

Chương 3

CÁC MỐI QUAN HỆ ỨNG SUẤT–BIẾN DẠNG ĐÀN HỒI

3.1. Biến dạng

3.2. Quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi đẳng hướng tuyến tính. Định luật *Hooke*

3.3. Quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi đẳng hướng phi tuyến

3.4. Nguyên lý công ảo

3.5. Định đề ổn định *Drucker*

3.6. Tính pháp tuyến, tính lồi và mối quan hệ một–một của vật rắn đàn hồi

3.7. Mối quan hệ ứng suất–biến dạng gia số

Lý thuyết đẻo kỹ thuật

3.1. Biến dạng

3.1.1. Trạng thái biến dạng của điểm

Trong việc phân tích ứng suất, một trạng thái ứng suất ở một điểm có thể được xác định bằng cách xác định vô số *vector* ứng suất tác động lên vô số mặt cắt đi qua điểm ấy. Tương tự, trạng thái biến dạng ở một điểm được xác định như là toàn bộ sự thay đổi chiều dài của các đường vật liệu (các thớ) đi qua điểm đó và cả toàn bộ sự thay đổi góc giữa các cặp đường thẳng tỏa ra từ điểm này.

Tuy nhiên, như sẽ được biết sau này là sự thay đổi chiều dài của đường vật liệu bất kỳ đi qua điểm và sự thay đổi góc giữa hai đường bất kỳ tỏa ra từ điểm này có thể được tính toán một khi những thay đổi chiều dài và thay đổi góc đối với ba đường vật liệu song song với hệ trục tọa độ vuông góc lẫn nhau đi qua điểm này.

Hình 3.1 biểu diễn một phân tố đường vi phân OP tại điểm O ở vị trí gốc chưa biến dạng với chiều dài bằng đơn vị bên trong vật thể. Sau khi biến dạng, phân tố bị dịch chuyển đến vị trí mới $O'P'$, như được biểu diễn trong hình. Chú ý rằng, đối với chiều dài rất ngắn của phân tố đường, và đối với sự biến thiên trơn mịn của các biến dạng trong vùng lân cận của điểm O , phân tố bị dịch chuyển $O'P'$ vẫn thẳng. *Vector chuyển vị tương đối* của điểm P đối với điểm O được biểu thị bởi $\frac{n}{\delta}$, ở đây *vector* $\overline{OP''}$ thì bằng và song song với *vector* \overline{OP} và chỉ số phía trên n biểu thị hướng của phân tố đường OP trước biến dạng. Khảo sát các thớ dài đơn vị theo hướng của các trục tọa độ, x_1 , x_2 , và x_3 , các *vector* chuyển vị tương đối tương ứng đối với những đường này được biểu thị bởi $\frac{1}{\delta}$, $\frac{2}{\delta}$, và $\frac{3}{\delta}$. Như một sự lựa chọn, ta cũng có thể dùng ký hiệu đôi $\frac{x}{\delta}$, $\frac{y}{\delta}$, và $\frac{z}{\delta}$ một cách tương ứng. Cả hai ký hiệu này được dùng có thể thay thế cho nhau trong chương này.

Để tìm mối quan hệ giữa *vector* chuyển vị tương đối $\frac{n}{\delta}$ đối với thớ bất kỳ theo hướng \bar{n} với các *vector* chuyển vị tương đối $\frac{1}{\delta}$, $\frac{2}{\delta}$, và $\frac{3}{\delta}$ đối với ba trục tọa độ, một hình hai chiều sẽ được khảo sát. Điều này là do hình hai chiều dễ hình dung hơn, và sự mở rộng sang không gian ba chiều được thực hiện dễ dàng. Trong hình 3.2, thớ vi phân \bar{n} với chiều dài đơn vị ở điểm O được biểu diễn trong mặt phẳng x_1-x_2 . Các hình chiếu của chiều dài thớ này trên các trục x_1 và x_2 tương ứng là n_1 và n_2 , ở đây n_1 và n_2 là các *cosine* chỉ phương của *vector* \bar{n} . Do đó, từ hình 3.2, và do

Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi

trạng thái đồng nhất của biến dạng khắp miền nhỏ trong miền lân cận kề sát điểm O, ta có

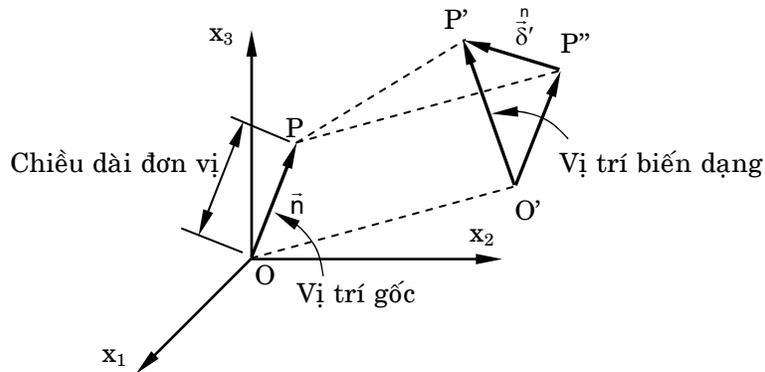
$$\overline{PP'} = \overline{PP_1} + \overline{PP_2}$$

hoặc

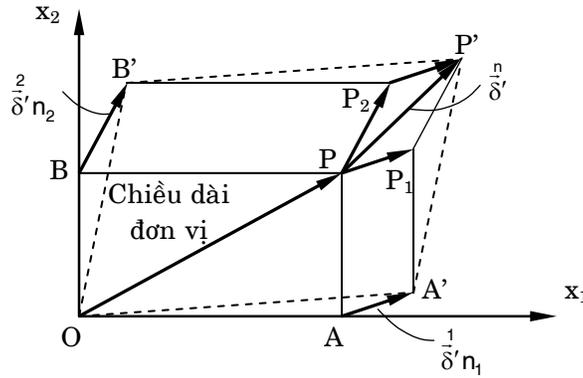
$$\frac{n}{\delta'} = \frac{1}{\delta'} n_1 + \frac{2}{\delta'} n_2 \quad (3.1)$$

Đối với trường hợp ba chiều tổng quát, ta có

$$\frac{n}{\delta'} = \frac{1}{\delta'} n_1 + \frac{2}{\delta'} n_2 + \frac{3}{\delta'} n_3 \quad (3.2)$$



Hình 3.1. Vector chuyển vị tương đối đối với thứ \$\vec{n}\$.



Hình 3.2. Các vector chuyển vị tương đối trong không gian hai chiều.

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

Phương trình (3.2) tương tự với (2.7) cho các ứng suất, nó biểu diễn *vector* ứng suất, $\overset{n}{\tau}$, ở điểm khảo sát tác động trên mặt nghiêng tùy ý có pháp tuyến đơn vị \bar{n} theo các *vector* ứng suất ở điểm đó tác động trên ba mặt phẳng vuông góc với ba trục tọa độ. Tuy nhiên, không giống như ứng suất, trạng thái biến dạng hoặc biến dạng của điểm O không thể được định nghĩa hoàn toàn một cách đơn giản bằng cách xác định ba *vector* chuyển vị tương đối $\overset{1}{\delta}$, $\overset{2}{\delta}$, và $\overset{3}{\delta}$. Chúng ta vẫn phải tách các chuyển vị của vật thể cứng (các thành phần tịnh tiến và quay của toàn bộ vật thể), nếu có thể, ra khỏi các *vector* chuyển vị tương đối do các chuyển vị của vật thể cứng không liên quan đến việc tính biến dạng. Thủ tục tách rời được cho dưới đây đối với trường hợp biến dạng vô cùng bé.

Các *vector* chuyển vị tương đối liên quan đến ba thớ theo các phương trục tọa độ x_1 , x_2 , và x_3 có thể được phân tích thành những thành phần theo ba phương trục tọa độ. Thí dụ, *vector* chuyển vị tương đối $\overset{1}{\delta}$, liên quan đến phương x_1 , có ba thành phần ϵ'_{11} , ϵ'_{12} , và ϵ'_{13} tương ứng theo ba phương trục tọa độ x_1 , x_2 , và x_3 . Do đó, phương trình (3.2) có thể được viết dưới dạng thành phần

$$\overset{n}{\delta}_i = \epsilon'_{ij} \bar{n}_j \quad (3.3)$$

ở đây chín đại lượng vô hướng ϵ'_{ij} cần thiết để định nghĩa ba *vector* chuyển vị tương đối $\overset{1}{\delta}$, $\overset{2}{\delta}$, và $\overset{3}{\delta}$ cấu thành một *tensor*. *Tensor* này, được gọi là *tensor chuyển vị tương đối*, định nghĩa hoàn toàn *vector* chuyển vị tương đối $\overset{n}{\delta}$ của thớ vật liệu \bar{n} bằng cách dùng các ký hiệu kép, *tensor* này có thể được viết như

$$\epsilon'_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon'_{11} & \epsilon'_{12} & \epsilon'_{13} \\ \epsilon'_{21} & \epsilon'_{22} & \epsilon'_{23} \\ \epsilon'_{31} & \epsilon'_{32} & \epsilon'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon'_x & \epsilon'_{xy} & \epsilon'_{xz} \\ \epsilon'_{yx} & \epsilon'_y & \epsilon'_{yz} \\ \epsilon'_{zx} & \epsilon'_{zy} & \epsilon'_z \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Tổng quát, như có thể được thấy từ phương trình (3.4), *tensor* chuyển vị tương đối ϵ'_{ij} không có tính đối xứng.

Chuyển động của vật thể cứng, như đã đề cập ở trên, được đặc trưng bởi thực tế rằng chiều dài của phân tố đường nối hai điểm tùy ý vẫn duy trì không đổi. Trong phần dưới đây, các điều kiện về các hệ số ϵ'_{ij} thỏa yêu

Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi

cầu này đối với chuyển động của vật thể cứng sẽ thu được. Hãy khảo sát phân tố đường $\overline{OP} = \vec{n}$, như được biểu diễn trên hình 3.1, và giả thiết rằng sau chuyển động quay thuận tủy của vật thể cứng, phân tố có vị trí mới $O'P'$ như được biểu diễn. Thế rồi,

$$|\vec{n}|^2 = \left| \vec{n} + \vec{\delta}' \right|^2 = |\vec{n}|^2 + 2|\vec{n}| \left| \vec{\delta}' \right|$$

hoặc

$$n_i n_i = \left(n_i + \delta'_i \right) \left(n_i + \delta'_i \right) = n_i n_i + 2n_i \delta'_i$$

ở đây các số hạng bậc cao của $\vec{\delta}'$ được bỏ qua do các biến dạng là vô cùng nhỏ. Thay $\vec{\delta}'$ từ phương trình (3.3), ta nhận được

$$\vec{n} \vec{\delta}' = n_i \delta'_i = n_i (\varepsilon'_{ij} n_j) = 0$$

hoặc, khi được chép đầy đủ,

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{ji} n_j n_i &= \varepsilon'_{11} n_1 + \varepsilon'_{22} n_2 + \varepsilon'_{33} n_3 + (\varepsilon'_{12} + \varepsilon'_{21}) n_1 n_2 \\ &+ (\varepsilon'_{23} + \varepsilon'_{32}) n_2 n_3 + (\varepsilon'_{31} + \varepsilon'_{13}) n_3 n_1 = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Do phương trình (3.5) phải đúng đối với tất cả các giá trị của $n_1, n_2,$ và n_3 , sự cần thiết và điều kiện đủ đối với *tensor* ε'_{ij} để diễn tả chuyển động quay của vật rắn cứng được cho bởi

$$\varepsilon'_{11} = \varepsilon'_{22} = \varepsilon'_{33} = (\varepsilon'_{12} + \varepsilon'_{21}) = (\varepsilon'_{23} + \varepsilon'_{32}) = (\varepsilon'_{31} + \varepsilon'_{13}) = 0$$

hoặc

$$\varepsilon'_{ij} = -\varepsilon'_{ji} \quad (3.6)$$

Nghĩa là, đối với chuyển động vật thể cứng, *tensor* chuyển vị tương đối ε'_{ij} của phương trình (3.4) có tính phản đối xứng (đối xứng lệch).

Bây giờ, mỗi *tensor* bậc hai có thể được phân tích thành tổng của *tensor* đối xứng và *tensor* phản đối xứng. Do đó, nếu ta phân tích *tensor* ε'_{ij}

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

thành phần đối xứng và phần đối xứng, phần phản đối xứng mô tả sự quay của vật thể cứng, trái lại phần đối xứng mô tả *biến dạng thuần túy*. Do đó, ta có thể viết

$$\varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2}(\varepsilon'_{ij} + \varepsilon'_{ji}) + \frac{1}{2}(\varepsilon'_{ij} - \varepsilon'_{ji}) \quad (3.7)$$

hoặc

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \quad (3.8)$$

ở đây

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\varepsilon'_{ij} + \varepsilon'_{ji}) \quad (3.9)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(\varepsilon'_{ij} - \varepsilon'_{ji}) \quad (3.10)$$

Khai triển cả hai *tensor* ε_{ij} và ω_{ij} , ta nhận được

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon'_{11} & \frac{1}{2}(\varepsilon'_{12} + \varepsilon'_{21}) & \frac{1}{2}(\varepsilon'_{13} + \varepsilon'_{31}) \\ \frac{1}{2}(\varepsilon'_{21} + \varepsilon'_{12}) & \varepsilon'_{22} & \frac{1}{2}(\varepsilon'_{23} + \varepsilon'_{32}) \\ \frac{1}{2}(\varepsilon'_{31} + \varepsilon'_{13}) & \frac{1}{2}(\varepsilon'_{32} + \varepsilon'_{23}) & \varepsilon'_{33} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\omega_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\varepsilon'_{12} - \varepsilon'_{21}) & \frac{1}{2}(\varepsilon'_{13} - \varepsilon'_{31}) \\ \frac{1}{2}(\varepsilon'_{21} - \varepsilon'_{12}) & 0 & \frac{1}{2}(\varepsilon'_{23} - \varepsilon'_{32}) \\ \frac{1}{2}(\varepsilon'_{31} - \varepsilon'_{13}) & \frac{1}{2}(\varepsilon'_{32} - \varepsilon'_{23}) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Tensor đối xứng ε_{ij} được gọi là *tensor* biến dạng và *tensor* phản đối xứng ω_{ij} được gọi là *tensor* quay. Bây giờ, nếu ta thay ε'_{ij} từ phương trình (3.8) vào phương trình (3.3), ta thu được

$$\delta'_i = \varepsilon_{ji} n_j + \omega_{ji} n_j \quad (3.13)$$

Phần thứ hai của phương trình (3.13) mô tả sự quay của vật thể cứng trái với phần một biểu thị các biến dạng thuần túy.

Vector chuyển vị tương đối tương ứng với biến dạng thuần được gọi là *vector biến dạng*. *Vector* biến dạng được ký hiệu bởi $\frac{n}{\delta}$ và được cho bởi

Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi

$$\overset{n}{\delta}_i = \varepsilon_{ij}n_j = \varepsilon_{ij}\overset{n}{n}_j \quad (3.14)$$

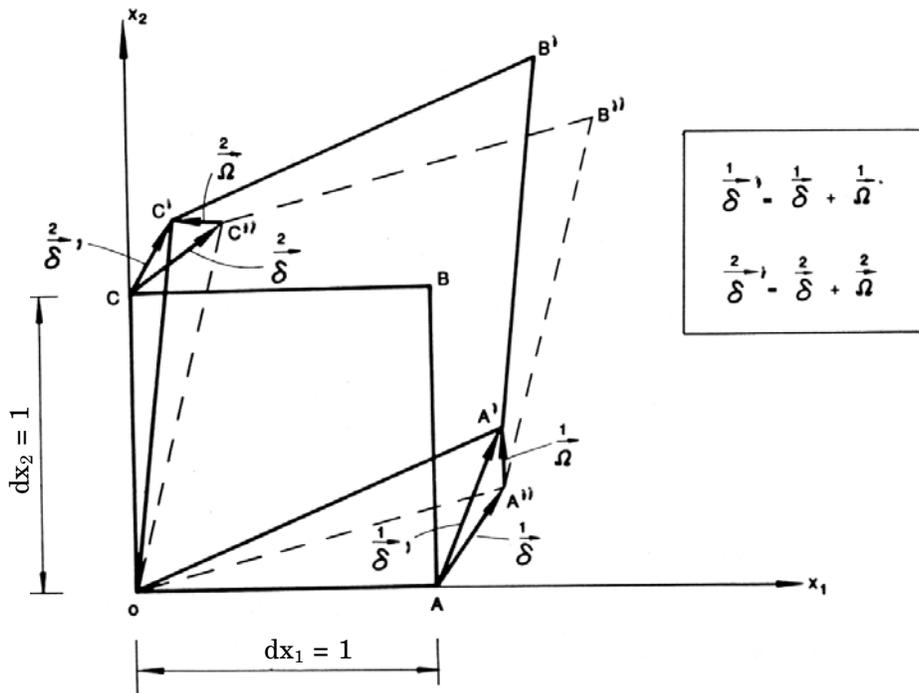
Vector chuyển vị tương đối tương ứng với sự quay của vật thể cứng được gọi là *vector quay*. Vector này được ký hiệu bởi

$$\overset{n}{\Omega}_i = \omega_{ji}n_j = -\omega_{ij}\overset{n}{n}_j \quad (3.15)$$

Đối với biến dạng thuần túy, phương trình (3.2) trở thành

$$\overset{n}{\delta} = \overset{1}{\delta}n_1 + \overset{2}{\delta}n_2 + \overset{3}{\delta}n_3 \quad (3.16)$$

phương trình này biểu diễn *vector* biến dạng đối với thứ tùy ý có phương \bar{n} theo các *vector* biến dạng của ba trục vuông góc lẫn nhau cùng phương với ba trục tọa độ x_1 , x_2 , và x_3 . Do đó, ba *vector* biến dạng $\overset{1}{\delta}$, $\overset{2}{\delta}$, và $\overset{3}{\delta}$ đặc trưng hoàn toàn trạng thái biến dạng ở một điểm.



Hình 3.3. Các vector biến dạng và quay trong trường hợp hai chiều.

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

Các kết quả tách những chuyển vị của vật thể cứng ra khỏi các chuyển vị gây ra biến dạng có thể được hình dung một cách dễ dàng bằng cách khảo sát một hình ảnh hai chiều như hình 3.3. Trong hình này, Các vị trí gốc và cuối cùng của hai thớ thẳng theo phương của các trục x_1 và x_2 được biểu diễn trong mặt phẳng x_1-x_2 . Ta có thể nhận ra vị trí cuối cùng của các thớ thu được từ vị trí cuối cùng bằng cách đặt chồng hai quá trình tách rời của sự biến dạng. Đầu tiên là do biến dạng thuần và thứ hai biểu diễn sự quay của vật thể cứng.

Các công thức trong các phương trình (3.14) và (3.16) hoàn toàn tương tự với các phương trình cho các ứng suất. Do đó, các kết quả tổng quát về biến dạng tương tự với các kết quả về ứng suất có thể được thiết lập.

3.1.2. Các công thức *Cauchy* cho biến dạng

Ở đây, như đối với ứng suất, *vector* biến dạng $\overset{n}{\delta}$ đối với thớ tùy ý \bar{n} có thể được phân tích thành hai thành phần, một theo phương của thớ \bar{n} , được gọi là *biến dạng pháp* hay *biến dạng dài*, và thành phần còn lại nằm trong mặt phẳng vuông góc với thớ, được gọi là *biến dạng trượt* hay *biến dạng góc*. Thí dụ, *vector* biến dạng $\overset{1}{\delta}$ có ba thành phần như sau: biến dạng pháp ε_{11} và các biến dạng trượt ε_{12} và ε_{13} tương ứng theo phương của ba trục tọa độ x_1 , x_2 , và x_3 .

Khảo sát một thớ bất kỳ \bar{n} ở điểm P với *vector* biến dạng $\overset{n}{\delta}$ có thành phần biến dạng pháp ε_n và thành phần biến dạng trượt ε_{ns} , như được biểu diễn trong hình 3.4. *Vector* \bar{n} có ba thành phần (n_1, n_2, n_3) . Độ lớn của thành phần biến dạng pháp ε_n được cho bởi

$$\varepsilon_n = \overset{n}{\delta} \cdot \bar{n} = \delta_i^n n_i \quad (3.17)$$

Thay thế $\overset{n}{\delta}_i$ từ phương trình (3.14) và dùng tính đối xứng của *tensor* ε_{ij} , ta nhận được

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{ij} n_i n_j \quad (3.18)$$

Tương tự, nếu *vector* đơn vị \bar{s} vuông góc với phương \bar{n} có các thành phần (s_1, s_2, s_3) , độ lớn của thành phần biến dạng trượt ε_{ns} được cho bởi

Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi

$$\varepsilon_{ns} = \vec{\delta} \cdot \vec{s} = \delta_i s_i$$

Nhờ vào sự thay thế δ_i từ phương trình (3.14), phương trình trên trở thành

$$\varepsilon_{ns} = \varepsilon_{ij} n_j s_i \quad (3.19)$$

Các phương trình (3.18) và (3.19) là các công thức Cauchy cần thiết để xác định các thành phần biến dạng pháp và trượt đối với thớ tùy ý \vec{n} . Mỗi phương trình trong các phương trình (3.14), (3.16), (3.18) và (3.19) biểu thị dạng riêng biệt của các công thức *Cauchy*, nhưng, thực tế, đối với trạng thái biến dạng đã cho ở một điểm, các phương trình (3.18) và (3.19) là những dạng hữu dụng nhất để thu nhận các thành phần biến dạng pháp và trượt một cách trực tiếp.

3.1.3. Các biến dạng trượt kỹ thuật và biến dạng trượt *tensor*

Các giá trị của các thành phần biến dạng trượt ε_{12} , ε_{13} , và ε_{23} (hoặc ε_{xy} , ε_{xz} , và ε_{yz}) được gọi là các biến dạng trượt *tensor*. Trong nhiều ứng dụng, một định nghĩa kỹ thuật khác đối với các biến dạng trượt thường được dùng. *Biến dạng trượt kỹ thuật*, γ , được định nghĩa như là sự thay đổi góc giữa hai thớ vuông góc với nhau trước khi biến dạng. Do đó, từ hình 3.3 đối với biến dạng thuần túy, ta có

$$\text{Lượng thay đổi góc} = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} = 2\varepsilon_{12}$$

hoặc

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{xy} \quad (3.20)$$

và tương tự đối với $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$ và $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$.

Do đó, *tensor* biến dạng trượt ε_{ij} được viết theo những ký hiệu khác như

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

Các ký hiệu khác nhau trong phương trình (3.21) được dùng có thể hoán đổi nhau để thuận tiện hơn trong một số ứng dụng cụ thể.

3.1.4. Các biến dạng chính

Trong chương phân tích ứng suất, ta đã chứng minh rằng tồn tại ít nhất ba mặt phẳng trực giao lẫn nhau mà trên đó không có ứng suất tiếp tác động, chúng được gọi là các mặt chính và các pháp tuyến của các mặt này được gọi là các trục chính. Trong việc tính toán biến dạng của điểm, những trục chính như thế cũng tồn tại.

Phương chính hoặc trục chính là phương của thứ \bar{n} sao cho *vector* biến dạng $\frac{n}{\delta}$ của nó cùng phương với thứ \bar{n} . Đối với phương như thế, các biến dạng trượt sẽ bằng không. Điều này ngụ ý rằng các thứ theo các phương này chúng vuông góc với nhau trước chuyển động vẫn vuông góc với nhau sau chuyển động. Những biến dạng tương ứng được gọi là các *biến dạng chính*; do đó, đối với phương chính, ta có

$$\frac{n}{\delta} = \varepsilon \bar{n} \quad (3.22)$$

hoặc

$$\delta_i^n = \varepsilon n_i \quad (3.23)$$

Thay δ_i^n từ phương trình (3.14) dẫn đến

$$\varepsilon_{ij} n_j = \varepsilon n_i$$

hay, viết $n_i = \delta_{ij} n_j$ (δ_{ij} là toán tử thay thế), ta nhận được

$$\varepsilon_{ij} n_j = \varepsilon \delta_{ij} n_j \quad (3.24)$$

hoặc

$$(\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}) n_j = 0 \quad (3.25)$$

Điều kiện có nghiệm không bình thường

Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi

$$|\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}| = 0 \quad (3.26)$$

phương trình này tương tự như phương trình tương ứng cho các ứng suất chính, với việc thay thế ứng suất cho biến dạng [xem phương trình (2.33)]. Do đó, tất cả những nhận xét và đạo hàm được thực hiện cho *tensor* ứng suất hoàn toàn có thể áp dụng tại đây. Phương trình (3.26) có thể được viết như

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0 \quad (3.27)$$

phương trình trên có ba nghiệm thực, ε_1 , ε_2 , và ε_3 , tương ứng với ba biến dạng chính.

Phương trình đặc trưng được cho bởi (3.27) có thể được viết dưới dạng

$$\varepsilon^3 - I'_1 \varepsilon^2 + I'_2 \varepsilon - I'_3 = 0 \quad (3.28)$$

ở đây các bất biến biến dạng I'_1 , I'_2 , và I'_3 được cho bởi

$$I'_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_{ii} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} I'_2 &= \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zy} & \varepsilon_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_x \end{vmatrix} \\ &= \text{tổng các phần phụ đại số hai hàng chính của } \varepsilon_{ij} \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} I'_3 &= \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} \\ &= \text{định thức của } \varepsilon_{ij} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

hoặc, theo các biến dạng chính ε_1 , ε_2 , và ε_3 ,

$$\begin{aligned}l'_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\l'_2 &= \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 \\l'_3 &= \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\end{aligned}\tag{3.32}$$

Bằng cách thay các biến dạng chính ε_1 , ε_2 , và ε_3 , như được xác định bằng cách giải phương trình bậc ba (3.28), vào phương trình (3.25), ta tìm được các phương chính biến dạng $\bar{n}^{(1)}$, $\bar{n}^{(2)}$, và $\bar{n}^{(3)}$, như đã được làm cho *tensor* ứng suất. Theo các bước tương tự như khi tính ứng suất, ta có thể thấy rằng các biến dạng chính có các giá trị dừng.

3.1.5. Các biến dạng trượt chính

Các biến dạng trượt đối với một số thứ ở một điểm có những giá trị dừng được gọi là các *biến dạng trượt chính*. Để tìm các phương của các thứ như thế, một thủ tục tương tự như đối với ứng suất được hiện. Hãy khảo sát thứ đường ở điểm P với phương \bar{n} và *vector* biến dạng $\frac{n}{\delta}$ được xem là các trục biến dạng chính. Thành phần biến dạng pháp đối với thứ này là ε_n và độ lớn của thành phần biến dạng trượt tổng được ký hiệu bởi θ_n (biến dạng trượt *tensor*). Do đó,

$$\theta_n^2 = \delta_i^n \delta_i^n - \varepsilon_n^2$$

Thay thế $\frac{n}{\delta}$ và ε_n từ các phương trình (3.14) và (3.18), dưới dạng các thành phần ε_{ij} được xem là các trục chính biến dạng, ta nhận được

$$\theta_n^2 = \left(\varepsilon_{jj} \varepsilon_{kk} n_j n_k \right) - \left(\varepsilon_1 n_1^2 + \varepsilon_2 n_2^2 + \varepsilon_3 n_3^2 \right)^2$$

hoặc

$$\theta_n^2 = \left(\varepsilon_1^2 n_1^2 + \varepsilon_2^2 n_2^2 + \varepsilon_3^2 n_3^2 \right) - \left(\varepsilon_1 n_1^2 + \varepsilon_2 n_2^2 + \varepsilon_3 n_3^2 \right)^2\tag{3.33}$$

So sánh phương trình (3.33) với (2.43), ta nhận thấy chúng có dạng đồng nhất, với S_n được thay thế bởi θ_n và các ứng suất chính bởi các biến dạng chính. Vì thế, các biến dạng trượt chính và các phương tương ứng có thể nhận được một cách chính xác bằng cách thức tương tự như đối

Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi

với ứng suất. Do đó, bằng cách định rõ các biến dạng trượt chính *tensor* θ_1 , θ_2 , và θ_3 , ta có thể viết

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{1}{2}|\varepsilon_2 - \varepsilon_3| \\ \theta_2 &= \frac{1}{2}|\varepsilon_3 - \varepsilon_1| \\ \theta_3 &= \frac{1}{2}|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|\end{aligned}\quad (3.34)$$

và các biến dạng trượt chính kỹ thuật γ_1 , γ_2 , và γ_3 được cho bởi

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= |\varepsilon_2 - \varepsilon_3| \\ \gamma_2 &= |\varepsilon_3 - \varepsilon_1| \\ \gamma_3 &= |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|\end{aligned}\quad (3.35)$$

Biến dạng trượt cực đại là giá trị lớn nhất của các biến dạng trượt chính. Do đó, đối với quy ước $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$, biến dạng trượt cực đại được cho bởi

$$\gamma_{\max} = 2\theta_{\max} = |\varepsilon_1 - \varepsilon_3| \quad (3.36)$$

3.1.6. Các biến dạng bát diện

Thớ bát diện của vật liệu là thớ có phương nghiêng đều so với ba trục biến dạng chính 1, 2, và 3. Các biến dạng pháp và trượt bát diện của thớ bát diện lần lượt được ký hiệu bởi ε_{oct} và γ_{oct} . Đối với một thớ bát diện, *vector* đơn vị \bar{n} có các thành phần $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Do đó, từ phương trình (3.18), biến dạng pháp bát diện ε_{oct} được cho bởi

$$\varepsilon_{\text{oct}} = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \frac{l_1}{3} \quad (3.37)$$

công thức trên miêu tả giá trị trung bình của ba biến dạng chính.

Biến dạng trượt bát diện, γ_{oct} , với định nghĩa biến dạng trượt kỹ thuật, có thể thu được từ phương trình (3.33), với $\gamma_{\text{oct}} = 2\theta_{\text{oct}}$. Do đó,

$$\gamma_{\text{oct}} = \frac{2}{3} \left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 \right]^{1/2} \quad (3.38)$$

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

Biến dạng trượt bất diện cũng có thể được viết dưới dạng các bất biến biến dạng như

$$\gamma_{\text{oct}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} (I_1^2 - 3I_2')^{1/2} \quad (3.39)$$

và theo các biến dạng tổng quát, nó trở thành

$$\gamma_{\text{oct}} = \frac{2}{3} \left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + 6(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2) \right]^{1/2} \quad (3.40)$$

nó biểu diễn biến dạng trượt bất diện theo các thành phần biến dạng trong hệ trục tọa độ bất kỳ x, y, và z.

3.1.7. Tensor lệch biến dạng

Như trong trường hợp của *tensor* ứng suất, *tensor* biến dạng ε_{ij} có thể được phân tích thành hai phần, phần cầu liên quan đến sự thay đổi thể tích, và phần lệch liên quan đến sự thay đổi hình dáng (sự méo mó). Nghĩa là,

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (3.42)$$

ở đây e_{ij} được định nghĩa như là *tensor biến dạng lệch* và $\frac{1}{3} \varepsilon_{kk} = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)/3$ là *biến dạng trung bình* hay *biến dạng thủy tĩnh*. Do đó, *tensor* biến dạng lệch e_{ij} trở thành

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2\varepsilon_x - \varepsilon_y - \varepsilon_z)/3 & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & (2\varepsilon_y - \varepsilon_z - \varepsilon_x)/3 & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & (2\varepsilon_z - \varepsilon_x - \varepsilon_y)/3 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

hoặc, các biến dạng chính,

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} (2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3)/3 & 0 & 0 \\ 0 & (2\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_1)/3 & 0 \\ 0 & 0 & (2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)/3 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi

Chú ý rằng điều kiện đối với trạng thái biến dạng trượt thuần tương tự với đối với trạng thái ứng suất trượt thuần túy; nghĩa là, điều kiện cần và đủ cho trạng thái biến dạng trượt thuần túy là $\varepsilon_{kk} = 0$. Điều này dẫn đến e_{ij} là trạng thái trượt thuần và e_{ij} và ε_{ij} có cùng các trục chính.

Nếu ta khảo sát một hình lập phương đơn vị với các cạnh hướng dọc theo các trục chính biến dạng, 1, 2, và 3, thì sau khi biến dạng, do không có biến dạng đối với các trục chính, ba trục này vẫn vuông góc lẫn nhau sau biến dạng; hình lập phương trở thành hình hộp chữ nhật với các cạnh $(1 + \varepsilon_1)$, $(1 + \varepsilon_2)$, và $(1 + \varepsilon_3)$. Sự thay đổi thể tích tương đối (hay sự thay đổi thể tích trên đơn vị thể tích), ε_v , được cho bởi

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - 1 \quad (3.45)$$

Đối với biến dạng nhỏ,

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = I'_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (3.46)$$

Do đó, phần cầu của *tensor* biến dạng tương ứng với sự thay đổi thể tích $\varepsilon_v = \varepsilon_{kk}$. Sự thay đổi thể tích, ε_v , được cho trong phương trình (3.46) được gọi là *sự giãn nở* hay đơn giản là *sự thay đổi thể tích*.

Các bất biến của *tensor* lệch biến dạng e_{ij} giống với các kết quả nhận được cho *tensor* lệch ứng suất s_{ij} . Các bất biến biến dạng lệch này xuất hiện trong phương trình bậc ba của phương trình định thức $|e_{ij} - e\delta_{ij}| = 0$.

$$e^3 - J'_1 e^2 + J'_2 e - J'_3 = 0 \quad (3.47)$$

ở đây

$$J'_1 = e_{ii} = e_x + e_y + e_z = e_1 + e_2 + e_3 = 0 \quad (3.48)$$

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

$$\begin{aligned}
 J'_2 &= \frac{1}{2} \mathbf{e}_{ij} \mathbf{e}_{ij} = -(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1) \\
 &= \frac{1}{6} \left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 \right] + \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2 \\
 &= \frac{1}{6} \left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} (\mathbf{e}_x^2 + \mathbf{e}_y^2 + \mathbf{e}_z^2 + 2\mathbf{e}_{xy}^2 + 2\mathbf{e}_{yz}^2 + 2\mathbf{e}_{zx}^2)
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

$$J'_3 = \frac{1}{3} \mathbf{e}_{ij} \mathbf{e}_{jk} \mathbf{e}_{ki} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_{xy} & \mathbf{e}_{xz} \\ \mathbf{e}_{yx} & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_{yz} \\ \mathbf{e}_{zx} & \mathbf{e}_{zy} & \mathbf{e}_z \end{vmatrix} = \frac{1}{3} (\mathbf{e}_1^3 + \mathbf{e}_2^3 + \mathbf{e}_3^3) = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \tag{3.50}$$

trong đó \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , và \mathbf{e}_3 là các giá trị chính của *tensor* biến dạng lệch. Ta cũng có thể thấy rằng các bất biến J'_1 , J'_2 , và J'_3 được liên hệ với các bất biến biến dạng, I'_1 , I'_2 , và I'_3 , thông qua các quan hệ sau:

$$\begin{aligned}
 J'_1 &= 0 \\
 J'_2 &= \frac{1}{3} (I_1'^2 - 3I_2'^2) \\
 J'_3 &= \frac{1}{27} (2I_1'^3 - 9I_1' I_2' + 27I_3')
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Cuối cùng, ta có thể thấy rằng biến dạng trượt bát diện γ_{oct} được liên hệ với bất biến thứ hai của *tensor* biến dạng lệch, J'_2 , như đối với trường hợp ứng suất:

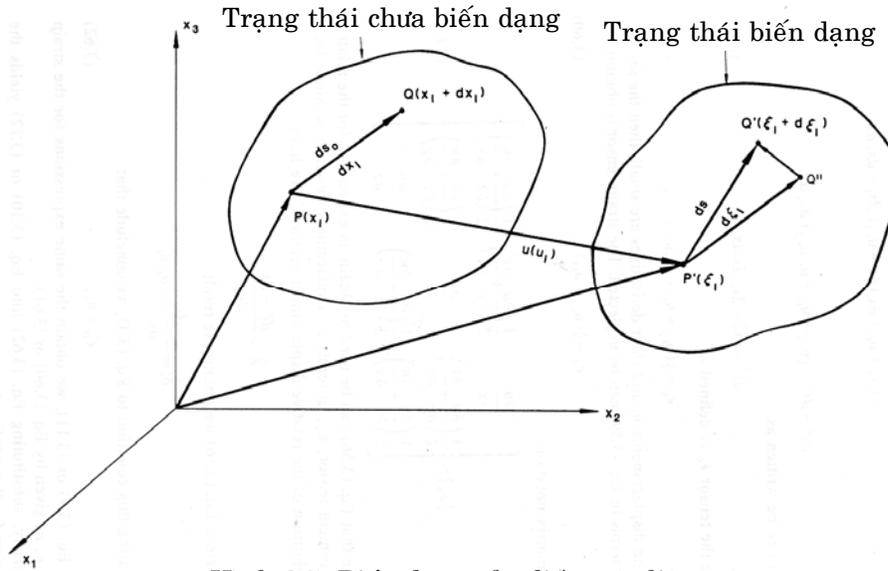
$$\gamma_{\text{oct}} = 2\sqrt{\frac{2}{3} J'_2} \tag{3.52}$$

3.1.8. Các mối quan hệ biến dạng–chuyển vị

Ký hiệu các tọa độ của điểm vật liệu P trong vật thể ở vị trí ban đầu (chưa biến dạng) là \mathbf{x}_i (x_1 , x_2 , x_3) đối với hệ trục cố định \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 , và \mathbf{x}_3 , như được biểu diễn trong hình 3.5. Các tọa độ của điểm này sau khi biến dạng được ký hiệu ξ_i (ξ_1 , ξ_2 , ξ_3) đối với các trục tọa độ \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 , và \mathbf{x}_3 . Hình 3.5 biểu thị hai điểm lân cận P và Q với các tọa độ tương ứng trước biến dạng là \mathbf{x}_i và $\mathbf{x}_i + d\mathbf{x}_i$, và chiều dài của phân tố PQ được ký hiệu bởi ds_0 . Sau biến dạng, hai điểm bị dịch chuyển đến các điểm P' và Q' với các

Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi

tọa độ tương ứng là ξ_i và $\xi_i + d\xi_i$, và chiều dài của phân tố P'Q' trở thành ds . Vector chuyển vị của P được ký hiệu bởi u_i , như được biểu diễn trên hình. Do đó, ta có



Hình 3.5. Biến dạng của điểm vật liệu.

$$ds_0^2 = dx_i dx_i \quad (3.53)$$

$$ds^2 = d\xi_i d\xi_i \quad (3.54)$$

và

$$\xi_i = x_i + u_i \quad (3.55)$$

Thế thì

$$d\xi_i = dx_i + u_{i,j} dx_j \quad (3.56)$$

hoặc

$$d\xi_i = (\delta_{ij} + u_{i,j}) dx_j \quad (3.57)$$

ở đây $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$.

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

Rõ ràng đẳng thức của ds^2 và ds_0^2 là điều kiện cần và đủ cho chuyển động của vật thể cứng; vì thế, hiệu $ds^2 - ds_0^2$ có thể được thực hiện như là thước đo của các biến dạng. Từ các phương trình (3.53), (3.54) và (3.57), ta thu được

$$\begin{aligned} ds^2 - ds_0^2 &= d\xi_i d\xi_i - dx_i dx_i = d\xi_r d\xi_r - dx_r dx_r \\ &= (\delta_{ri} + u_{r,i}) dx_i (\delta_{rj} + u_{r,j}) dx_j - dx_r dx_r \end{aligned}$$

hoặc

$$ds^2 - ds_0^2 = (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{r,i} u_{r,j}) dx_i dx_j$$

biểu thức trên có thể được viết lại như

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\varepsilon_{ij} dx_i dx_j \quad (3.58)$$

ở đây *tensor* ε_{ij} được định nghĩa như

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{r,i} u_{r,j}) \quad (3.59)$$

Nếu các chuyển vị u_i và các đạo hàm của chúng nhỏ, thì các số hạng bậc hai trong phương trình (3.59) có thể được bỏ qua. *Tensor* biến dạng cho trường hợp biến dạng bé thu được như

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.60)$$

hoặc trong ký hiệu kỹ thuật

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi

Chú ý rằng phương trình (3.56) có thể được dùng để thu một biểu thức cho *tensor* chuyển vị tương đối, ε'_{ij} , dưới dạng các đạo hàm chuyển vị. Bởi vì từ định nghĩa về *vector* chuyển vị tương đối δ'_i , ta có

$$\delta'_i = \frac{d\xi_i - dx_i}{ds_0}$$

Thế thì, từ phương trình (3.56) ta thu được kết quả

$$\delta'_i = \frac{u_{i,j} dx_j}{ds_0} = u_{i,j} n_j$$

So sánh phương trình này với phương trình (3.3), ta kết luận rằng

$$\varepsilon'_{ji} = u_{i,j} \quad (3.62)$$

Bằng cách dùng phương trình (3.9) hay (3.11), ta nhận được các biểu thức tương tự cho *tensor* biến dạng ε_{ij} như được cho bởi phương trình (3.60) hoặc (3.61).

Tương tự, thay phương trình (3.62) vào phương trình (3.10) hoặc (3.12) sẽ tạo ra biểu thức cho *tensor* quay

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} - u_{i,j}) \quad (3.63)$$

hoặc trong ký hiệu kỹ thuật

$$\omega_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

3.1.9. Ý nghĩa vật lý đối với các biến dạng nhỏ

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

Đối với biến dạng nhỏ, có một ý nghĩa vật lý đơn giản đối với các thành phần biến dạng ε_{ij} . Thí dụ, thành phần biến dạng pháp ε_{11} có thể được hiểu như sau. Hãy khảo sát phân tố đường dx_i nó nằm dọc theo trục x_1 trước khi biến dạng như được biểu thị trong hình 3.6a. Sau khi biến dạng, phân tố được ký hiệu bởi $d\xi_i$. Do đó,, ta có

$$dx_i = (ds_0, 0, 0)$$

Thay dx_i vào trong phương trình (3.58), ta nhận được

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\varepsilon_{ij}dx_i dx_j = 2\varepsilon_{11}dx_1 dx_1 = 2\varepsilon_{11}ds_0^2$$

hay

$$(ds + ds_0)(ds - ds_0) = 2\varepsilon_{11}ds_0^2$$

nó có thể được viết dưới dạng

$$\frac{ds - ds_0}{ds_0} = \left(\frac{2ds_0}{ds + ds_0} \right) \varepsilon_{11}$$

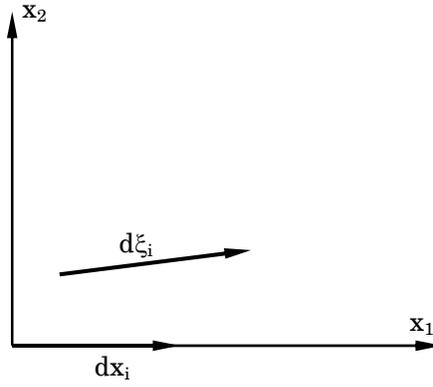
Nhưng đối với biến dạng nhỏ, ds gần bằng với ds_0 ; do đó,

$$\varepsilon_{11} = \frac{ds - ds_0}{ds_0} \quad (3.65)$$

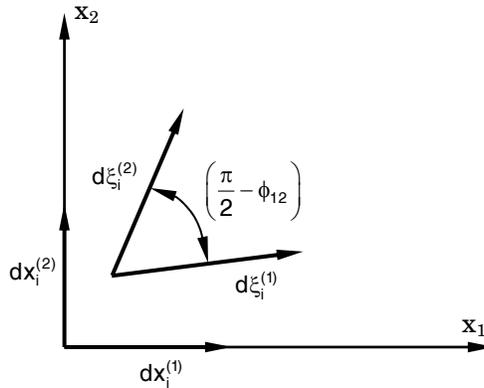
Vì thế, ε_{11} mô tả sự giãn dài hoặc sự thay đổi chiều dài trên đơn vị dài của phân tố đường song song với trục x_1 trước biến dạng. Các thành phần biến dạng ε_{22} và ε_{33} có ý nghĩa tương tự.

Thành phần biến dạng trượt ε_{12} cũng có thể được giải thích bằng cách khảo sát hai phân tố đường $dx_i^{(1)}$ và $dx_i^{(2)}$. Lúc chưa biến dạng chúng lần lượt song song với trục x_1 và x_2 , như được biểu diễn trong hình 3.6b. Ký hiệu lượng giảm tổng góc vuông giữa hai phân tố đường sau biến dạng bởi ϕ_{12} . Do đó, ta có

Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi



(a) Thành phần biến dạng ε_{11}



(b) Thành phần biến dạng ε_{12}

Hình 3.6. Ý nghĩa vật lý của các thành phần biến dạng.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi_{12}\right) = \frac{d\xi_i^{(1)} d\xi_i^{(2)}}{|d\xi_i^{(1)}| |d\xi_i^{(2)}|}$$

Sử dụng phương trình (3.56), ta nhận được

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi_{12}\right) &= \frac{(dx_i^{(1)} + u_{i,k} dx_k^{(1)})(dx_i^{(2)} + u_{i,t} dx_t^{(2)})}{|d\xi_i^{(1)}| |d\xi_i^{(2)}|} \\ &= \frac{dx_i^{(1)} dx_i^{(2)} + (u_{i,k} + u_{k,i} + u_{r,i} u_{r,k}) dx_i^{(1)} dx_k^{(2)}}{|d\xi_i^{(1)}| |d\xi_i^{(2)}|} \end{aligned}$$

Lý thuyết đẻo kỹ thuật

Nhưng $dx_i^{(1)}dx_i^{(2)} = 0$ (vì hai *vector* vuông góc); thế rồi

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi_{12}\right) = \frac{2\varepsilon_{ik} dx_i^{(1)} dx_k^{(2)}}{\left|d\xi_i^{(1)}\right| \left|d\xi_i^{(2)}\right|} = \frac{2\varepsilon_{12}}{(1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22})}$$

Đối với biến dạng nhỏ, đẳng thức trên được rút gọn đến

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi_{12}\right) = 2\varepsilon_{12} \quad (3.66)$$

Nhưng $\cos(\pi - \phi_{12}) \cong \phi_{12}$; do đó, ε_{12} biểu diễn một nửa lượng giảm góc vuông giữa hai phân tố đường song song với hai trục tọa độ x_1 và x_2 trước biến dạng. Các phân tích tương tự có thể được thực hiện đối với các thành phần ε_{13} và ε_{23} . Vì vậy, các số hạng ngoài đường chéo góc trong công thức (3.61) biểu diễn biến dạng trượt. Sự hình dung ý nghĩa vật lý của các đạo hàm riêng phần trong công thức (3.61) dẫn đến sự giải thích tương tự về những lượng giãn dài tỷ đối và những thay đổi góc đã nhận được trước đây một cách tổng quát hơn.

3.1.10. Những phương trình tương thích biến dạng

Trong việc phân tích ứng suất, lý thuyết đã chỉ ra rằng ta phải thiết lập các phương trình cân bằng để đảm bảo vật thể luôn trong trạng thái cân bằng. Tuy nhiên, trong việc phân tích biến dạng, phải có vài điều kiện được áp đặt lên các thành phần biến dạng để vật thể bị biến dạng duy trì sự liên tục. Điều này có thể được minh họa bằng cách khảo sát, thí dụ, phương trình (3.60); cụ thể là,

$$u_{i,j} + u_{j,i} = 2\varepsilon_{ij} \quad (3.67)$$

Đối với các chuyển vị đã cho, u_i , các thành phần biến dạng, ε_{ij} , có thể được xác định từ phương trình (3.67). Mặt khác, đối với các thành phần chuyển vị đã quy định ε_{ij} , phương trình (3.67) biểu diễn hệ các phương trình đạo hàm riêng (vi phân) đối với sự xác định các thành phần chuyển vị u_i . Do có đến sáu phương trình cho ba ẩn hàm u_i , nói chung, ta không thể hy vọng rằng hệ các phương trình (3.67) sẽ có lời giải nếu các thành phần biến dạng ε_{ij} được chọn tùy ý. Do đó, để có hàm chuyển vị u_i liên tục đơn trị, một số hạn chế phải được áp đặt lên các thành phần biến dạng ε_{ij} . Những hạn chế như thế được gọi là những *điều kiện tương*

Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi

thích. Ta có thể thấy rằng các phương trình tương thích cho miền được liên thông đơn giản có thể được viết dưới dạng

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (3.68)$$

hoặc, khai triển các biểu thức này, ta thu được

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (3.69)$$

Sáu phương trình tương thích này là các điều kiện cần và đủ được quy định để đảm bảo rằng các thành phần biến dạng đem lại các chuyển vị liên tục đơn trị cho miền liên thông đơn giản.

3.2. Quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi đẳng hướng tuyến tính. Định luật *Hooke*

3.2.1. Giới thiệu

Hình 3.7a biểu diễn một vật thể đàn hồi thể tích V và diện tích bề mặt A . Phần diện tích bề mặt nơi có các lực kéo bề mặt T_i tác động được ký hiệu bởi A_T và phần diện tích bề mặt nơi có các chuyển vị bề mặt cưỡng bức \bar{u}_i được ký hiệu bởi A_u . Khi các lực thể tích F_i , các lực bề mặt T_i và chuyển vị bề mặt u_i tác động lên vật thể, các ứng suất được gây ra σ_{ij} phải thỏa các phương trình cân bằng

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad \text{trong } V \quad (3.70a)$$

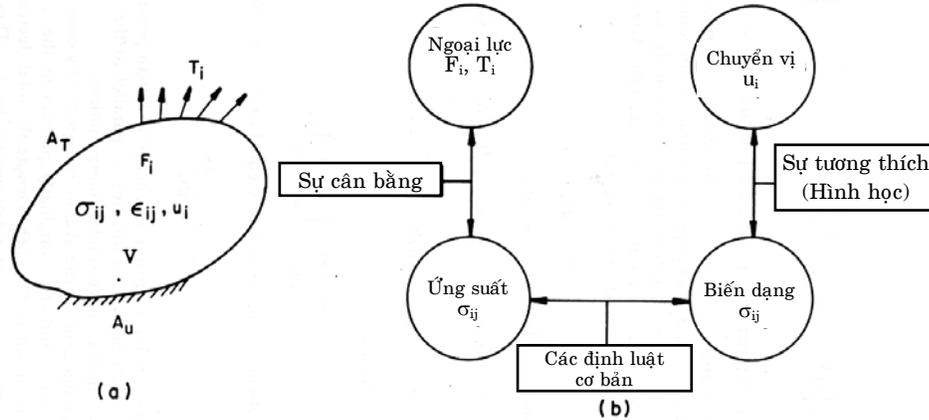
Lý thuyết dẻo kỹ thuật

$$\sigma_{ij}n_j = T_i \quad \text{ở } A_T \quad (3.70b)$$

và các biến dạng hình thành, ϵ_{ij} , và các chuyển vị, u_i , phải thỏa các điều kiện hình học

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{trong } V \quad (3.71a)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{ở } A_u \quad (3.71b)$$



Hình 3.7. Sự thiết lập bài toán cơ học vật rắn.

(a) Các biến; (b) Mối quan hệ của các biến.

Đối với phân tố vật liệu trong thể tích V , ba phương trình cân bằng (3.70a), và sáu phương trình tương thích giữa các biến dạng và các chuyển vị (3.71a), trình bày một tổng chín phương trình chứa mười lăm ẩn số (sáu thành phần ứng suất, sáu thành phần biến dạng, và ba thành phần chuyển vị). Sự bổ sung các phương trình được thực hiện bởi bộ sáu phương trình quan hệ phụ thuộc vật liệu, chúng thiết lập quan hệ giữa ứng suất và biến dạng. Sáu phương trình hay quan hệ bổ sung này được xem là *các phương trình hay quan hệ cơ sở của vật liệu*. Mỗi khi quan hệ cơ sở đối với vật liệu được thiết lập, sự hình thành công thức tổng quát cho việc giải bài toán cơ học vật rắn có thể được hoàn thành. Các mối quan hệ lẫn nhau của các biến (σ_{ij} , ϵ_{ij} và u_i) có thể được minh họa tốt nhất dưới dạng sơ đồ như trong hình 3.7b cho trường hợp bài toán tĩnh.

Vật liệu đàn hồi là vật liệu hồi phục hoàn toàn hình dáng và kích thước ban đầu của nó khi cất tải tác động. Đối với nhiều loại vật liệu ở mức độ

Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi

tải làm việc, phạm vi đàn hồi cũng bao gồm miền mà ứng suất và biến dạng có quan hệ tuyến tính trong suốt miền đó, như chúng ta đã được thấy trước đây trong chương 1. Phần tuyến tính của mối quan hệ ứng suất–biến dạng này kết thúc ở giới hạn tỷ lệ (đàn hồi), và dạng tổng quát của nó được cho bởi

$$\sigma_{ij} = C_{ijk\ell} \varepsilon_{k\ell} \quad (3.72)$$

ở đây $C_{ijk\ell}$ là *tensor hằng số đàn hồi vật liệu*. Cũng có thể được nhận xét ở đây rằng phương trình (3.72) là sự tổng quát hóa đơn giản nhất sự phụ thuộc tuyến tính của ứng suất vào biến dạng đã được khảo sát trong thí nghiệm quen thuộc của *Hooke*, và vì vậy phương trình (3.72) thường được xem như là *định luật Hooke được tổng quát hóa*.

Do cả hai σ_{ij} và $\varepsilon_{k\ell}$ là các *tensor* bậc hai, nên $C_{ijk\ell}$ là *tensor* bậc bốn. Tổng quát, có $(3)^4 = 81$ hằng số cho *tensor* $C_{ijk\ell}$ như thế. Tuy nhiên, do cả hai σ_{ij} và $\varepsilon_{k\ell}$ đều đối xứng, ta có những điều kiện đối xứng như sau:

$$C_{ijk\ell} = C_{jik\ell} = C_{ij\ell k} = C_{ji\ell k} \quad (3.73)$$

Do đó, số lớn nhất các hằng số độc lập được giảm xuống 36.

Đối với vật liệu đàn hồi *Green*, sẽ được chứng tỏ sau này rằng bốn chỉ số của các hằng số đàn hồi có thể được khảo sát như các cặp $C_{(ij)(k\ell)}$. Kết quả là số các hằng số độc lập cần thiết được giảm từ 36 xuống còn 21. Nghĩa là nếu biết 21 hằng số này, thì ta sẽ biết tất cả 81 hằng số. Nếu, thêm vào, ta có một mặt phẳng đối xứng đàn hồi, số các hằng số đàn hồi độc lập sẽ được giảm nhiều hơn từ 21 xuống còn 13. Nếu có mặt phẳng đối xứng đàn hồi thứ hai vuông góc với mặt phẳng đối xứng thứ nhất, số các hằng số đàn hồi độc lập còn được giảm nhiều hơn nữa. Mặt phẳng đối xứng thứ hai cũng hàm ý đối xứng quanh mặt phẳng vuông góc thứ ba (đối xứng trục hướng) và số các hằng số đàn hồi được giảm còn 9. Đối với vật liệu đẳng hướng ngang, số các hằng số đàn hồi được giảm còn 5. Hơn nữa, nếu ta định rõ đối xứng bậc ba, nghĩa là, các đặc tính dọc theo các hướng x , y , và z giống nhau, khi ấy ta không thể phân biệt giữa các hướng x , y , và z . Điều này dẫn đến chỉ cần có ba hằng số độc lập để mô tả ứng xử đàn hồi của vật liệu như thế. Cuối cùng, nếu ta có vật rắn mà các đặc tính đàn hồi của nó không là hàm của các hướng, lúc đó ta chỉ cần hai hằng số độc lập để mô tả ứng xử của nó.

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

3.2.2. Các quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi tuyến tính đẳng hướng

Đối với vật liệu đẳng hướng, các hằng số đàn hồi trong phương trình (3.72) phải giống nhau cho tất cả các hướng. Do đó, *tensor* C_{ijkl} phải là *tensor* bậc bốn đẳng hướng. Điều này cho thấy rằng dạng tổng quát nhất cho *tensor* đẳng hướng C_{ijkl} được cho bởi (xem mục 1.5.6)

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \alpha (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.74)$$

ở đây λ , μ , và α là các hằng số vô hướng. Bây giờ, do C_{ijkl} phải thỏa các điều kiện đối xứng trong các phương trình (3.73), ta có $\alpha = 0$ trong phương trình (3.74). Do đó, phương trình (3.74) phải có dạng

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.75)$$

Từ các phương trình (3.72) và (3.75), ta nhận được

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kk} \varepsilon_{kk} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \varepsilon_{kk}$$

hay

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3.76)$$

Do đó, đối với vật liệu đàn hồi tuyến tính đẳng hướng, chỉ có hai hằng số vật liệu độc lập, λ và μ , chúng được gọi là các hằng số *Lamé*.

Trái lại, biến dạng ε_{ij} có thể được biểu diễn theo các ứng suất trong quan hệ cơ sở của phương trình (3.76). Đối với phương trình (3.76), ta có

$$\sigma_{kk} = (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_{kk}$$

hay

$$\varepsilon_{kk} = \frac{\sigma_{kk}}{3\lambda + 2\mu} \quad (3.77)$$

Thay giá trị ε_{kk} này vào phương trình (3.76) và giải để tìm ε_{ij} , ta nhận được

Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi

$$\varepsilon_{ij} = \frac{-\lambda\delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} \quad (3.78)$$

Các phương trình (3.76) và (3.78) là những dạng tổng quát của quan hệ cơ sở đối với vật liệu đàn hồi tuyến tính đẳng hướng. Một hệ quả quan trọng của những phương trình này là đối với vật liệu đẳng hướng, các phương trình của các *tensor* ứng suất và biến dạng trùng nhau.

3.2.3. Định luật Hooke đẳng hướng tổng quát hóa được dựa trên số liệu thí nghiệm

Hãy khảo sát thí nghiệm kéo đơn trục như được biểu diễn trong hình 3.8a. Thành phần ứng suất duy nhất khác không, $\sigma_x = \sigma$, sinh ra biến dạng dọc trục ε_x được xác định theo

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (3.79)$$

và biến dạng ngang được xác định theo

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = -\frac{\nu\sigma_x}{E} \quad (3.80)$$

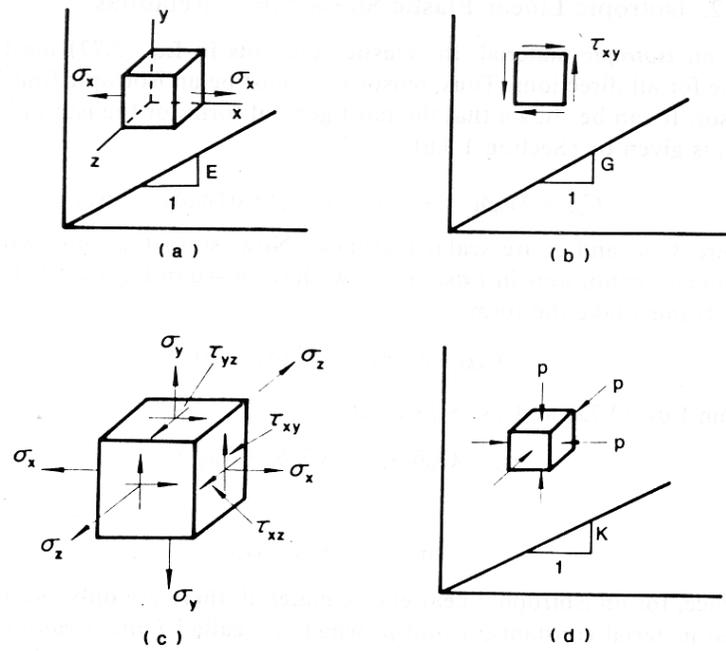
ở đây E là *modulus* của *Young* và ν là hệ số *Poisson*. Nên chú ý rằng ứng suất pháp σ_x không gây ra biến dạng trượt. Mặt khác, trong thí nghiệm trượt thuần túy (hình 3.8b), ứng suất tiếp τ_{xy} không gây ra biến dạng pháp mà chỉ gây ra biến dạng trượt γ_{xy} như

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (3.81)$$

ở đây G là *modulus trượt* của sự đàn hồi.

Bây giờ khảo sát phân tố hình hộp đẳng hướng ba chiều chịu trạng thái ứng suất khối (hình 3.8c). Theo giả thiết biến dạng nhỏ, nguyên lý cộng tác dụng được áp dụng dưới ứng suất đa trục. Thế thì sự tác động đồng thời của σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , và τ_{zx} dẫn đến những biến dạng như sau:

Lý thuyết dẻo kỹ thuật



Hình 3.8. Các quan hệ ứng suất–biến dạng cho vật liệu đàn hồi tuyến tính đẳng hướng.
 (a) Thí nghiệm kéo đơn trục; (b) thí nghiệm trượt đơn giản; (c) trạng thái ứng suất khối tổng quát; (d) thí nghiệm nén thủy tĩnh.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right] \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x) \right] \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right]
 \end{aligned} \tag{3.82a}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\
 \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}
 \end{aligned} \tag{3.82b}$$

Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi

Phương trình (3.82) được xem là định luật *Hooke* tổng quát hóa cho các vật liệu đẳng hướng. Các hằng số đàn hồi E , ν , và G có thể được chứng minh là được liên hệ bởi

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.83)$$

Để chứng tỏ điều này, hãy xem lại phân tố chịu trượt thuần túy (hình 3.8b). Trạng thái trượt thuần túy có thể được biểu diễn theo những ứng suất chính τ_{xy} và $-\tau_{xy}$ tác động trên những mặt nghiêng một góc 45° so với những mặt phẳng trượt. Mặt khác, biến dạng pháp tương ứng theo hướng chính cũng có thể thu được theo biến dạng trượt γ_{xy} . Tiếp theo, áp dụng định luật *Hooke*, ta sẽ nhận được phương trình (3.83).

Bằng cách dùng ký hiệu chỉ số, ta có thể viết phương trình (3.82) trong dạng súc tích

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (3.84)$$

Tiếp tục với cách thức tương tự như ở mục 3.2.2, ta có thể giải phương trình (3.84) đối với ứng suất σ_{ij} và nhận được

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (3.85)$$

So sánh những quan hệ cơ sở (3.76) và (3.85), các hằng số của *Lamé* μ và λ có thể được biểu diễn theo E và ν như

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.86a)$$

và

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.86b)$$

hoặc, ngược lại, *modulus* của *Young* và hệ số *Poisson* ν có thể được biểu diễn theo μ và λ như

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (3.87a)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (3.87b)$$

Bằng cách dùng các phương trình (3.86a) và (3.86b) trong phương trình (3.75), *tensor các modulus* đàn hồi, $C_{ijk\ell}$, có thể được biểu diễn theo E và ν :

$$C_{ijk\ell} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{2\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij}\delta_{k\ell} + \delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{jk} \right] \quad (3.88)$$

Chú ý rằng phương trình (3.84) có thể được viết trong dạng cô đọng :

$$\varepsilon_{ij} = D_{ijk\ell} \sigma_{k\ell} \quad (3.89a)$$

và

$$D_{ijk\ell} = \frac{(1+\nu)}{2E} \left[-\frac{2\nu}{1+\nu} \delta_{ij}\delta_{k\ell} + \delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{jk} \right] \quad (3.89b)$$

ở đây $D_{ijk\ell}$ là nghịch đảo của $C_{ijk\ell}$ và được gọi là *compliance tensor*.

Một *modulus* đàn hồi khác được bàn luận ở đây là *modulus khối* K , nó được giới thiệu bởi thí nghiệm nén thủy tĩnh như được biểu diễn trong hình 3.8d. Trong trường hợp này, $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p = \sigma_{kk}/3$. *Modulus khối* K được định nghĩa cho trường hợp này như là tỷ số giữa áp suất thủy tĩnh p và sự thay đổi thể tích tương ứng ε_{kk} , nghĩa là,

$$K = \frac{p}{\varepsilon_{kk}} \quad (3.90)$$

Từ phương trình (3.77), ta nhận được

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (3.91)$$

Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi

Thay thế những phương trình (3.86) và (3.87) vào phương trình (3.91) dẫn đến

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (3.92)$$

3.2.4. Sự phân tích quan hệ ứng suất–biến dạng

Sự phân tách ngắn gọn và hợp lý tồn tại giữa các thành phần đáp ứng trung bình (thủy tĩnh hoặc thể tích) và trượt (lệch) trong vật liệu tuyến tính đẳng hướng. Đáp ứng thủy tĩnh có thể thu được một cách trực tiếp từ phương trình (3.90) như

$$\sigma_{\text{oct}} = p = K\varepsilon_{\text{kk}} \quad (3.93)$$

Để nhận được những quan hệ đáp ứng lệch, ta dùng quan hệ $s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}$ và thay thế đối với σ_{ij} và p từ các phương trình tương ứng (3.85) và (3.93), và chú ý phương trình (3.92). Điều này dẫn đến

$$s_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{\text{kk}} \delta_{ij} - \frac{E}{3(1-2\nu)} \varepsilon_{\text{kk}} \delta_{ij}$$

Thay thế đối với $\varepsilon_{ij} = e_{ij} + (1/3)\varepsilon_{\text{kk}}\delta_{ij}$ và rút gọn, ta có quan hệ

$$s_{ij} = \frac{E}{1+\nu} e_{ij} = 2Ge_{ij} \quad (3.94)$$

Các phương trình (3.93) và (3.94) đưa đến sự tách rời cần thiết của các quan hệ thủy tĩnh và lệch. Kết hợp hai phương trình này, ta có thể viết các biến dạng đàn hồi tổng ε_{ij} theo các ứng suất thủy tĩnh và lệch như

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3} \varepsilon_{\text{kk}} \delta_{ij} + e_{ij} = \frac{1}{3K} p \delta_{ij} + \frac{1}{2G} s_{ij} \quad (3.95)$$

hoặc

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{9K} I_1 \delta_{ij} + \frac{1}{2G} s_{ij} \quad (3.96)$$

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

Tương tự, σ_{ij} có thể được biểu diễn theo các biến dạng thể tích và lệch dưới dạng sau đây:

$$\sigma_{ij} = K\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2Ge_{ij} \quad (3.97)$$

3.2.5. Các quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi tuyến tính đẳng hướng dưới dạng ma trận

Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đã bàn luận ở trên có thể được biểu diễn một cách thuận tiện dưới dạng ma trận. Những dạng này thích hợp cho việc sử dụng lúc giải bài toán cơ học vật rắn bằng phương pháp số (thí dụ, phương pháp phần tử hữu hạn). Trong các mục dưới đây, các dạng ma trận được trình bày cho nhiều trường hợp khác nhau.

3.2.5.1. Trường hợp ba chiều

Các thành phần ứng suất và biến dạng được định nghĩa bởi hai *vector* tương ứng $\{\sigma\}$ và $\{\varepsilon\}$, chúng được biểu thị bởi

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (3.98)$$

Bây giờ phương trình (3.85) có thể được viết dưới dạng ma trận như

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (3.99)$$

ở đây ma trận $[C]$ được gọi là *ma trận cơ sở đàn hồi* hay *ma trận các modulus đàn hồi* và được cho bởi

Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.100a)$$

hoặc, mặt khác, thay ν và E theo K và G sẽ dẫn đến

$$[C] = \begin{bmatrix} (K + \frac{4}{3}G) & (K - \frac{2}{3}G) & (K - \frac{2}{3}G) & 0 & 0 & 0 \\ (K - \frac{2}{3}G) & (K + \frac{4}{3}G) & (K - \frac{2}{3}G) & 0 & 0 & 0 \\ (K - \frac{2}{3}G) & (K - \frac{2}{3}G) & (K + \frac{4}{3}G) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (3.100b)$$

Ngoài ra, phương trình (3.82) có thể được viết dưới dạng ma trận như

$$\{\varepsilon\} = [C]^{-1}\{\sigma\} = [D]\{\sigma\} \quad (3.101)$$

ở đây ma trận *compliance* đàn hồi, $[D]$, là ma trận nghịch đảo của $[C]$:

$$[C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

3.2.5.2. Trường hợp ứng suất phẳng

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

Ta có thể chứng minh rằng các phương trình (3.99) và (3.101), khi được rút gọn về trường hợp ứng suất phẳng hai chiều ($\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$), có những dạng đơn giản như sau:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \\ \nu & 1 & \\ & & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.103)$$

và

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.104)$$

Cần chú ý rằng trong trường hợp ứng suất phẳng, thành phần biến dạng ε_z khác không, trong khi các thành phần biến dạng trượt γ_{yz} và γ_{zx} bằng không. Thành phần ε_z có giá trị

$$\varepsilon_z = \frac{-\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{-\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (3.105)$$

Nghĩa là, ε_z là hàm tuyến tính của ε_x và ε_y .

Các quan hệ ứng suất phẳng được trình bày ở trên thường được sử dụng trong nhiều ứng dụng thực tế. Thí dụ, việc phân tích các tấm mỏng, phẳng chịu tải trong mặt phẳng tấm (mặt phẳng xy) thường được xem như các bài toán ứng suất phẳng.

3.2.5.3. Trường hợp biến dạng phẳng

Các điều kiện biến dạng phẳng ($\varepsilon_x = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$) thường được tìm thấy trong các vật thể dài có mặt cắt ngang đều, chịu tải phân bố đều dọc theo trục chiều dài của chúng (trục z), như trong trường hợp của các đường hầm, các đường dốc của đất, và các tường chắn. Dưới các điều kiện biến dạng phẳng, các phương trình (3.99) và (3.101) có thể được rút gọn về dạng đơn giản

Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & & \\ \nu & 1-\nu & & \\ & & & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.106)$$

và

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.107)$$

Đối với trường hợp này, các thành phần ứng suất τ_{yz} và τ_{zx} bằng không, và thành phần ứng suất σ_z có giá trị

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (3.108)$$

3.2.5.4. Trường hợp đối xứng trục

Việc phân tích các vật thể tròn xoay dưới tác động của tải đối xứng trục thì tương tự với trường hợp ứng suất phẳng và biến dạng phẳng do bài toán này cũng là bài toán hai chiều. Trong việc ký hiệu thông thường, các thành phần ứng suất khác không trong trường hợp đối xứng trục là σ_r , σ_z , σ_θ , và τ_{rz} , và các biến dạng tương ứng là ε_r , ε_z , ε_θ , và γ_{rz} . Các phương trình (3.99) và (3.101) có thể được rút gọn về các dạng ($\tau_{z\theta} = \tau_{\theta r} = 0$, $\gamma_{z\theta} = \gamma_{\theta r} = 0$):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \quad (3.109)$$

và

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} \quad (3.110)$$