{rstu} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{tu}} \quad (4.150)$$

và

$$H_{ij} = C_{ijmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \quad (4.151)$$

Thay các phương trình (4.148) đối với  $C_{ijkl}$  và (4.140) đối với  $\partial f / \partial \sigma_{ij}$  vào các phương trình (4.150) và (4.151), sau phép đạo hàm dài dòng nhưng không phức tạp (xem bài tập 4.13), ta đạt đến các biểu thức sau đây cho  $h$  và  $H_{ij}$  theo các hằng số đàn hồi  $G$  và  $v$  và các hệ số  $B_0$ ,  $B_1$ , và  $B_2$ :

$$h = 2G \left( 3B_0^2 \frac{1+v}{1-2v} + 2B_1^2 J_2 + \frac{2}{3} B_2^2 J_2^2 + 6B_1 B_2 J_3 \right) \quad (4.152)$$

$$H_{ij} = 2G \left( B_0 \frac{1+v}{1-2v} \delta_{ij} + B_1 s_{ij} + B_2 t_{ij} \right) \quad (4.153)$$

Nếu *tensor* giá số ứng suất  $d\sigma_{ij}$  và *tensor* giá số biến dạng  $d\varepsilon_{ij}$  được biểu diễn rõ ràng theo dạng *vector* như

$$\begin{aligned} \{d\sigma_{ij}\} &= \{d\sigma_x, d\sigma_y, d\sigma_z, d\tau_{yz}, d\tau_{zx}, d\tau_{xy}\} \\ \{d\varepsilon_{ij}\} &= \{d\varepsilon_x, d\varepsilon_y, d\varepsilon_z, d\gamma_{yz}, d\gamma_{zx}, d\gamma_{xy}\} \end{aligned} \quad (4.154)$$

ở đây  $d\gamma_{xy} = 2 d\varepsilon_{xy}$ , ... là các biến dạng trượt kỹ thuật, *vector* tương ứng đối với *tensor*  $H_{ij}$  có dạng

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

$$[H_{ij}] = \{ H_x, H_y, H_z, H_{yz}, H_{zx}, H_{xy} \} \quad (4.155)$$

ở đây

$$H_x = 2G \left[ B_0 \frac{1+v}{1-2v} + B_1 s_x + B_2 \left( s_x^2 + s_{xy}^2 + s_{xz}^2 - \frac{2}{3} J_2 \right) \right], \dots$$

và

$$H_{yz} = 2G[B_1 s_{yz} + B_2(s_{xy}s_{xz} + s_y s_{yz} + s_{yz}s_z)], \dots$$

Do đó, tensor  $C_{ijk\ell}^{ep}$  có thể được biểu diễn trong dạng ma trận như

$$[C^{ep}] = [C] + [C^p] \quad (4.156)$$

ở đây

$$[C] = \begin{bmatrix} \left(K + \frac{4}{3}G\right) & \left(K - \frac{2}{3}G\right) & \left(K - \frac{2}{3}G\right) & 0 & 0 & 0 \\ \left(K - \frac{2}{3}G\right) & \left(K + \frac{4}{3}G\right) & \left(K - \frac{2}{3}G\right) & 0 & 0 & 0 \\ \left(K - \frac{2}{3}G\right) & \left(K - \frac{2}{3}G\right) & \left(K + \frac{4}{3}G\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (4.157)$$

và

$$\left[ C^p \right] = -\frac{1}{h} \begin{bmatrix} H_x^2 & H_x H_y & H_x H_z & H_x H_{yz} & H_x H_{zx} & H_x H_{xy} \\ & H_y^2 & H_y H_z & H_y H_{yz} & H_y H_{zx} & H_y H_{xy} \\ & & H_z^2 & H_z H_{yz} & H_z H_{zx} & H_z H_{xy} \\ & & & H_{yz}^2 & H_{yz} H_{zx} & H_{yz} H_{xy} \\ \text{sym} & & & & H_{zx}^2 & H_{zx} H_{xy} \\ & & & & & H_{xy}^2 \end{bmatrix} \quad (4.157)$$

## Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng

### Bài tập

- 4.1. Một bình áp lực thành mỏng tròn dài chịu áp lực bên trong  $p$  và bị chảy dẻo. Tìm hệ số của các gia số biến dạng dẻo theo ba hướng chính theo phương trình *Prandtl–Reuss*.
- 4.2. Một ống thành mỏng chịu kéo dọc trực hằng và xoắn thay đổi. Ứng suất pháp hướng trực là  $\sigma_z = 0,5\sigma_0$ . Theo tiêu chuẩn *von Mises*, hãy tìm độ lớn của ứng suất tiếp  $\tau$  để ống bắt đầu chảy dẻo. Hãy xác định hệ số của các gia số biến dạng dẻo  $d\varepsilon_{ij}^p$  khi ống được chảy dẻo.
- 4.3. Một phân tử vật liệu chịu ba quá trình đặt tải tỷ lệ. Các hệ số của các ứng suất chính đối với ba trường hợp gia tải được cho như (1)  $(2\sigma, \sigma, 0)$ ; (2)  $(\sigma, \sigma, 0)$ ; (3)  $(0, -\sigma, -\sigma)$ . Theo
  - (a) Tiêu chuẩn *von Mises*:  $J_2 = k^2$ ;
  - (b) Tiêu chuẩn *Tresca*:  $\tau_{\max} = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2 = k$ ;
  - (c) Tiêu chuẩn *Drucker–Prager*:  $ad_1 + \sqrt{J_2} = k$ ;
  - (d) Tiêu chuẩn *Mohr–Coulomb*:  $(m\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2 = k$ ,  
hãy tìm độ lớn của  $\sigma$  đối với mỗi trường hợp đặt tải để vật liệu bắt đầu chảy dẻo. Hãy tìm vector gia số biến dạng dẻo chính  $(d\varepsilon_1^p, d\varepsilon_2^p, d\varepsilon_3^p)$  trong quá trình chảy dẻo dựa trên định luật chảy kết hợp.
- 4.4. Hãy chứng tỏ rằng gia số biến dạng dẻo ở đỉnh hình chóp lục giác *Mohr–Coulomb* có thể được biểu diễn như
$$d\varepsilon_1^p = (d\lambda_1 + d\lambda_2)m - (d\lambda_4 + d\lambda_5)$$
$$d\varepsilon_2^p = (d\lambda_5 + d\lambda_6)m - (d\lambda_2 + d\lambda_3)$$
$$d\varepsilon_3^p = (d\lambda_3 + d\lambda_4)m - (d\lambda_1 + d\lambda_6)$$
Hãy chứng tỏ rằng các phương trình (4.34) và (4.36) vẫn đúng trong trường hợp này (xem hình 4.5).
- 4.5. Bề mặt chảy được *Mohr–Coulomb* hiệu chỉnh là bề mặt *Mohr–Coulomb*  $m\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = f_c$  được kết hợp với mặt phẳng giới hạn kéo  $\sigma_{\max} = f_t$ .  
Bề mặt chảy này gồm chín mặt phẳng, chín cạnh, và bảy đỉnh. Hãy phân tích gia số biến dạng dẻo ở các mặt phẳng giới hạn và các cạnh và các đỉnh có liên quan. Hãy chứng tỏ rằng
  - (a) Các gia số biến dạng dẻo thỏa

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

$$\frac{\sum d\varepsilon_t^p}{\sum |d\varepsilon_c^p|} > m$$

(b) Gia số công dẻo có thể được biểu diễn bởi

$$dW_p = f'_c \sum |d\varepsilon_c^p| + f'_t (\sum d\varepsilon_t^p - m \sum d\varepsilon_c^p)$$

4.6. Một ống dày đầu tiên được đặt tải đến miền đàm-dẻo với áp suất bên trong  $p$ ,  $p_e \leq p \leq p_c$ , và rồi được cắt tải hoàn toàn.

(a) Hãy tìm các ứng suất dư.

(b) Hãy xác định áp suất cao nhất để vật liệu của ống sẽ không chảy dẻo lại khi cắt tải.

(c) Hãy chứng tỏ rằng nếu tỷ số của bán kính ngoài và bán kính trong của ống,  $b/a$ , nhỏ hơn 2,2; vật liệu sẽ lỏng xuống ứng xử đàm hồi đối với việc tạo áp lực giữa  $p = 0$  và  $p = p_c$ .

4.7. Một ống dày làm bằng vật liệu chảy dẻo lý tưởng chịu đựng áp suất bên trong chảy dẻo hoàn toàn được cho bởi phương trình (4.73). Hãy khảo sát bề mặt chảy Tresca của các điểm ứng suất đối với những bán kính khác nhau, áp dụng tính pháp tuyến để thu được thông tin về biến dạng dẻo dương, và kiểm chứng rằng biến dạng dẻo như thế tương thích với mô hình phá hủy của ống.

4.8. Một ống composite bao gồm  $n$  ống được làm cùng vật liệu lồng lên nhau. Bán kính trong và ngoài của  $n$  ống tương ứng là  $(r_i, r_1), (r_1, r_2), \dots, (r_{n-1}, r_e)$ . Ống composite chịu áp suất bên trong  $p$ . Vật liệu tuân theo tiêu chuẩn chảy Tresca. Giả sử rằng chảy dẻo xảy ra một cách đồng thời ở những mặt trong của mỗi ống. Hãy chứng tỏ rằng

(a) Áp suất bên trong đối với chảy dẻo đầu tiên được cho bởi

$$p = \frac{\sigma_0}{2} \left\{ n - \left[ \left( \frac{r_i}{r_1} \right)^2 + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 + \dots + \left( \frac{r_{n-1}}{r_e} \right)^2 \right] \right\}$$

trong đó  $\sigma_0$  là ứng suất chảy trong kéo đơn trực.

(b) Nếu tỷ số của các bán kính ngoài và trong của mỗi ống là

$$\frac{r_k}{r_{k-1}} = \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^{1/n} \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad r_0 = r_i, r_n = r_e$$

áp lực  $p$  lấy giá trị cực đại đối với chảy dẻo đầu tiên, và

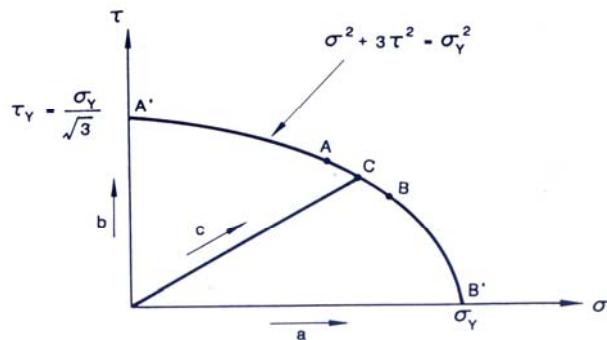
$$(p_e)_{\max} = \frac{n\sigma_0}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r_i}{r_e} \right)^{2/n} \right]$$

(c) Áp suất chảy dẻo hoàn toàn  $p$  được cho bởi

#### Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng

$$p_e = \sigma_0 \ln(r_e/r_i)$$

- 4.9. Cho hình cầu rỗng có bán kính trong  $a$  và bán kính ngoài  $b$ . Hãy phân tích ứng xử của hình cầu dưới áp suất bên trong.
- (a) Hãy tìm các ứng suất và chuyển vị đàm hồi. Hãy xác định áp suất cực đại  $p_e$  để lời giải đàm hồi này đúng.
  - (b) Hãy tìm lời giải đàm-dẻo và áp suất cực đại  $p_e$  để lời giải này này đúng.
  - (c) Nếu vật liệu được giả thiết không nén trong cả miền đàm hồi và chảy dẻo, những trường hợp đơn giản hóa nào sẽ xảy ra?
  - (d) Hãy tìm các ứng suất dư sau quá trình cất tải hoàn toàn và xác định áp suất cao nhất để sự lăng xuống xảy ra.
  - (e) Hãy tìm các ứng suất và các suất biến dạng đối với chảy dẻo không kiềm chế.
- 4.10. Trong thí nghiệm kéo/xoắn kết hợp ống thành mỏng tiết diện tròn, gọi  $\sigma$  và  $\epsilon$  tương ứng là ứng suất pháp và biến dạng dài theo phương dọc trực,  $\tau$  và  $\gamma$  tương ứng là ứng suất tiếp và biến dạng trượt. Giả sử rằng ống được làm bằng vật liệu Prandtl-Reuss với  $v = 0.5$ . Hãy tính các ứng suất  $\sigma$  và  $\tau$  tương ứng với trạng thái biến dạng  $(\epsilon, \gamma) = (\sigma_y/E, \sigma_y/\sqrt{3}G)$  đối với ba lô trình đặt tải sau đây (hình P4.10):
- (a) Biến dạng dài dọc trực  $\epsilon$  đầu tiên được tăng lên giá trị chảy dẻo  $\epsilon = \sigma_y/E$ , rồi được giữ không đổi, trong khi biến dạng trượt được tăng lên đến giá trị cuối cùng của nó  $\gamma = \sigma_y/\sqrt{3}G$ .
  - (b) Nghịch đảo lô trình đặt tải trên: biến dạng trượt đầu tiên được tăng lên đến giá trị cuối cùng của nó  $\gamma = \sigma_y/\sqrt{3}G$ , rồi được giữ hằng số, trong khi biến dạng dài dọc trực  $\epsilon$  được tăng lên giá trị cuối cùng của nó  $\sigma_y/E$ .



Hình P4.10.

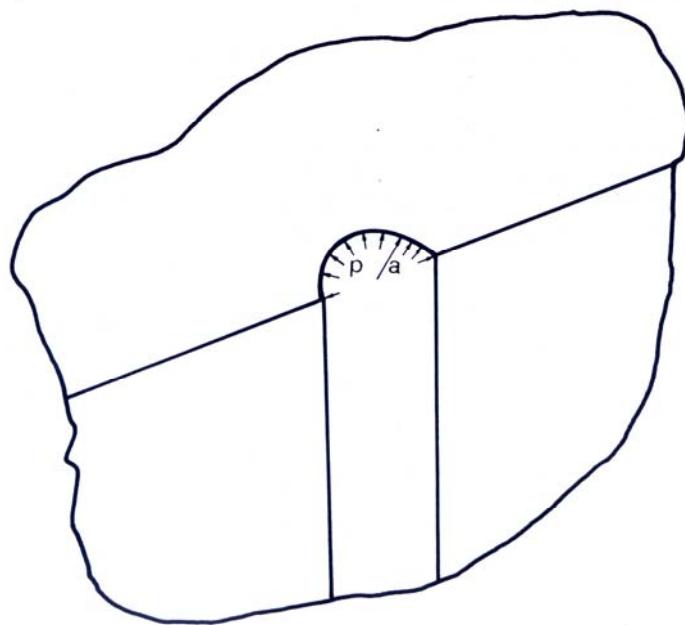
## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

- (c) Cả hai biến dạng  $\varepsilon$  và  $\gamma$  được gia tăng một cách tỷ lệ với tỷ số  $\varepsilon/\gamma = \sqrt{3} G/E = 1/\sqrt{3}$ , cho đến khi giá trị cuối cùng của chúng đạt đến.

Gợi ý: Chú ý rằng  $\sigma_{mn}d\epsilon_{mn} = \sigma_{mn}d\gamma_{mn}$ , do đó dλ có thể thu được theo k, σ, dε, τ và dγ. Do điều kiện không nén, các phương trình (4.91) hoặc (4.92) sẽ dẫn đến một nhóm các phương trình vi phân liên hệ với  $\sigma(\varepsilon, \gamma)$  và  $\tau(\varepsilon, \gamma)$ . Hãy cho  $d\varepsilon = 0$  hay  $d\gamma = 0$ ; các phương trình vi phân có thể được tích phân đối với các trường hợp (a) và (b).

- 4.11. Hãy khảo sát ứng xử của vật liệu Prandtl-Reuss và Drucker-Prager dưới điều kiện ứng suất phẳng được định nghĩa bởi  $\sigma_{ij} = [\sigma_1, 0, \sigma_3]$ . So sánh các kết quả.
- 4.12. Hãy chứng minh các phương trình (4.145).
- 4.13. Hãy chứng minh các phương trình (4.152) và (4.153).
- 4.14. Một ống bê tông thành dày dài không đáy ( $\sigma_2 = 0$ ) chịu áp suất bên trong p. Các bán kính bên trong và ngoài tương ứng là a và b. Giả sử vật liệu bê tông tuân theo tiêu chuẩn Rankine với độ bền kéo đơn trục  $f_t$ .
- Hãy xác định áp suất bên trong giới hạn đàm hồi.
  - Hãy xác định mối quan hệ giữa biên đàm-dẻo  $r = c$  và áp suất bên trong p đối với  $p > p_c$ .
  - Hãy xác định áp suất bên trong giới hạn dẻo.
  - Đối với trường hợp  $b/a = 2$ , hãy vẽ các đường cong  $\sigma_r$  và  $\sigma_\theta$  theo r đối với biên đàm-dẻo tương ứng ở  $c = a$ ,  $c = (a + b)/2$ , và  $c = b$ .
- 4.15. Một lõi hình trụ đứng dài với bán kính trong a trong nửa không gian của đá chịu áp suất bên trong p như được biểu diễn trong hình P4.15. Giả sử rằng vật liệu đá tuân theo tiêu chuẩn Rankine, với độ bền kéo đơn trục  $f_t$ . Hãy xác định mối quan hệ giữa bán kính của vùng dẻo với áp suất bên trong.
- 4.16. Giải lại bài tập 4.15 bằng cách dùng tiêu chuẩn chảy Tresca. Chứng tỏ rằng mối quan hệ giữa bán kính của vùng dẻo với áp suất bên trong có thể thu được bằng cách cho  $b \rightarrow \infty$  trong phương trình (4.68).

**Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng  
đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng**



Hình P4.15

- 4.17. Giả sử rằng vật liệu bê tông tuân theo tiêu chuẩn *Mohr-Coulomb*, giải lại bài tập 4.14. Các độ bền kéo và nén đơn trực của vật liệu tương ứng là  $f_t$  và  $f_c$ . Hãy vẽ các đường cong  $\sigma_r$  và  $\sigma_\theta$  theo  $r$  bằng cách dùng  $f_c/f_t = 10$ .
- 4.18. Giải lại bài tập 4.15 bằng cách dùng tiêu chuẩn *Mohr-Coulomb*. Giả sử các độ bền kéo và nén đơn trực của đá tương ứng là  $f_t$  và  $f_c$ .
- 4.19. Chú ý rằng tiêu chuẩn *Tresca* và *Rankine* là những trường hợp đặc biệt của tiêu chuẩn *Mohr-Coulomb*, hãy chứng tỏ rằng
  - (a) Các lời giải đòn–dẻo của ống trụ thành dày được mô tả trong mục 4.7 và bài tập 4.14 là những trường hợp đặc biệt của lời giải bài tập 4.17.
- 4.20. Hãy tìm biểu thức hệ số vô hướng  $d\lambda$  đối với vật liệu đòn–dẻo lý tưởng tổng quát bằng cách dùng định luật chảy kết hợp
 
$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

ở đây  $f = f(\sigma_{ij})$  là hàm chảy. Giả sử rằng ứng xử đàn hồi của vật liệu là tuyến tính và đẳng hướng, hãy biểu diễn hệ số vô hướng  $d\lambda$  theo hai hằng số đàn hồi  $K$  và  $G$ .

- 4.21. Hãy viết chương trình để tính ma trận cứng vật liệu  $[C^{ep}]$  của phương trình (4.156) đối với bốn hàm chảy được cho trong bảng 4.1.