

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

### 3.3. Quan hệ ứng suất–biến dạng đẳng hướng dàn hồi phi tuyến

#### 3.3.1. Giới thiệu

Vật liệu dàn hồi được đặc trưng bởi khả năng *hồi phục hoàn toàn* hình dáng và kích thước của nó. Trong trường hợp đơn trực (hình 3.9), khi gia tải và cất tải, vật liệu sẽ theo cùng đường cong ứng suất–biến dạng, nghĩa là, từ O đến A và sau đó từ A trở về O. Do đó, theo chu kỳ tải tác động OAO, trạng thái của vật liệu giống với nó trước khi chịu tải. Việc gia tải lại sẽ theo cùng lô trình đặt tải OA.

Khả năng hồi phục như thế ngụ ý rằng ngoại công cơ học sẽ được thu hồi nếu tải được cất bỏ. Vì thế, công có thể được xem như được tích trữ trong vật thể bị biến dạng dưới dạng năng lượng. Năng lượng được tích trữ này được gọi là *năng lượng biến dạng*.

Trong trường hợp đơn trực, *năng lượng biến dạng trên đơn vị thể tích* hay *mật độ năng lượng biến dạng*, W, được thể hiện bởi diện tích phía dưới đường cong  $\sigma-\varepsilon$  trong hình 3.9 và được biểu diễn như

$$W(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon \quad (3.111)$$

Trong trường hợp đa trực, mật độ năng lượng biến dạng là tổng của các năng lượng biến dạng do tất cả các thành phần ứng suất tạo ra, nghĩa là,

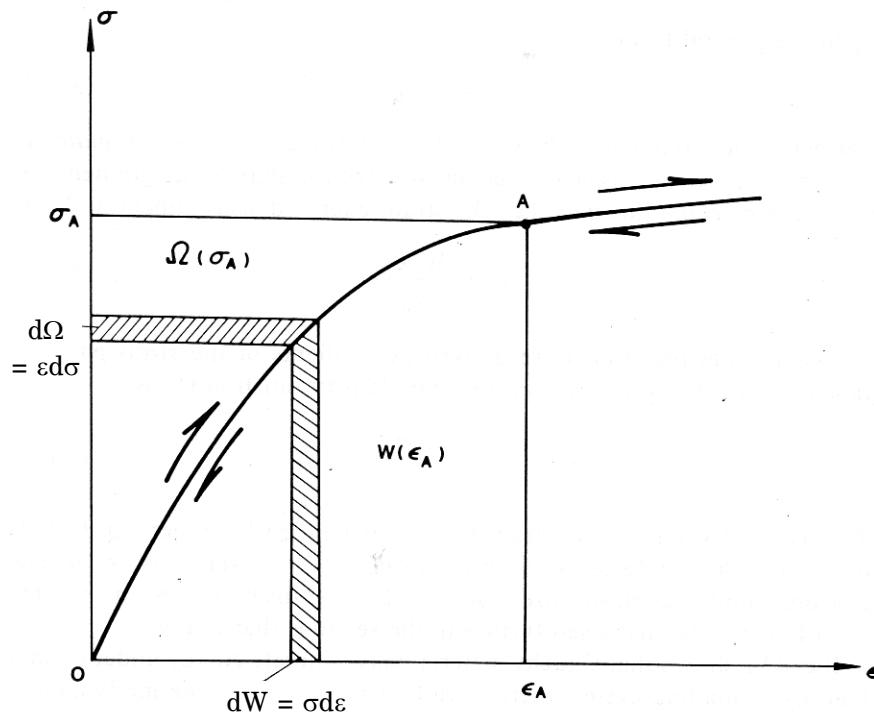
$$W(\varepsilon_{ij}) = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (3.112)$$

Mặc khác, diện tích phía trên đường cong  $\sigma-\varepsilon$  trong hình 3.9, thể hiện *mật độ năng lượng bù* (hay *năng lượng bù trên đơn vị thể tích*) đối với trường hợp đơn trực, được biểu diễn như

$$\Omega(\sigma) = \int_0^{\sigma} \varepsilon d\sigma \quad (3.113)$$

Trong trường hợp đa trực, nó có dạng

### Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi



Hình 3.9. Hàm mật độ năng lượng biến dạng  $W$   
và hàm mật độ năng lượng bù  $\Omega$ .

$$\Omega(\sigma_{ij}) = \int_0^{\sigma_{ij}} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} \quad (3.114)$$

Mật độ năng lượng biến dạng  $W$  và mật độ năng lượng bù  $\Omega$  tương ứng là những hàm của biến dạng,  $\varepsilon_{ij}$ , và ứng suất,  $\sigma_{ij}$ . Rõ ràng là những hàm năng lượng  $W$  và  $\Omega$  được liên hệ bởi

$$W + \Omega = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (3.115)$$

Về các mối quan hệ ứng suất–biến dạng, có hai cách tiếp cận để mô tả ứng xử hồi phục của các vật liệu đàn hồi. Đầu tiên, ta có thể giả định rằng có sự tương ứng một-một giữa ứng suất và biến dạng, hay nói một cách khác, ứng suất  $\sigma_{ij}$  được xác định một cách duy nhất từ biến dạng hiện hành  $\varepsilon_{ij}$  trong dạng tổng quát

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{kl}) \quad (3.116)$$

## Lý thuyết dàn hồi kỹ thuật

Vật liệu dàn hồi được định nghĩa bởi phương trình (3.116) được gọi là *vật liệu dàn hồi Cauchy*.

Thứ hai, ta có thể giả định rằng các ứng suất thu được như là các độ dốc của *hàm thế năng biến dạng* (tức là, hàm mật độ năng lượng biến dạng W) như

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (3.117)$$

hoặc giả sử rằng các biến dạng thu được như là các độ dốc của *hàm thế năng ứng suất* (tức là, hàm mật độ năng lượng bù Ω) như

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Omega(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.118)$$

Vật liệu mà quan hệ ứng suất–biến dạng của nó được định nghĩa bởi hoặc phương trình (3.117) hoặc phương trình (3.118) được xem là *vật liệu siêu dàn hồi hoặc Green*. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng dàn hồi phi tuyến đẳng hướng được dựa trên những phương trình từ (3.116) đến (3.118) sẽ được bàn luận sâu hơn trong những mục tiếp theo.

Ta có thể thấy rằng vật liệu *Cauchy* có thể phát sinh năng lượng dưới một chu kỳ gia tải và cất tải nào đó, bằng cách ấy vật liệu này vi phạm các định luật nhiệt động lực học. Điều này sẽ được thấy trong thí dụ 3.5.

### 3.3.2. Các quan hệ ứng suất–biến dạng đẳng hướng dàn hồi phi tuyến được dựa trên các hàm W và Ω

Đối với vật liệu dàn hồi đẳng hướng, mật độ năng lượng biến dạng W [phương trình (3.112)] có thể được biểu diễn theo ba bất biến độc lập tùy ý của tensor biến dạng  $\varepsilon_{ij}$ . Bằng cách chọn ba bất biến  $\bar{l}_1$ ,  $\bar{l}_2$  và  $\bar{l}_3$  được định nghĩa dưới đây, W được viết như

$$W = W(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3) \quad (3.128)$$

ở đây  $\bar{l}_1$ ,  $\bar{l}_2$  và  $\bar{l}_3$  được cho bởi

### Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi

$$\begin{aligned}\bar{l}_1 &= \varepsilon_{kk} \\ \bar{l}_2 &= \frac{1}{2} \varepsilon_{km} \varepsilon_{km} \\ \bar{l}_3 &= \frac{1}{3} \varepsilon_{km} \varepsilon_{kn} \varepsilon_{mn}\end{aligned}\tag{3.129}$$

Thế thì, từ phương trình (3.117), ta có

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \bar{l}_1} \frac{\partial \bar{l}_1}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial \bar{l}_2} \frac{\partial \bar{l}_2}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial \bar{l}_3} \frac{\partial \bar{l}_3}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

hay, thay thế từ phương trình (3.129) cho  $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$  và thực hiện đạo hàm, ta có

$$\sigma_{ij} = \alpha_1 \delta_{ij} + \alpha_2 \varepsilon_{ij} + \alpha_3 \varepsilon_{ik} \varepsilon_{jk}\tag{3.130}$$

ở đây

$$\alpha_i = \alpha_i(\bar{l}_j) = \frac{\partial W}{\partial \bar{l}_i}\tag{3.131}$$

Bằng cách đạo hàm các phương trình (3.131), các hàm  $\alpha_i$  (các hàm biến dạng vật liệu) có thể được liên hệ bởi ba phương trình:

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial \bar{l}_j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial \bar{l}_i}\tag{3.132}$$

Nên chú ý rằng sự lựa chọn ba biến biến dạng độc lập xuất hiện trong các phương trình (3.128) và (3.129) là tùy ý. Thay cho việc lựa chọn này, ta có thể dùng các biến  $I'_1, I'_2$ , và  $I'_3$  của mục 3.1 [phương trình (3.32)], hoặc các biến  $J'_1, J'_2$ , và  $J'_3$  của tensor lệch biến dạng  $e_{ij}$  [phương trình (3.51)], hay thậm chí các biến hỗn hợp như  $I'_1, J'_2$ , và  $J'_3$ . Các ưu điểm riêng biệt của việc chọn lựa ở đây là sự tách rời các hàm  $\alpha_i$  trong cách thức đơn giản, thuận tiện.

Ở giai đoạn này, thật quan trọng để minh họa rõ hơn sự khác nhau giữa các sự hình thành công thức *Cauchy* và *Green* được dựa trên các kết quả đã thu được ở trên [các phương trình (3.130) đến (3.132)]. Theo định lý *Cayley-Hamilton*, tất cả các lũy thừa nguyên dương của tensor bậc hay

## Lý thuyết đeo kỹ thuật

bất kỳ, chẳng hạn như, thí dụ, *tensor* biến dạng  $\varepsilon_{ij}$ , có thể được biểu diễn như là các tổ hợp tuyến tính của  $\delta_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ , và  $\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj}$  với các hệ số là hàm đa thức của ba bất biến của  $\varepsilon_{ij}$ . Do đó, nếu quan hệ ứng suất–biến dạng của phương trình (3.116) đối với vật liệu đàn hồi *Cauchy* có dạng đa thức bậc tùy ý theo  $\varepsilon_{ij}$ , thì phiếm hàm này có thể được viết một cách chính xác dưới dạng tương tự như phương trình (3.130) đã thu được ở trên được dựa trên sự hình thành công thức *Green* (siêu đàn hồi). Tuy nhiên, bây giờ các  $\alpha_i$  là những hàm độc lập với các bất biến của  $\varepsilon_{ij}$ , và chúng không còn bị hạn chế bởi các quan hệ được cho trong các phương trình (3.132) đối với các vật liệu *Green* nữa. Do đó, những mô hình cơ bản khác nhau (thí dụ, bậc hai, bậc ba, bậc bốn) được dựa trên các sự hình thành công thức của cả *Cauchy* và *Green* có thể thu được bằng cách căn cứ vào quan hệ tổng quát của phương trình (3.130) với các dạng hàm được giả định khác nhau cho  $\alpha_i$ . Sự khác nhau duy nhất là các hàm  $\alpha_i$  được chọn bị hạn chế hơn nữa bởi những quan hệ (3.132) đối với những vật liệu loại *Green*.

Không có lý do ưu tiên đối với việc đòi hỏi rằng các số hạng của bậc được quy định hiện diện trong những hàm biến dạng vật liệu. Do đó, vì sự đơn giản, thật có lợi trong vài trường hợp để khai triển  $W$  như một hàm của chỉ hai bất biến biến dạng, hay thậm chí chỉ một bất biến biến dạng. Ngoài ra, người ta không thể giữ lại tất cả những sự kết hợp có thể của các bất biến này đối với bậc đã được quy định.

Trong một thủ tục tương tự, ta có thể thu được những quan hệ cơ sở khác nhau từ phương trình (3.118) bằng cách khai triển hàm  $\Omega$  theo các bất biến ứng suất  $\bar{I}_1$ ,  $\bar{I}_2$ , và  $\bar{I}_3$  ( $I_1$ ,  $I_2$ , và  $I_3$ , hay  $I_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$ ). Do đó, nếu ta chọn các bất biến ứng suất dưới đây (tương tự với các bất biến đã định nghĩa cho biến dạng),

$$\begin{aligned}\bar{I}_1 &= \sigma_{kk} \\ \bar{I}_2 &= \frac{1}{2}\sigma_{km}\sigma_{km} \\ \bar{I}_3 &= \frac{1}{3}\sigma_{km}\sigma_{kn}\sigma_{mn}\end{aligned}\tag{3.133}$$

phương trình cơ sở là

$$\varepsilon_{ij} = \phi_1\delta_{ij} + \phi_2\sigma_{ij} + \phi_3\sigma_{ik}\sigma_{jk}\tag{3.134}$$

ở đây

### Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi

$$\phi_i = \phi_i(\bar{I}_j) = \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{I}_i} \quad (3.135)$$

và các ràng buộc lên các hàm ứng suất vật liệu  $\phi_i$  được cho bởi ba quan hệ sau đây:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{I}_j} = \frac{\partial \phi_j}{\partial \bar{I}_i} \quad (3.136)$$

Cần nhấn mạnh rằng ứng xử của các mô hình đằng hướng được mô tả trong các phương trình (3.130) và (3.134) là *thuận nghịch* và *độc lập với lô trình*, như trong những mô hình đàn hồi tuyến tính, do trạng thái biến dạng (ứng suất) là đơn nhất được xác định bởi các giá trị hiện hành của các ứng suất (các biến dạng) mà không cần quan tâm đến lịch sử đặt tải. Hơn nữa, các trực ứng suất chính và biến dạng chính luôn trùng nhau trong những mô hình này.

#### 3.3.3. Các quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi phi tuyến đằng hướng có được bởi sự hiệu chỉnh các *modulus* đàn hồi

Các quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi tuyến tính đã được bàn luận trong mục 3.2.2 là *đằng hướng* và *thuận nghịch*. Rõ ràng, một sự mở rộng của các quan hệ này với các *modulus* đàn hồi được thay thế bởi các hàm vô hướng được liên kết với hoặc các bất biến ứng suất hoặc các bất biến biến dạng cũng có những đặc trưng của sự đằng hướng và sự thuận nghịch. Thí dụ, các hàm vô hướng được liên kết với trạng thái ứng suất có thể bao gồm các giá trị của các ứng suất chính  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , và  $\sigma_3$ , hoặc ba bất biến độc lập  $I_1$ ,  $J_2$ , và  $J_3$ . Do đó, các hàm vô hướng khác nhau như  $F(I_1, J_2, J_3)$  được liên kết với các bất biến ứng suất, hoặc  $F(I'_1, J'_2, J'_3)$  được liên kết với các bất biến biến dạng, có thể được dùng để mô tả các mô hình cơ sở đàn hồi phi tuyến khác nhau. Các quan hệ ứng suất–biến dạng phi tuyến đối với mỗi mô hình này thu gọn về các dạng tuyến tính khi các hàm vô hướng được lấy là các hằng số.

Như là một thí dụ đầu tiên, ta hãy khảo sát dạng đàn hồi tuyến tính của phương trình (3.84) được hiệu chỉnh bởi thay thế số nghịch đảo của *Young modulus*  $E$  bằng một hàm vô hướng của các bất biến  $I_1$ ,  $J_2$ , và  $J_3$  được đặt tên là  $F(I_1, J_2, J_3)$ . Do đó, ta có

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

$$\varepsilon_{ij} = (1 + v)F(I_1, J_2, J_3)\sigma_{ij} - vF(I_1, J_2, J_3)\sigma_{kk}\delta_{ij} \quad (3.142)$$

Hệ số Poisson  $v$  cũng có thể được thay thế bởi hàm của các bất biến ứng suất.

Các phương trình (3.142) là các quan hệ ứng suất–biến dạng phi tuyến đối với vật liệu đàn hồi đẳng hướng nó rút gọn về các dạng tuyến tính khi  $F(I_1, J_2, J_3)$  là hằng số ( $1/E$ ). Chúng biểu diễn ứng xử đàn hồi (thuận nghịch) bởi vì trạng thái biến dạng được xác định một cách đơn trị bởi trạng thái ứng suất hiện hành mà không cần quan tâm đến lịch sử đặt tải.

Đĩ nhiên, có sự chia tách cuối cùng và hợp lý giữa đáp ứng trung bình và đáp ứng lệch hay trượt của vật liệu, như đối với vật liệu đàn hồi tuyến tính. Đặc biệt, ta có thể thu được từ phương trình (3.142)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kk} &= (1 - 2v)F(I_1, J_2, J_3)\sigma_{kk} \\ e_{ij} &= (1 + v)F(I_1, J_2, J_3)s_{ij} \end{aligned} \quad (3.143)$$

ở đây các *modulus K* và *G* được biểu diễn theo  $E$  và  $v$  bởi các phương trình (3.92) và (3.83) và số nghịch đảo của  $E$  được thay thế bởi hàm vô hướng  $F(I_1, J_2, J_3)$ . Tuy nhiên, không giống như quan hệ đàn hồi tuyến tính, các phương trình (3.143) chứng tỏ rằng có một sự tương tác giữa hai đáp ứng thông qua sự thay đổi độ lớn của hàm vô hướng  $F$  với sự biến thiên của các bất biến  $I_1, J_2$ , và  $J_3$ . Điều này ngũ ý rằng sự thay đổi thể tích  $\varepsilon_{kk}$  không chỉ phụ thuộc vào  $\sigma_{kk}$ . Tương tự, các lệch hay các biến dạng trượt,  $e_{ij}$ , không chỉ phụ thuộc vào độ lệch ứng suất hoặc các ứng suất tiếp,  $s_{ij}$ . Chúng phụ thuộc lẫn nhau, và tương tác thông qua sự biến thiên của hàm vô hướng  $F(I_1, J_2, J_3)$ .

Như là thí dụ thứ hai của sự hình thành công thức quan hệ cơ sở của các vật liệu đàn hồi phi tuyến đẳng hướng, hãy khảo sát sự hiệu chỉnh các quan hệ tuyến tính của các công thức (3.93) và (3.94). Các *modulus* khối và trượt đàn hồi được lấy như là các hàm vô hướng của các bất biến *tensor* ứng suất hoặc *tensor* biến dạng. Do đó, các phương trình (3.93) và (3.94) bây giờ có thể được viết như

$$p = K_s \varepsilon_{kk} \quad (3.144)$$

$$s_{ij} = 2G_s e_{ij} \quad (3.145)$$

### Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi

Do đó, ta có

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + p\delta_{ij} = 2G_s e_{ij} + K_s \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (3.146)$$

ở đây  $K_s$  và  $G_s$  tương ứng được biết như *modulus khói cắt* và *modulus khói cắt*. Các dạng hàm vô hướng của  $K_s$  và  $G_s$  theo các bất biến *tensor* ứng suất hoặc *tensor* biến dạng được khai triển chủ yếu từ các dữ liệu thí nghiệm. Về nguyên tắc cơ bản, một hàm vô hướng tùy ý của các bất biến *tensor* ứng suất hoặc *tensor* biến dạng có thể được sử dụng cho các *modulus* đàn hồi phi tuyến đẳng hướng như đã được bàn luận trước đây. Rõ ràng, các mô hình cơ bản được hình thành trên cơ sở này là loại đàn hồi *Cauchy*; trạng thái biến dạng được xác định một cách duy nhất bởi trạng thái ứng suất hiện hành hay ngược lại. Thí dụ, đối với trạng thái ứng suất tùy ý,  $\sigma_{ij}$ , giá trị của  $F(I_1, J_2, J_3)$  và do đó các thành phần biến dạng,  $\varepsilon_{ij}$ , trong các phương trình (3.143) được xác định một cách duy nhất mà không cần quan tâm đến lộ trình đặt tải. Tuy nhiên, điều này không ngụ ý rằng  $W$  và  $\Omega$ , được tính toán từ các quan hệ ứng suất–biến dạng như thế, cũng *độc lập với lộ trình*. Những hạn chế nào đó phải được áp đặt đối với các hàm vô hướng đã chọn để đảm bảo đặc tính độc lập lộ trình của  $W$  và  $\Omega$ . Điều này đảm bảo rằng các định luật nhiệt động lực học luôn được thỏa và năng lượng không được sinh ra trong suốt chu kỳ đặt tải và cất tải bất kỳ.

Hãy khảo sát các quan hệ ứng suất–biến dạng của phương trình (3.146). Hãy để  $K_s$  và  $G_s$  là các hàm tổng quát các bất biến biến dạng  $I'_1, J'_2$ , và  $J'_3$  của dạng  $K_s(I'_1, J'_2, J'_3)$  và  $G_s(I'_1, J'_2, J'_3)$ . Biểu thức cho  $W$  trong trường hợp này là

$$W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \int_0^{J'_2} 2G_s(l'_1, J'_2, J'_3) dJ'_2 + \int_0^{l'_1} \frac{1}{2} K_s(l'_1, J'_2, J'_3) d(l'_1)^2 \quad (3.147)$$

trong đó  $d(l'_1)^2 = 2I'_1 dI'_1$ .

Tương tự, nếu  $K_s$  và  $G_s$  được lấy như là các hàm của các bất biến ứng suất  $I_1, J_2$ , và  $J_3$ , ta có thể thấy rằng  $\Omega$  được cho bởi

$$\Omega = \int_0^{\sigma_{ij}} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} = \int_0^{J_2} \frac{dJ_2}{2G_s(l_1, J_2, J_3)} + \int_0^{l_1} \frac{d(l_1)^2}{18K_s(l_1, J_2, J_3)} \quad (3.148)$$

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

Như có thể được thấy, để cho  $W$  độc lập với lô trình, các tích phân trong phương trình (3.147) phải phụ thuộc chỉ vào các giá trị  $I'_1$  và  $J'_2$  hiện hành. Điều này có thể luôn được thỏa mãn nếu các *modulus*  $K_s$  và  $G_s$  được biểu diễn như

$$\begin{aligned} K_s &= K_s(I'_1) \\ G_s &= G_s(J'_2) \end{aligned} \tag{3.149a}$$

Nhưng vì  $I'_1$  và  $J'_2$  được liên hệ với  $\varepsilon_{oct}$  và  $\gamma_{oct}$ , các phương trình (3.149a) có thể được biểu diễn theo các dạng khác

$$\begin{aligned} K_s &= K_s(\varepsilon_{oct}) \\ G_s &= G_s(\gamma_{oct}) \end{aligned} \tag{3.149b}$$

Tương tự, để thỏa mãn yêu cầu  $\Omega$  độc lập với lô trình trong phương trình (3.148),  $K_s$  và  $G_s$  được lấy lần lượt là những hàm của chỉ  $I_1$  và  $J_2$ , nghĩa là,

$$\begin{aligned} K_s &= K_s(I_1) \\ G_s &= G_s(J_2) \end{aligned} \tag{3.150a}$$

hoặc, theo các thành phần ứng suất bát diện

$$\begin{aligned} K_s &= K_s(\sigma_{oct}) \\ G_s &= G_s(\tau_{oct}) \end{aligned} \tag{3.150b}$$

Hơn nữa,  $K_s$  và  $G_s$  phải, dĩ nhiên, dương. Do đó, các tích phân trong các phương trình (3.147) và (3.148) luôn dương (vì  $I_1^2$  và  $J_2$  dương). Điều này xác nhận rằng  $W$  và  $\Omega$  luôn xác định dương. Sự độc lập với lô trình đối với các hàm thế năng  $W$  và  $\Omega$  là do tính thuận nghịch của ứng xử đàn hồi, trong khi việc xác định dương của  $W$  và  $\Omega$  do yêu cầu về sự ổn định của vật liệu. Việc này sẽ được thảo luận trong mục tiếp theo.

### 3.4. Nguyên lý công ảo

Nguyên lý công ảo đã chứng tỏ rất mạnh mẽ như là một kỹ thuật trong việc giải các bài toán và trong việc đưa ra những chứng minh cho các

### Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi

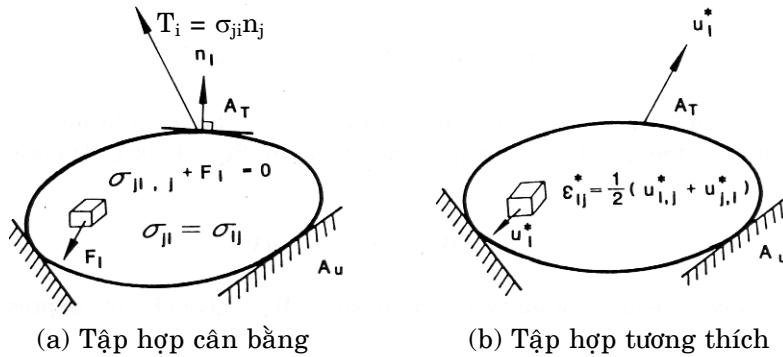
định lý tổng quát của cơ học vật rắn. Trong phần dưới đây, phương trình công ảo sẽ thu được. Phương trình này được cần đến cho những khảo sát tiếp theo về sự ổn định và tính đơn nhất của các quan hệ ứng suất–biến dạng tổng quát, chúng có thể không thuận nghịch và phụ thuộc lô trình. Trong sự bắt nguồn, các giả định sau đây được thực hiện: các chuyển vị là đủ nhỏ để mà các thay đổi về hình học của vật thể được bỏ qua và cấu hình chưa biến dạng ban đầu có thể được dùng trong việc thiết lập các phương trình cho hệ thống. Điều này ngụ ý rằng các thành phần phi tuyến trong tính tương thích của biến dạng và chuyển vị được bỏ qua. Điều này dẫn đến các phương trình cân bằng (3.70) và các quan hệ tương thích (3.71) có thể áp dụng ở đây.

Phương trình công ảo đề cập đến hai tập hợp rời rạc và chưa được quan hệ: tập hợp *cân bằng* và tập hợp *tương thích*. Tập hợp cân bằng và tập hợp tương thích được nhóm lại (gom lại) với nhau, sát bên nhau nhưng độc lập, trong phương trình công ảo (hình 3.12).

$$\begin{array}{c} \text{Tập hợp cân bằng} \\ \boxed{\int_A T_i u_i^* dA + \int_V F_i u_i^* dV = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* dV} \\ \text{Tập hợp tương thích} \end{array} \quad (3.151)$$

Phép tích phân ở đây thực hiện trên toàn diện tích, A, hay thể tích, V, của vật thể. Các đại lượng  $T_i$  và  $F_i$  tương ứng là các ngoại lực bề mặt và thể tích. Trường ứng suất  $\sigma_{ij}$  là tập hợp ứng suất tùy ý, *thật* hay *khác*, trong trạng thái cân bằng với các lực thể tích  $F_i$  bên trong vật thể và với các lực bề mặt  $T_i$  trên bề mặt mà các lực  $T_i$  được phân bố. Tương tự, trường biến dạng  $\varepsilon_{ij}^*$  biểu diễn tập hợp bất kỳ của biến dạng tương thích với các chuyển vị thật hoặc ảo  $u_i^*$  của các điểm chịu tác động của các ngoại lực  $T_i$  và  $F_i$ . Trong hình 3.12, hai tập hợp (cân bằng và tương thích) được biểu thị, cũng như những yêu cầu để được thỏa mãn bởi mỗi tập hợp [các phương trình (3.70) và (3.71)].

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật



Hình 3.12. Hai tập hợp độc lập trong phương trình công ảo.

Điều quan trọng cần lưu ý là cả tập hợp cân bằng  $T_i$ ,  $F_i$ , và  $\sigma_{ij}$  (hình 3.12a) và tập hợp tương thích  $u_i^*$  và  $\varepsilon_{ij}^*$  (hình 3.12b) đều không cần là trạng thái thật, mà cũng không cần các tập hợp cân bằng và tương thích được liên hệ với nhau theo một cách thức nào đó. Trong phương trình (3.151), các dấu ngoặc sao được dùng cho tập hợp tương thích để nhấn mạnh rằng hai tập hợp này độc lập hoàn toàn. Khi các trạng thái thực (nó thỏa cả hai điều kiện cân bằng và tương thích) được thay thế trong phương trình (3.151), các dấu ngoặc sao được bỏ qua.

### 3.4.1. Chứng minh phương trình công ảo

Hãy khảo sát ngoại công ảo,  $W_{ext}$ , được cho bởi biểu thức ở vế trái của phương trình (3.151). Với  $T_i = \sigma_{ji}n_j$  trên diện tích  $A$ , ta có thể viết

$$W_{ext} = \int_A \sigma_{ji}n_j u_i^* dA + \int_V F_i u_i^* dV$$

Tích phân đầu có thể được chuyển thành tích phân thể tích bằng cách dùng định lý divergence. Do đó, ta có

$$\begin{aligned} W_{ext} &= \int_V (\sigma_{ji}u_i^*)_j dV + \int_V F_i u_i^* dV \\ &= \int_V (\sigma_{ji,j}u_i^* + \sigma_{ji}u_{i,j}^*) dV + \int_V F_i u_i^* dV \end{aligned}$$

hay

$$W_{ext} = \int_V [(\sigma_{ji,j} + F_i)u_i^* + \sigma_{ji}u_{i,j}^*] dV \quad (3.152)$$

### Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi

Số hạng đầu tiên trong dấu ngoặc đơn triệt tiêu đối với tập hợp cân bằng, nó thỏa các phương trình cân bằng được cho trong phương trình (3.70b). Do đó, phương trình (3.152) rút gọn về

$$W_{\text{ext}} = \int_V \sigma_{ij} u_{i,j}^* dV \quad (3.153)$$

Bây giờ ta khảo sát nội công ảo,  $W_{\text{int}}$ , được cho bởi biểu thức ở vế phải của phương trình (3.151). Bằng cách dùng phương trình (3.71a), ta có

$$W_{\text{int}} = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* dV = \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} (u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) dV$$

hoặc

$$W_{\text{int}} = \int_V \left( \frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{i,j}^* + \frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{j,i}^* \right) dV$$

nó có thể được viết như ( $i, j$  là các chỉ số giả/câm)

$$W_{\text{int}} = \int_V \left( \frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{i,j}^* + \frac{1}{2} \sigma_{ji} u_{i,j}^* \right) dV$$

Cuối cùng, sử dụng tính đối xứng của  $\sigma_{ij}$ ,

$$W_{\text{int}} = \int_V \sigma_{ij} u_{i,j}^* dV \quad (3.154)$$

Vì thế, từ các phương trình (3.153) và (3.154),  $W_{\text{ext}} = W_{\text{int}}$  và phương trình công ảo được thiết lập.

#### 3.4.2. Các dạng suất của các phương trình công ảo

Tập hợp cân bằng và tập hợp tương thích tùy ý có thể được thay vào phương trình (3.151). Cụ thể, một gia số hay suất thay đổi của ngoại lực và ứng suất nội  $\dot{T}_i, \dot{F}_i, \dot{\sigma}_{ij}$  có thể được dùng như một tập hợp cân bằng và một gia số hay suất thay đổi của các chuyển vị và biến dạng  $\dot{u}_i^*, \dot{\varepsilon}_{ij}^*$  như là tập hợp tương thích. Do đó, các dạng suất được cho dưới đây có giá trị như các phương trình công ảo:

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

$$\int_A \dot{T}_i \dot{u}_i^* dA + \int_V \dot{F}_i \dot{u}_i^* dV = \int_V \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^* dV \quad (3.155)$$

$$\int_A \dot{T}_i u_i^* dA + \int_V \dot{F}_i u_i^* dV = \int_V \dot{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij}^* dV \quad (3.156)$$

$$\int_A T_i u_i^* dA + \int_V F_i u_i^* dV = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* dV \quad (3.157)$$

### 3.5. Định đề ổn định Drucker

Hãy khảo sát một vật thể vật liệu có thể tích V và diện tích bề mặt A, như được biểu diễn trong hình 3.13a. Các lực bề mặt và thể tích tác động được ký hiệu lần lượt bởi  $T_i$  và  $F_i$ . Các chuyển vị, ứng suất, và biến dạng được gây ra tương ứng là  $u_i$ ,  $\sigma_{ij}$ , và  $\varepsilon_{ij}$ . Hệ thống các lực, ứng suất, chuyển vị, và biến dạng đang tồn tại này thỏa mãn cả hai điều kiện cân bằng và tương thích.

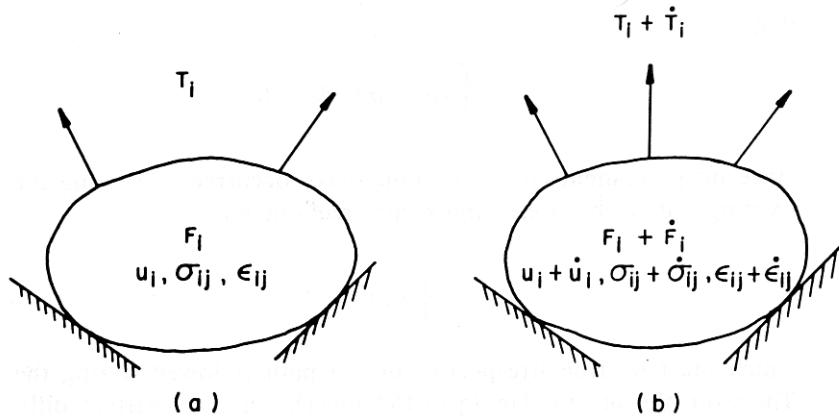
Bây giờ hãy khảo sát một tác động bên ngoài nó hoàn toàn khác biệt với tác động gây ra các trạng thái ứng suất  $\sigma_{ij}$  và biến dạng  $\varepsilon_{ij}$  đang tồn tại. Tác động bên ngoài này gây ra các lực bề mặt và thể tích bổ sung,  $\dot{T}_i$  và  $\dot{F}_i$ , chúng gây ra tập hợp ứng suất  $\dot{\sigma}_{ij}$ , biến dạng  $\dot{\varepsilon}_{ij}$ , và chuyển vị  $\dot{u}_i$  bổ sung như được minh họa trong hình 3.13b.

Một vật liệu ổn định được định nghĩa là vật liệu thỏa các điều kiện sau đây (bây giờ được biết như là các định đề ổn định của Drucker):

1. Trong thời gian tác động của tập hợp các lực được bổ sung, công được thực hiện bởi tác động bên ngoài trên những thay đổi về chuyển vị mà nó gây ra là dương.
2. Đối với chu kỳ tác động và cất bỏ của tập hợp các lực được bổ sung, công mới được thực hiện bởi tác động bên ngoài trên những thay đổi về chuyển vị mà nó gây ra là không âm.

Cần nhấn mạnh rằng công được nói đến chỉ là công được thực hiện bởi tập hợp các lực được bổ sung,  $\dot{T}_i$ ,  $\dot{F}_i$ , trên sự thay đổi về chuyển vị  $\dot{u}_i$  mà nó gây ra, chứ không phải công được thực hiện bởi các lực tổng trên  $\dot{u}_i$ . Về mặt toán học, hai yêu cầu ổn định có thể được phát biểu như

### Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi



Hình 3.13. Tác động bên ngoài và định đề ổn định của Drucker.

(a) Hệ thống đang tồn tại; (b) Hệ thống đang tồn tại và tác động bên ngoài.

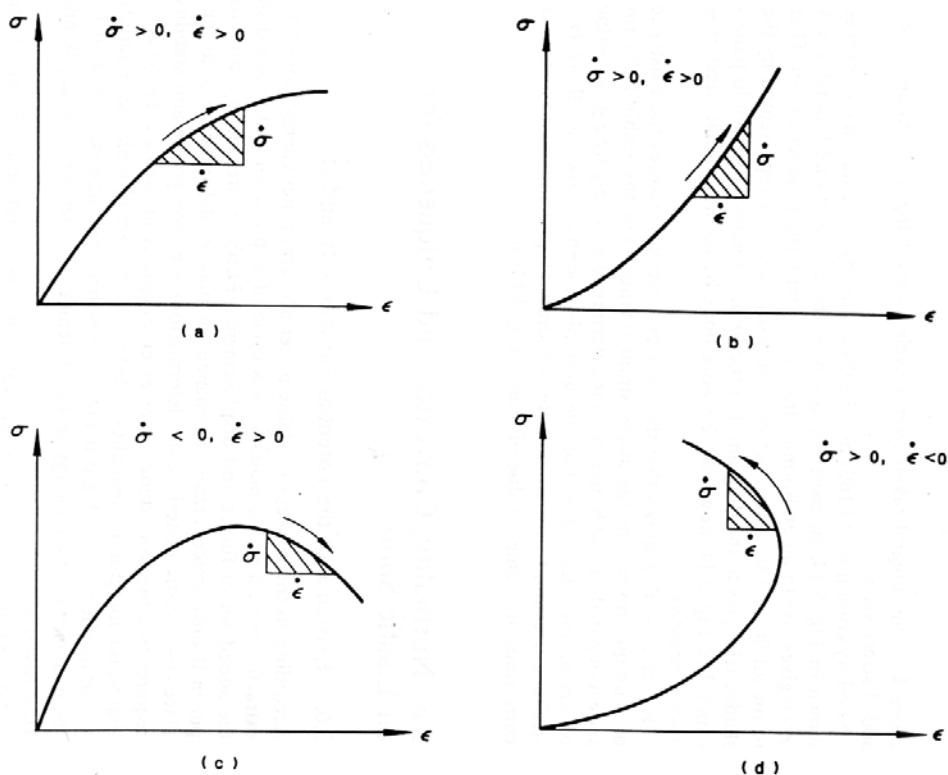
$$\int_A \dot{T}_i \dot{u}_i dA + \int_V \dot{F}_i \dot{u}_i dV > 0 \quad (3.158)$$

$$\oint_A \dot{T}_i \dot{u}_i dA + \oint_V \dot{F}_i \dot{u}_i dV \geq 0 \quad (3.159)$$

trong đó  $\oint$  biểu thị tích phân trên chu kỳ của sự tác động và cát bỏ của tập hợp các lực và ứng suất bổ sung.

Định đề đầu tiên, phương trình (3.158), được gọi là *độ ổn định trong khoảng nhỏ*, trong khi định đề thứ hai, phương trình (3.159), được đặt tên là *độ ổn định trong chu kỳ*. Chú ý rằng những yêu cầu ổn định này hạn chế hơn các định luật nhiệt động lực học, chúng chỉ yêu cầu công được thực hiện bởi các lực tổng (đang tồn tại)  $F_i$  và  $T_i$  trên  $\dot{u}_i$  không âm.

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật



Hình 3.14. Các đường cong ứng suất–biến dạng ổn định và không ổn định: (a), (b) ổn định  $\dot{\sigma}\dot{\epsilon} > 0$ ; (c), (d) không ổn định  $\dot{\sigma}\dot{\epsilon} < 0$ .

Áp dụng nguyên lý công ảo cho tập hợp cân bằng “được bổ sung”,  $F_i$ ,  $T_i$ , và  $\dot{\sigma}_{ij}$ , và tập hợp tương thích tương ứng,  $u_i$  và  $\dot{e}_{ij}$ , các điều kiện ổn định trong những phương trình (3.158) và (3.159) có thể được quy về các bất đẳng thức như sau (V là thể tích tùy ý):

$$\dot{\sigma}_{ij}\dot{e}_{ij} > 0 \quad \text{độ ổn định trong khoảng nhỏ} \quad (3.160)$$

$$\oint \dot{\sigma}_{ij}\dot{e}_{ij} \geq 0 \quad \text{độ ổn định trong chu kỳ} \quad (3.161)$$

trong đó  $\oint$  biểu thị tích phân trên chu kỳ của sự tác động và cát bù của tập hợp ứng suất được bổ sung  $\dot{\sigma}_{ij}$ .

### Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi

Các điều kiện ổn định (3.160) có thể được minh họa bởi các đường cong  $\sigma-\varepsilon$  được biểu thị trong hình 3.14. Trong các ô a và b của hình, ứng suất thêm vào  $\dot{\sigma} > 0$  gây ra sự gia tăng biến dạng bổ sung  $\dot{\varepsilon} > 0$ , với tích số  $\dot{\sigma}\dot{\varepsilon} > 0$ . Nghĩa là, ứng suất thêm vào tạo ra công dương, nó được biểu thị bởi các tam giác được tô đậm trong biểu đồ. Tuy nhiên, đối với vật liệu không ổn định được biểu diễn trong những ô c và d của hình 3.14, công được thực hiện bởi ứng suất thêm vào  $\dot{\sigma}$  luôn âm.

Hình 3.14 cũng chỉ ra rằng định đề ổn định đảm bảo sự tồn tại của sự nghịch đảo duy nhất của quan hệ ứng suất–biến dạng. Đối với ứng xử ổn định được biểu thị trong các ô a và b, ứng suất được xác định một cách đơn trị bởi giá trị biến dạng đã cho, và ngược lại. Tuy nhiên, đối với những vật liệu không ổn định, hai biến dạng tương ứng với một giá trị đơn của ứng suất (hình 3.14c) hoặc hai ứng suất tương ứng với một giá trị đơn của biến dạng (hình 3.14d).

#### 3.6. Tính pháp tuyến, lồi và mối quan hệ một–một của vật rắn đàn hồi

##### 3.6.1. Sự tồn tại của các hàm thế năng W và $\Omega$

Theo khái niệm của các vật liệu ổn định, năng lượng thực hữu dụng không thể được trích ra từ vật liệu ổn định trong một chu kỳ đặt và cất bỏ của tập hợp các lực và chuyển vị được thêm vào. Hơn nữa, năng lượng phải được thêm vào nếu chỉ có biến dạng không hồi phục (vĩnh cửu hay dẻo) xảy ra. Đối với những vật liệu đàn hồi, tất cả biến dạng là hồi phục và độ ổn định yêu cầu rằng công được thực hiện bởi tác động bên ngoài trong một chu kỳ như thế bằng không: nghĩa là, tích phân của bất đẳng thức (3.161) luôn bằng không đối với những vật liệu đàn hồi. Ta có thể thấy rằng điều này cung cấp *điều kiện cần và đủ* đối với sự tồn tại của các hàm năng lượng biến dạng và năng lượng bù, W và  $\Omega$ .

Thí dụ, các trạng thái đang tồn tại của ứng suất và biến dạng trong vật thể vật liệu đàn hồi được ký hiệu lần lượt bởi  $\sigma_{ij}^*$  và  $\varepsilon_{ij}^*$ . Hãy khảo sát một tác động bên ngoài nó đặt vào và rồi giải phóng ra một tập hợp các ứng suất thêm vào trạng thái ứng suất đang tồn tại. Đối với vật liệu đàn hồi, khi trạng thái ứng suất trở về  $\sigma_{ij}^*$ , trạng thái biến dạng cũng trở về  $\varepsilon_{ij}^*$ ; do đó một chu kỳ biến dạng được hoàn chỉnh bắt đầu và kết thúc ở  $\varepsilon_{ij}^*$ . Đối với chu kỳ như thế, định đề ổn định thứ hai yêu cầu rằng

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

$$\oint (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\varepsilon_{ij} = 0$$

vì không có các biến dạng vĩnh cửu (dẻo) xảy ra. Bằng cách chọn trạng thái tồn tại ban đầu là không ứng suất và không biến dạng, ta có

$$\oint \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = 0 \quad (3.162)$$

nó phải đúng bất chấp lộ trình được đi theo trong suốt chu kỳ. Do đó, hàm bị tích phân trong phương trình (3.162) phải là vi phân chính xác (hoàn chỉnh). Việc này dẫn đến sự khảo sát mật độ năng lượng biến dạng đàn hồi,  $W$ , được viết như một hàm của một mình biến dạng,

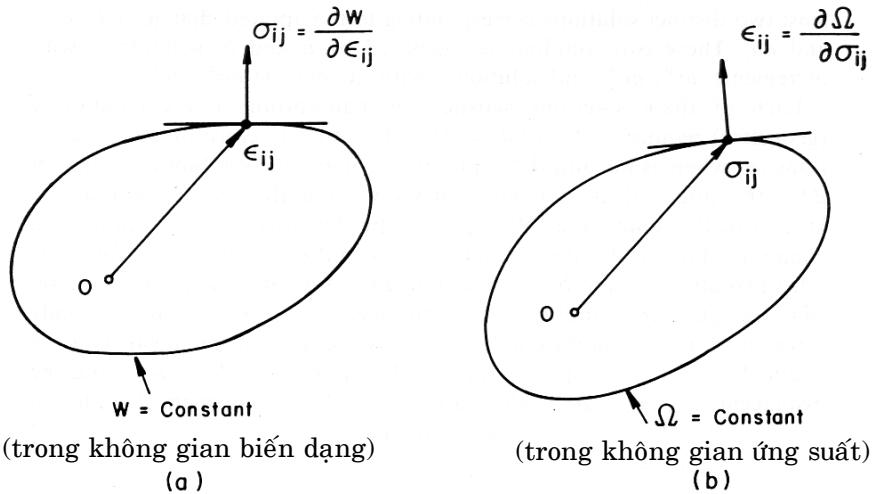
$$W(\varepsilon_{ij}) = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad \text{và} \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

Đây là những quan hệ giống với những quan hệ đã thu được trước đây trong mục 3.3.1 như các phương trình (3.112) và (3.117).

Tương tự, ta có thể thấy rằng định đề ổn định thứ hai dẫn đến sự tồn tại của mật độ năng lượng bù đàn hồi,  $\Omega$ , là hàm của chỉ các ứng suất, như được cho trước đây trong mục 3.3.1 ở các phương trình (3.113) và (3.118).

### 3.6.2. Tính pháp tuyến

### Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi



Hình 3.15. Tính pháp tuyến của (a)  $\sigma_{ij}$  đối với bề mặt  $W = constant$  và (b)  $\epsilon_{ij}$  đối với bề mặt  $\Omega = constant$ .

Như chúng ta biết, hàm  $f(x_i) = constant$  ( $i = 1, 2, 3$ ) biểu diễn một bề mặt trong không gian tọa độ Descartes ba chiều. Pháp tuyến ngoài của bề mặt này ở một điểm tùy ý  $x_i$  là một vector vuông góc với mặt phẳng tiếp tuyến. Độ dốc của  $f$ ,  $\partial f / \partial x_i$ , ở điểm  $x_i$  có phương của pháp tuyến bề mặt này. Do đó, phương trình (3.117),  $\sigma_{ij} = \partial W / \partial \epsilon_{ij}$ , và phương trình (3.118),  $\epsilon_{ij} = \partial \Omega / \partial \sigma_{ij}$ , là những *điều kiện pháp tuyến* trong không gian biến dạng (ứng suất) chín chiều. Phương trình (3.117) phát biểu rằng pháp tuyến ngoài của bề mặt  $W = constant$  ở một điểm đã cho  $\epsilon_{ij}$  biểu diễn vector  $\sigma_{ij}$  tương ứng với  $\epsilon_{ij}$  trong ý nghĩa là thành phần của nó theo hướng của mỗi trục tọa độ biến dạng thì tỷ lệ với thành phần tương ứng của vector pháp tuyến  $\partial W / \partial \epsilon_{ij}$ . Trong hình 3.15a, bề mặt  $W = constant$  được minh họa một cách tượng trưng trong không gian biến dạng chín chiều. Trạng thái biến dạng  $\epsilon_{ij}$  được biểu diễn bởi một điểm trong không gian này. Các thành phần  $\sigma_{ij}$ , tương ứng với các biến dạng  $\epsilon_{ij}$ , được vẽ như một vector tự do trong không gian biến dạng (với  $\sigma_{11}$  như là thành phần theo hướng  $\epsilon_{11}$ , v.v...) với gốc của nó ở điểm biến dạng  $\epsilon_{ij}$ . Vector tự do này luôn vuông góc với bề mặt  $W = constant$  ở điểm biến dạng tương ứng  $\epsilon_{ij}$ . Tính pháp tuyến của  $\epsilon_{ij}$  đối với bề mặt  $\Omega = constant$  được biểu thị trong hình 3.15b.

#### 3.6.3. Tính lôî

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

Như đã được bàn luận trước đây, đối với các vật liệu đàn hồi, định đê ổn định thứ hai ngụ ý rằng các quan hệ cơ sở luôn là loại *Green* (siêu đàn hồi) như được mô tả bởi các phương trình (3.117) và (3.118). Hơn nữa, các quan hệ này phải thỏa mãn yêu cầu ổn định thứ nhất, bất phương trình (3.160), nó áp đặt các điều kiện bổ sung vào dạng tổng quát của các phương trình cơ sở.

Hãy khảo sát các quan hệ cơ sở được cho bởi phương trình (3.117). Các thành phần gia số ứng suất  $\dot{\sigma}_{ij}$  có thể được biểu diễn theo các gia số biến dạng  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  bởi phép đạo hàm; nghĩa là,

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon}_{kl} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (3.163)$$

Thay  $\dot{\sigma}_{ij}$  từ phương trình này vào điều kiện ổn định (3.160), ta thu được

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{kl} > 0 \quad (3.164a)$$

Nghĩa là, dạng bậc hai  $(\partial^2 W / \partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}) \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{kl}$  phải xác định dương đối với các giá trị tùy ý của các thành phần  $\dot{\varepsilon}_{ij}$ . Bất phương trình (3.164a) có thể được viết lại dưới dạng thuận tiện khác như

$$H_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{kl} > 0 \quad (3.164b)$$

ở đây  $H_{ijkl}$  là *tensor* bậc bốn được cho bởi

$$H_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \quad (3.165)$$

Như có thể thấy được từ phương trình (3.165), *tensor*  $H_{ijkl}$  thỏa mãn các điều kiện đối xứng ( $\varepsilon_{ij}$  có tính đối xứng):

$$H_{ijkl} = H_{jilk} = H_{ijlk} = H_{klij}$$

Do đó, sẽ chỉ có 21 thành phần độc lập trong  $H_{ijkl}$ .

### Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi

Về mặt toán học, ma trận của các thành phần  $H_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}$  được gọi là ma trận *Hessian* của hàm  $W$ . Khi  $\varepsilon_{ij}$  được biểu diễn dưới dạng *vector* với sáu thành phần, như được định nghĩa trong phương trình (3.98), thế thì các phần tử của ma trận *Hessian* đối với  $W$  được viết như

$$[H] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_x^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_y} & \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_z} & \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{xy}} & \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{yz}} & \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{zx}} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_y^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_y \partial \varepsilon_z} & \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_y \partial \gamma_{xy}} & \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_y \partial \gamma_{yz}} & \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_y \partial \gamma_{zx}} & \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_z^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_z \partial \gamma_{xy}} & \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_z \partial \gamma_{yz}} & \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_z \partial \gamma_{zx}} & & \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{xy}^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{xy} \partial \gamma_{yz}} & \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{xy} \partial \gamma_{zx}} & & & \\ \text{đối} & \text{xứng} & & \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{yz}^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{yz} \partial \gamma_{zx}} & \\ & & & & \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{zx}^2} & \end{bmatrix} \quad (3.165)$$

và điều kiện (3.164b) đòi hỏi  $[H]$  xác định dương.

Mặt khác, bất phương trình (3.160) có thể được viết theo  $\Omega$  và  $\sigma_{ij}$ . Do đó, bằng cách dùng các phương trình (3.118) và theo thủ tục tương tự như được phác thảo ở trên, cuối cùng ta thu được

$$H'_{ijkl} \dot{\sigma}_{ij} \dot{\sigma}_{kl} > 0 \quad (3.167)$$

ở đây

$$H'_{ijkl} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \quad (3.168)$$

và các phần tử của ma trận *Hessian* đối với  $\Omega$  có dạng tương tự như các phần tử của ma trận *Hessian* đối với  $W$  trong phương trình (3.166) với  $W$ ,  $\varepsilon$ , và  $\gamma$  được thay thế lần lượt bởi  $\Omega$ ,  $\sigma$ , và  $\tau$ .

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

Từ những phương trình (3.164) và (3.167), chúng ta kết luận rằng các bề mặt tương ứng với  $W$  và  $\Omega$  bằng hằng trong không gian biến dạng và không gian ứng suất, có tính lồi. Điều này có thể được chứng minh bằng toán học như sau. Khảo sát hai vector ứng suất khác nhau  $\sigma_{ij}^a$  và  $\sigma_{ij}^b$  trong không gian ứng suất chín chiều. Hiệu  $\Omega(\sigma_{ij}^b) - \Omega(\sigma_{ij}^a)$  có thể được xấp xỉ bởi khai triển chuỗi Taylor (bằng cách bỏ qua các số hạng bậc cao):

$$\Omega(\sigma_{ij}^b) - \Omega(\sigma_{ij}^a) = \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{\sigma_{ij}^a} \Delta \sigma_{ij} + \frac{1}{2} \left[ H'_{ijkl} \right]_{\sigma_{ij}^a} \Delta \sigma_{ij} \Delta \sigma_{kl} \quad (3.169)$$

ở đây  $\Delta \sigma_{ij} = (\sigma_{ij}^b - \sigma_{ij}^a)$  và  $[H'_{ijkl}]_{\sigma_{ij}^a}$  = ma trận *Hessian* của  $\Omega$  được tính toán ở  $\sigma_{ij}^a$ .

Số hạng thứ hai ở vế phải của phương trình (3.169) là xác định dương. [xem phương trình (3.167)]. Do đó, ta có thể viết

$$\Omega(\sigma_{ij}^b) - \Omega(\sigma_{ij}^a) > \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{\sigma_{ij}^a} (\sigma_{ij}^b - \sigma_{ij}^a) \quad (3.170)$$

đây là điều kiện đối với tính lồi nghiêm ngặt của  $\Omega(\sigma_{ij})$ . Tương tự, tính lồi của  $W(\varepsilon_{ij})$  cũng có thể được chứng minh.

Các hạn chế được áp đặt bởi định đề ổn định vật liệu của *Drucker* và các hàm ý của chúng bây giờ được tóm tắt như sau:

1. Các hàm năng lượng biến dạng  $W$  và năng lượng bù  $\Omega$  tồn tại và luôn xác định dương. Điều này tương ứng được rút ra từ đặc tính xác định dương của các ma trận *Hessian* của chúng,  $[H]$  và  $[H']$ , và phù hợp với yêu cầu của các định luật bhiệt động lực học.
2. Ứng suất  $\sigma_{ij}$  và biến dạng  $\varepsilon_{ij}$  lần lượt vuông góc với bề mặt  $W = constant$  và  $\Omega = constant$ .
3. Các bề mặt tương ứng với  $W = constant$  và  $\Omega = constant$  lần lượt trong không gian biến dạng và ứng suất có tính lồi.

### Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng dàn hồi

4. Hơn nữa, tính xác định dương của  $[H]$  và  $[H']$  đảm bảo rằng một phép nghịch đảo duy nhất của các quan hệ cơ sở luôn tồn tại. Nghĩa là, đối với phương trình cơ sở bất kỳ  $\sigma_{ij} = F(\varepsilon_{ij})$  được dựa trên hàm giả định đối với  $W$ , quan hệ nghịch đảo duy nhất  $\varepsilon_{ij} = F^{-1}(\sigma_{ij})$  luôn có thể thu được.

#### 3.6.3. Tính đơn nhất

Khảo sát một vật thể vật liệu dàn hồi có thể tích  $V$  và diện tích bề mặt  $A$ . Phần diện tích bề mặt có tải bề mặt tác động được ký hiệu bởi  $A_T$ , và phần diện tích bề mặt có chuyển vị cưỡng bức được ký hiệu bởi  $A_u$  (xem hình 3.7a). Khi các lực thể tích  $F_i$  và các lực bề mặt  $T_i$  tác động lên vật thể, các ứng suất, biến dạng, và chuyển vị sinh ra lần lượt được cho bởi  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ , và  $u_i$ . Bây giờ giả sử rằng chúng ta áp đặt những thay đổi nhỏ về các lực tác động và chuyển vị. Những thay đổi này được đặc trưng bởi các gia số  $dT_i$  trên  $A_T$ ,  $dF_i$  trong  $V$ , và  $du_i$  trên  $A_u$ . Vấn đề là nghiên cứu xem các gia số ứng suất  $d\sigma_{ij}$  và biến dạng  $d\varepsilon_{ij}$  có được xác định một cách đơn nhất bởi các gia số của các lực tác động  $dT_i$ ,  $dF_i$ , và  $du_i$  hay không. Nếu không, phải có sự tồn tại ít nhất hai lời giải phân biệt tương ứng với các thay đổi tác động  $dT_i$ ,  $dF_i$ , và  $du_i$ . Hai lời giải này được ký hiệu bởi  $a$  và  $b$ : lời giải  $a$  với các gia số  $d\sigma_{ij}^a$ ,  $d\varepsilon_{ij}^a$ , và lời giải  $b$  với các gia số  $d\sigma_{ij}^b$ ,  $d\varepsilon_{ij}^b$ .

Mỗi lời giải này thỏa các yêu cầu cân bằng và tương thích (hình học). Nghĩa là,  $dT_i$ ,  $dF_i$ , và  $d\sigma_{ij}^a$  cấu thành tập hợp cân bằng, trong khi  $du_i$  và  $d\varepsilon_{ij}^a$  biểu diễn một tập hợp tương thích. Tương tự, tập hợp  $dT_i$ ,  $dF_i$ , và  $d\sigma_{ij}^b$  là khả dĩ tĩnh và tập hợp  $du_i$  và  $d\varepsilon_{ij}^b$  là khả dĩ động. Do tính tuyến tính của các phương trình cân bằng, các phương trình (3.70), hiệu giữa hai tập hợp lời giải khả dĩ tĩnh,  $a$  và  $b$ , cũng là một tập hợp khả dĩ tĩnh; nghĩa là, tập hợp  $(d\sigma_{ij}^a - d\sigma_{ij}^b)$ , tương ứng với các lực bề mặt bằng zero trên  $A_T$  và các lực thể tích bằng zero trong  $V$ , là một tập hợp cân bằng. Tương tự, do tính tuyến tính của các quan hệ ứng suất–biến dạng, các phương trình (3.71), các biến dạng,  $(d\varepsilon_{ij}^a - d\varepsilon_{ij}^b)$ , và các chuyển vị  $(du_i^a - du_i^b)$ , chúng bằng zero trên  $A_u$ , là khả dĩ động, và do đó tạo thành tập hợp tương thích. Áp dụng nguyên lý công ảo cho hai tập hợp “hiệu” này, ta thu được

## Lý thuyết đeo kĩ thuật

$$\int_V (d\sigma_{ij}^a - d\sigma_{ij}^b)(d\varepsilon_{ij}^a - d\varepsilon_{ij}^b) dV = 0 \quad (3.171)$$

Trạng thái ứng suất "hiệu"  $(d\sigma_{ij}^a - d\sigma_{ij}^b)$  có thể được khảo sát như là một tác động bên ngoài tạo ra biến dạng tương ứng  $(d\varepsilon_{ij}^a - d\varepsilon_{ij}^b)$ . Định đề ổn định cơ bản, bất phương trình (3.160), sẽ đem lại

$$(d\sigma_{ij}^a - d\sigma_{ij}^b)(d\varepsilon_{ij}^a - d\varepsilon_{ij}^b) > 0 \quad (3.172)$$

Nghĩa là, hàm bị tích phân trong phương trình (3.171) luôn dương. Do đó, tích phân của phương trình (3.171) có thể bằng zero nếu và chỉ nếu hàm bị tích phân bằng zero ở mỗi điểm trong vật thể. Do đó,

$$(d\sigma_{ij}^a - d\sigma_{ij}^b)(d\varepsilon_{ij}^a - d\varepsilon_{ij}^b) = 0 \quad (3.173)$$

nó được thỏa khi hoặc  $d\sigma_{ij}^a = d\sigma_{ij}^b$  hoặc  $d\varepsilon_{ij}^a = d\varepsilon_{ij}^b$ . Tuy nhiên, đối với các vật liệu đàn hồi ổn định, trạng thái ứng suất (hoặc biến dạng) được xác định một cách đơn nhất bởi trạng thái biến dạng (hoặc ứng suất). Do đó,  $d\sigma_{ij}^a = d\sigma_{ij}^b$  ngụ ý rằng  $d\varepsilon_{ij}^a = d\varepsilon_{ij}^b$ , và tính đơn nhất được thiết lập.

### 3.7. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng gia số

Loại hình thành công thức này thường được dùng để mô tả ứng xử cơ học của loại vật liệu mà trạng thái ứng suất phụ thuộc vào trạng thái biến dạng hiện hành cũng như vào lộ trình ứng suất đã được theo đuổi để đạt đến trạng thái này. Tổng quát, các quan hệ cơ sở gia số được viết như

$$\dot{\sigma}_{ij} = F_{ij}(\dot{\varepsilon}_{kl}, \sigma_{mn}) \quad (3.174)$$

trong đó  $\dot{\sigma}_{ij}$  và  $\dot{\varepsilon}_{kl}$  lần lượt là các tensor gia số ứng suất và biến dạng, và  $F_{ij}$  là các hàm tensor. Đối với các vật liệu đẳng hướng độc lập với thời gian, theo Chen (1982) và Chen và Saleeb (1982), biểu thức bên về phải của phương trình (3.174) là một hàm tuyến tính của các thành phần  $d\varepsilon_{kl}$  của tensor gia số biến dạng. Thế rồi các quan hệ cơ sở của phương trình (3.174) có thể được viết dưới dạng tuyến tính theo gia số

$$d\sigma_{ij} = C_{ijk\ell}(\sigma_{mn})d\varepsilon_{kl} \quad (3.175)$$

### Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi

trong đó *tensor* đáp ứng vật liệu  $C_{ijkl}(\sigma_{mn})$  là hàm của các thành phần của *tensor* ứng suất. Ứng xử được mô tả bởi các phương trình (3.175) là có thể nghịch đảo vi phân (hoặc *gia số*). Điều này biện minh cho việc sử dụng tiền tố *hypo* trong thuật ngữ *hypoelastic* (hoặc đàn hồi cực tiểu) để mô tả các quan hệ cơ sở (3.175).

Ứng xử của vật liệu *hypoelastic*, nói chung, phụ thuộc lô trình (phụ thuộc lịch sử ứng suất hay biến dạng). Phép tích phân của các phương trình vi phân (3.175) đối với các lô trình ứng suất và điều kiện ban đầu khác nhau rõ ràng dẫn đến các quan hệ ứng suất–biến dạng khác nhau.

*Tensor*  $C_{ijkl}$  thường được gọi là *tensor* độ cứng tiếp tuyến của vật liệu. Dạng tổng quát nhất của  $C_{ijkl}$  đối với các vật liệu đẳng hướng độc lập với thời gian đã thu được như là một hàm đa thức của các bất biến ứng suất với mười hai hệ số vật liệu [xem Chen (1982) và Chen và Saleeb (1982)]. Một đặc tính quan trọng được trình bày là *tính bất đẳng hướng do ứng suất hay biến dạng*. Tính đẳng hướng ban đầu của vật liệu bị phá hủy, đưa đến độ cứng gia số bất đẳng hướng. Như là kết quả của tính bất đẳng hướng được gây ra, có sự kết nối giữa đáp ứng thể tích và tác động lệch. Hơn nữa, các phương chính của các *tensor* ứng suất gia số và *tensor* biến dạng gia số không trùng nhau. Tính bất đẳng hướng do ứng suất và các hiệu ứng kết nối là những điểm đặc trưng quan trọng trong việc mô hình ứng xử của các vật liệu thực, chẳng hạn như bê tông và đất, đối với chúng sự giãn nở và độ nén không đàn hồi là những hiệu ứng chi phối.

Gần đây, các loại quan hệ cơ sở gia số đặc biệt khác nhau đã được sử dụng một cách rộng rãi trong việc mô hình hóa ứng suất phi tuyến của nhiều vật liệu kỹ thuật khác nhau. Chủ yếu, các mô hình này được phát triển trên cơ sở của các kỹ thuật điều chỉnh đường cong. Các thí dụ của các mô hình này có thể được tìm thấy trong các quyển sách của Chen (1982) và Chen và Saleeb (1982).

#### 3.8. Tóm tắt

Chương này đề cập đến các quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật rắn đẳng hướng đàn hồi. Các quan hệ ứng suất–biến dạng tuyến tính được biểu diễn bởi định luật *Hooke* tổng quát hóa, nó thì đơn giản và quen thuộc nhất đối với chúng ta, trong khi các quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi phi tuyến, chúng phức tạp hơn nhiều, nói chung được phân loại như các quan hệ ứng suất–biến dạng tổng và gia số.

## Lý thuyết dẻo kĩ thuật

Có hai loại của các quan hệ ứng suất–biến dạng tổng: *loại Cauchy* và *loại Green*. Các quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi *Cauchy* có dạng

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{k\ell})$$

nó thể hiện đáp ứng một–một giữa ứng suất  $\sigma_{ij}$  và biến dạng  $\varepsilon_{ij}$ . Do đó, ứng suất và biến dạng là có thể nghịch đảo và độc lập với lộ trình. Các mô hình được sử dụng thông thường nhất của loại này được hình thành công thức bởi những hiệu chỉnh đơn giản của các quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi đẳng hướng được dựa trên các *modulus cắt* (thí dụ,  $E_s$ ,  $v_s$ ,  $K_s$ , và  $G_s$ ). Thường, các thông số vật liệu trong những mô hình này đã được định nghĩa rõ các quan hệ vật lý cho ứng xử ứng suất–biến dạng khảo sát được của vật liệu, và chúng có thể dễ dàng được xác định từ các số liệu thí nghiệm. Tuy nhiên, tính thuận nghịch và tính độc lập với lộ trình của các hàm mật độ năng lượng biến dạng  $W$  và năng lượng bù  $\Omega$  nói chung không được đảm bảo. Nghĩa là, các định luật nhiệt động lực học có thể bị vi phạm do các mô hình có thể phát sinh năng lượng đối với một số lộ trình ứng suất đặt và cắt tải. Để thỏa mãn các định luật nhiệt động lực học, các điều kiện bổ sung phải được áp đặt.

Các quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi *Green* có dạng

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad \text{hay} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}}$$

Các mô hình của loại này thỏa các định luật nhiệt động lực học do các hàm  $W$  và  $\Omega$  *độc lập với lộ trình*. Ngoài ra, các ứng suất  $\sigma_{ij}$  và biến dạng  $\varepsilon_{ij}$  có thể nghịch đảo và độc lập với lộ trình. Hơn nữa, *tính đơn nhất* của các ứng suất và biến dạng trong bài toán giá trị biên được thỏa nếu chúng ta áp đặt hạn chế về *tính lồi* (nghĩa là, *tính xác định dương*) trên các hàm năng lượng  $W$  và  $\Omega$ . Các dạng hàm khác nhau của  $W$  và  $\Omega$  có thể được chọn để đạt đến các hiện tượng mong muốn của ứng xử các vật liệu.

Các quan hệ ứng suất–biến dạng gia số của vật liệu *hypoelastic* có dạng

$$d\sigma_{ij} = C_{ijk\ell}(\sigma_{mn})d\varepsilon_{k\ell}$$

Các ứng suất và biến dạng được định nghĩa bởi các quan hệ này có thể nghịch đảo dạng gia số. Tuy nhiên, trạng thái ứng suất và trạng thái

### Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi

biến dạng phụ thuộc lô trình. Nói chung, mô hình *hypoelastic* có thể vi phạm các định luật nhiệt động lực học trong một số chu kỳ đặt và cất tải do nó có thể phát sinh năng lượng.

#### Bài tập

3.1. *Tensor* chuyển vị tương đối  $\varepsilon'_{ij}$  ở một điểm được cho như sau:

$$\varepsilon'_{ij} = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,20 & -0,40 \\ -0,20 & 0,25 & -0,15 \\ 0,40 & 0,30 & 0,30 \end{bmatrix}$$

Hãy xác định:

- (a) *Tensor* biến dạng  $\varepsilon_{ij}$ .
- (b) *Tensor* quay  $\omega_{ij}$ .
- (c) Các biến dạng chính  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , và  $\varepsilon_3$ , và các phương chính.
- (d) Đối với phân tố thó theo hướng  $\bar{n} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1/\sqrt{2}\right)$ , hãy tìm *vector* biến dạng  $\hat{\delta}$ , *vector* quay  $\hat{\Omega}$ , và *vector* chuyển vị tương đối  $\hat{\delta}'$ .

3.2. Trạng thái biến dạng ở một điểm được biểu diễn bởi *tensor* biến dạng đã cho  $\varepsilon_{ij}$ .

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} -0,005 & -0,004 & 0 \\ -0,004 & 0,001 & 0 \\ 0 & 0 & 0,001 \end{bmatrix}$$

Hãy xác định:

- (a) *Tensor* biến dạng lệch  $e_{ij}$ .
- (b) Các giá trị của các bất biến  $J'_2$  và  $J'_3$ .
- (c) Sự thay đổi thể tích trên đơn vị thể tích  $\varepsilon_v$ .

3.3. Các thành phần chuyển vị  $u_i$  ở một điểm trong vật thể được cho bởi các thành phần dạng hàm

$$u_1 = 10x_1 + 3x_2, \quad u_2 = 3x_1 + 2x_2, \quad u_3 = 6x_3$$

Hãy chứng tỏ rằng không có sự quay cứng nếu các biến dạng được giả định là nhỏ.

3.4. Hãy xác định các quan hệ trong số các hằng số  $a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1$ , và  $c_2$  để mà các biểu thức sau đây là một trạng thái biến dạng:

$$\varepsilon_x = a_0 + a_1(x^2 + y^2) + (x^4 + y^4)$$

$$\varepsilon_y = b_0 + b_1(x^2 + y^2) + (x^4 + y^4)$$

$$\gamma_{xy} = c_0 + c_1 xy(x^2 + y^2 + c_2)$$

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

$$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

- 3.5. Bằng cách sử dụng phương trình (3.70a) và các quan hệ ứng suất–biến dạng của vật liệu đàn hồi tuyến tính đẳng hướng, hãy chứng tỏ rằng các phương trình cân bằng (3.70a) có thể được viết dưới dạng sau đây

$$u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ji} + \frac{F_i}{G} = 0$$

trong đó  $\nu$  và  $G$  lần lượt là hệ số Poisson và modulus trượt.

- 3.6. Hãy chứng minh các quan hệ sau đây giữa các *modulus* đàn hồi  $E$ ,  $\nu$  và  $K$ ,  $G$ :

$$E = \frac{9KG}{3K+G}; \quad \nu = \frac{3K-2G}{2(3K+G)}$$

- 3.7. Đối với vật liệu đàn hồi tuyến tính đẳng hướng, các thành phần ứng suất,  $\sigma_{ij}$ , ở một điểm được cho bởi

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 10 & 1 & -8 \\ 1 & -6 & 6 \\ -8 & 6 & 20 \end{bmatrix} \text{ ksi}$$

Các hằng số đàn hồi là  $E = 30.000$  ksi và  $\nu = 0,3$ . Hãy xác định:

- (a) Tensor lệch biến dạng,  $e_{ij}$ , ở điểm đã cho.
- (b) Các giá trị của mật độ năng lượng biến dạng,  $W$ , và mật độ năng lượng bù,  $\Omega$ , tương ứng với trạng thái ứng suất đã cho.
- (c) Các biến dạng chính  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ , và  $\varepsilon_3$  ở điểm này.

- 3.8. Một phân tố vật liệu chưa có ứng suất và chưa có biến dạng chịu một lịch sử đặt tải tổ hợp theo những lộ trình đường thẳng kế tiếp nhau trong không gian ( $\sigma$ ,  $\tau$ ) [các đơn vị là psi]:

Lộ trình 1: từ  $(0, 0)$  đến  $(0, 10)$

Lộ trình 2: từ  $(0, 10)$  đến  $(30, 10)$

Lộ trình 3: từ  $(30, 10)$  đến  $(30, -10)$

Lộ trình 4: từ  $(30, -10)$  đến  $(0, 0)$

Phân tố được giả sử là vật liệu đàn hồi phi tuyến đẳng hướng với mật độ năng lượng bù  $\Omega$  được cho như

$$\Omega = a(J_2^3 + J_3^2)$$

ở đây  $a$  là một hằng số vật liệu. Quan hệ ứng suất–biến dạng của nó trong kéo đơn trực là

### Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi

$$10^9 \varepsilon = \left( \frac{\sigma}{1000} \right)^5$$

ở đây  $\sigma$  có đơn vị là psi.

- (a) Hãy xác định biến dạng giãn dài dọc trục và biến dạng trượt ở cuối lô trình 3.
- (b) Hãy tìm tất cả các thành phần biến dạng pháp và tiếp ở cuối các lô trình 1 và 2.
- (c) Hãy vẽ đường cong  $\Omega = \text{constant}$  trong không gian  $(\sigma, \tau)$  đi qua điểm  $(30, 100)$ . Hãy chứng minh bằng giải tích rằng đường cong  $\Omega = \text{constant}$  có tính lồi.
- (d) Hãy chứng minh bằng hình tượng rằng câu trả lời cho phần (b) thỏa điều kiện pháp tuyến (3.118).
- (e) Hãy biến đổi lô trình 1 thành lô trình trong không gian ứng suất chính. Hãy tính toán các biến dạng ở cuối của lô trình này bằng cách dùng các quan hệ ứng suất–biến dạng được biểu thị theo các ứng suất chính, và so sánh kết quả một cách chi tiết với các kết quả thu được theo  $\sigma$  và  $\tau$  trong câu (b).
- (f) Hãy liệt kê tất cả các lô trình đường thẳng trong không gian ứng suất chính của những lô trình đã cho ở trên.
- (g) Hãy vẽ lô trình 2 trong không gian ứng suất chính.

3.9. Khảo sát một vật liệu đàn hồi phi tuyến được dựa trên hàm mật độ bù  $\Omega$  được cho bởi

$$\Omega(l_1, J_2) = al_1^2 + bJ_2^2$$

ở đây  $a$ , và  $b$  là những hằng số vật liệu. Mọi quan hệ ứng suất–biến dạng của vật liệu trong kéo đơn trực được cho bởi

$$10^3 \varepsilon = \frac{\sigma}{10} + \frac{1}{9} \left( \frac{\sigma}{10} \right)^3$$

ở đây  $\sigma$  có đơn vị là ksi.

- (a) Hãy xác định các hằng số  $a$  và  $b$ .
- (b) Hãy viết quan hệ ứng suất–biến dạng của vật liệu đối với trạng thái nén song trực.
- (c) Hãy viết quan hệ ứng suất–biến dạng của vật liệu đối với trạng thái trượt thuần túy.

3.10. Hãy liệt kê và giải thích bằng giải tích và bằng hình tượng các hạn chế được áp đặt bởi định đề ổn định vật liệu của Drucker và các hàm ý đối với vật liệu đàn hồi.