

Chương 2

TIÊU CHUẨN CHẢY VÀ TIÊU CHUẨN PHÁ HỦY

2.1. Ứng suất

2.2. Tiêu chuẩn chảy độc lập với ứng suất thủy tĩnh

2.3. Tiêu chuẩn phá hủy cho các vật liệu phụ thuộc áp lực thủy tĩnh

2.4. Tiêu chuẩn chảy và tiêu chuẩn phá hủy bất đẳng hướng

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

2.1. Ứng suất

2.1.1. Ứng suất của điểm và *tensor* ứng suất

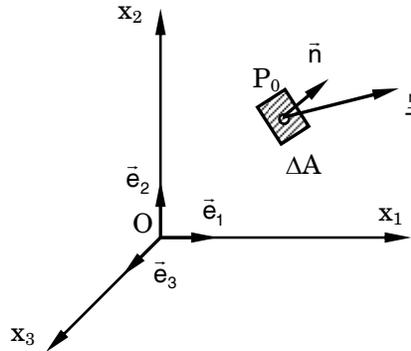
Như chúng ta biết, ứng suất được định nghĩa như là cường độ của nội lực tác động giữa các phần tử của vật thể trên các bề mặt ảo bên trong. Khảo sát một diện tích bề mặt ΔA đi qua điểm P_0 với pháp tuyến đơn vị \bar{n} như hình 2.1. Gọi \bar{F}_n là hợp lực tác động trên bề mặt ΔA . *Vector* ứng suất ở điểm P_0 tác động trên mặt cắt ΔA được định nghĩa bởi

$$\bar{T} = T = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\bar{F}_n}{\Delta A} \quad (2.1)$$

Trạng thái ứng suất tại một điểm được định nghĩa là tập hợp tất cả các *vector* ứng suất tác động trên mọi mặt cắt đi qua điểm ấy.

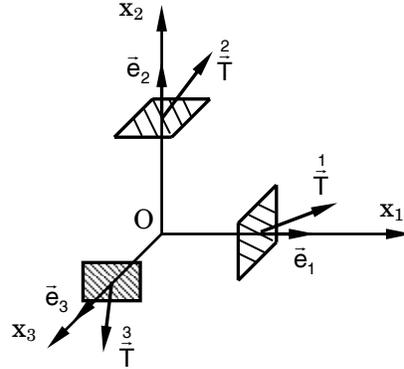
Do có vô số mặt cắt đi qua một điểm nên ta có tập hợp vô số các *vector* ứng suất \bar{T} , chúng nói chung sẽ khác nhau. Tập hợp vô hạn các *vector* ứng suất \bar{T} này đặc trưng cho trạng thái ứng suất của điểm. May mắn thay, vô hạn các *vector* ứng suất \bar{T} này không phải là các *vector* độc lập nên ta không cần biết tất cả các *vector* ứng suất này. Như sẽ được chứng minh sau này rằng nếu biết được ba *vector* ứng suất \bar{T}^1 , \bar{T}^2 , và \bar{T}^3 trên ba mặt phẳng vuông góc lẫn nhau, như được biểu diễn trên hình 2.2, thì *vector* ứng suất trên mặt phẳng bất kỳ đi qua điểm này có thể tìm thấy từ những phương trình cân bằng của điểm ấy.

Hình 2.3 biểu diễn một phần tử OABC với các *vector* ứng suất \bar{T}^1 , \bar{T}^2 , \bar{T}^3 , và \bar{T} lần lượt tác động trên các mặt OBC, OAC, OAB và ABC của nó. *Vector* ứng suất \bar{T} (\bar{T}^1 , \bar{T}^2 , \bar{T}^3) mô tả ứng suất tác động trên mặt vi phân âm vuông góc với *vector* đơn vị \bar{e}_1 (\bar{e}_2 , \bar{e}_3).



Hình 2.1. *Vector* ứng suất \bar{T} của điểm P_0 trên mặt cắt ΔA .

Chương 2. Tiêu chuẩn chảy và tiêu chuẩn phá hủy



Hình 2.2. Các vector ứng suất trên ba mặt phẳng vuông góc lẫn nhau ở một điểm.

Vector đơn vị có thể được viết dưới dạng

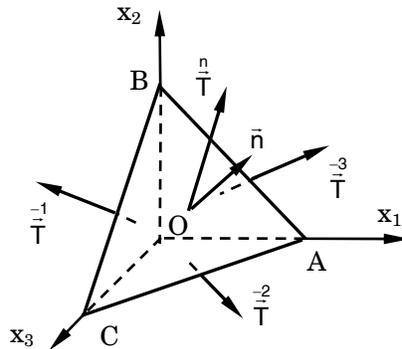
$$\bar{n} = (n_1, n_2, n_3) \quad (2.2)$$

ở đây các cosine chỉ phương n_1, n_2, n_3 được cho bởi

$$\begin{aligned} n_1 &= \cos(\bar{e}_1, \bar{n}) \\ n_2 &= \cos(\bar{e}_2, \bar{n}) \\ n_3 &= \cos(\bar{e}_3, \bar{n}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Gọi A là diện tích của tam giác ΔABC , A_i là diện tích của tam giác vuông góc với trục x_i . Ta có quan hệ

$$A_i = A \cos(\bar{e}_i, \bar{n}) = A n_i \quad (2.4)$$



Hình 2.3. Các vector ứng suất tác động trên mặt nghiêng bất kỳ và trên các mặt phẳng tọa độ.

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

Từ phương trình cân bằng của phân tử OABC (hình 2.3) và dùng (2.4), ta có

$$\bar{T}^n(A) + \bar{T}^{-1}(An_1) + \bar{T}^{-2}(An_2) + \bar{T}^{-3}(An_3) = 0 \quad (2.5)$$

Chia (2.5) cho A, ta có

$$\bar{T}^n = -\bar{T}^{-1}n_1 - \bar{T}^{-2}n_2 - \bar{T}^{-3}n_3 \quad (2.6)$$

Nhưng

$$\bar{T}^i = -\bar{T}^{-i} \quad \text{đối với } i = 1, 2, \text{ và } 3$$

Do đó,

$$\bar{T}^n = \bar{T}^1n_1 + \bar{T}^2n_2 + \bar{T}^3n_3 \quad (2.7)$$

hoặc trong hệ trục xyz,

$$\bar{T}^n = \bar{T}^xn_x + \bar{T}^yn_y + \bar{T}^zn_z \quad (2.8)$$

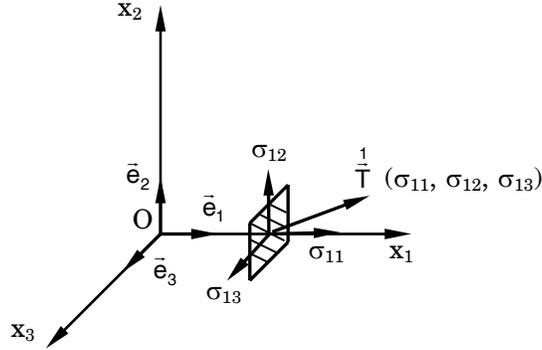
Phương trình (2.7), (2.8) biểu diễn *vector* ứng suất \bar{T}^n ở điểm bất kỳ tác động trên mặt cắt có pháp tuyến đơn vị \bar{n} theo các *vector* ứng suất tác động trên các mặt phẳng vuông góc với ba trục tọa độ x_1 , x_2 , và x_3 của cùng điểm ấy. Do đó, rõ ràng là ba *vector* ứng suất \bar{T}^1 , \bar{T}^2 , và \bar{T}^3 định nghĩa hoàn toàn trạng thái ứng suất ở một điểm.

Vector ứng suất, \bar{T}^n , nói chung, không vuông góc với mặt phẳng mà nó tác động. Do đó, trong thực tế, *vector* ứng suất \bar{T}^n được phân tích thành hai thành phần, một thành phần vuông góc với bề mặt cắt được gọi là *ứng suất pháp*, và thành phần nằm trong mặt phẳng được gọi là *ứng suất tiếp*.

Các *vector* ứng suất tác động trên các mặt phẳng tọa độ x_1 , x_2 , và x_3 cũng được phân tích thành ba thành phần theo các phương trục tọa độ. Thí dụ, *vector* ứng suất \bar{T}^1 tác động trên mặt phẳng vuông góc với trục x_1 , có ba thành phần ứng suất: ứng suất pháp σ_{11} , các ứng suất tiếp σ_{12} và σ_{13} theo phương x_1 , x_2 , và x_3 tương ứng (hình 2.4). Do đó, ta có

$$\bar{T}^1 = \sigma_{11}\bar{e}_1 + \sigma_{12}\bar{e}_2 + \sigma_{13}\bar{e}_3 \quad (2.9)$$

Chương 2. Tiêu chuẩn chảy và tiêu chuẩn phá hủy



Hình 2.4. Các thành phần của *vector* ứng suất $\overset{1}{T}$.

$$\overset{1}{T} = \sigma_{1j} \bar{e}_j \quad (2.10)$$

Tương tự, đối với hai mặt phẳng vuông góc với hai trục tọa độ x_2 và x_3 ,

$$\overset{2}{T} = \sigma_{2j} \bar{e}_j \quad (2.11)$$

$$\overset{3}{T} = \sigma_{3j} \bar{e}_j \quad (2.12)$$

Tổng quát,

$$\overset{i}{T} = \sigma_{ij} \bar{e}_j \quad (2.13)$$

ở đây σ_{ij} là thành phần ứng suất thứ j của *vector* ứng suất $\overset{i}{T}$ tác động lên phân tố bề mặt có pháp tuyến ngoài cùng chiều với chiều dương của trục tọa độ x_i (hình 2.4).

Chín đại lượng σ_{ij} cần thiết để định nghĩa ba *vector* ứng suất $\overset{1}{T}$, $\overset{2}{T}$, và $\overset{3}{T}$, được gọi là các thành phần của *tensor* ứng suất, nó được ký hiệu dưới dạng

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \overset{1}{T} \\ \overset{2}{T} \\ \overset{3}{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

ở đây σ_{11} , σ_{22} , và σ_{33} là các thành phần ứng suất pháp và σ_{12} , σ_{21} , ... là các thành phần ứng suất tiếp.

Lý thuyết đẻo kỹ thuật

Các thành phần của *tensor* ứng suất cũng có thể được viết bằng cách dùng ký hiệu của *von Karman* và có dạng

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

ở đây σ mô tả thành phần ứng suất pháp, và τ mô tả thành phần ứng suất tiếp. Tương tự, các ký hiệu $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \dots$ có thể được dùng để thay cho σ_{ij} để định rõ các thành phần của *tensor* ứng suất trong (2.14) và (2.15). Do đó, các dạng sau đây là các ký hiệu đồng thời cho *tensor* ứng suất σ_{ij} :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Thay (2.13) vào (2.7), những thành phần của *vector* ứng suất $\overset{n}{T}$ có thể được viết như sau:

$$\overset{n}{T}_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.17)$$

Từ việc khảo sát sự cân bằng của các *moment* cho phân tố vật liệu, ta thấy rằng *tensor* ứng suất, σ_{ij} , là *tensor* đối xứng, nghĩa là $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Do đó, phương trình (2.17) có thể được viết lại cho thuận tiện hơn

$$\overset{n}{T}_i = \sigma_{ij} n_j \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.18)$$

với σ_{ij} được cho bởi (2.16).

Phương trình (2.18) biểu diễn các thành phần của *vector* ứng suất tác động lên một mặt nghiêng bất kỳ có pháp tuyến đơn vị \vec{n} ở điểm đang khảo sát theo các thành phần của *tensor* ứng suất, σ_{ij} , ở điểm đó. Do đó, *vector* ứng suất $\overset{n}{T}$ sẽ được xác định nếu biết chín đại lượng của *tensor* ứng suất σ_{ij} .

Trong phương trình (2.18), $\overset{n}{T}_i$ và n_i là các *vector*. Từ phương trình này, ta có thể chứng tỏ rằng σ_{ij} là *tensor* bậc hai; nghĩa là, các thành phần ứng suất σ_{ij} trong hệ trục x_i và các thành phần ứng suất σ'_{ij} trong hệ trục x'_i được liên hệ với nhau theo những phương trình sau:

$$\sigma'_{ij} = \ell_{im} \ell_{jn} \sigma_{mn} \quad (2.19)$$

Chương 2. Tiêu chuẩn chảy và tiêu chuẩn phá hủy

và

$$\sigma_{ij} = \ell_{mi} \ell_{nj} \sigma'_{mn} \quad (2.20)$$

với ℓ_{ij} là các *cosine* chỉ phương được cho trong bảng 1.3.

2.1.2. Các công thức ứng suất *Cauchy*

Những công thức (2.7) và (2.18) thu được trong phần trên là các dạng khác nhau của các công thức ứng suất *Cauchy*. Tuy nhiên, trong thực tế luôn có nhu cầu biểu diễn trực tiếp những thành phần ứng suất pháp và ứng suất tiếp, σ_n và S_n , của *vector* ứng suất $\overset{n}{T}$ tác động trên mặt nghiêng bất kỳ có pháp tuyến đơn vị \vec{n} ở điểm đang khảo sát theo các thành phần của *tensor* ứng suất σ_{ij} ở điểm đó. Độ lớn của thành phần ứng suất pháp được cho bởi

$$\sigma_n = \overset{n}{T} \vec{n} = \overset{n}{T}_i n_i \quad (2.21)$$

Thay (2.18) vào (2.21), ta có

$$\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j \quad (2.22)$$

Độ lớn của thành phần ứng suất tiếp được cho bởi

$$S_n = \left[\left(\overset{n}{T} \right)^2 - \sigma_n^2 \right]^{1/2} \quad (2.23)$$

ở đây, từ (2.18), $\left(\overset{n}{T} \right)^2$ thu được như

$$\left(\overset{n}{T} \right)^2 = \overset{n}{T} \overset{n}{T} = \overset{n}{T}_i \overset{n}{T}_i = (\sigma_{ij} n_j) (\sigma_{ik} n_k) \quad (2.24)$$

hoặc

$$\left(\overset{n}{T} \right)^2 = \sigma_{ij} \sigma_{ik} n_j n_k \quad (2.25)$$

Các công thức (2.22) và (2.23), đối với việc xác định các thành phần ứng suất pháp và ứng suất tiếp tác động trên mặt nghiêng bất kỳ có pháp tuyến đơn vị \vec{n} , là các dạng hữu ích nhất của các công thức *Cauchy*.

Vector $\vec{\sigma}_n$ cùng phương với pháp *vector* đơn vị \vec{n} , và *vector* \vec{S}_n nằm trong mặt phẳng được hình thành bởi hai *vector* $\overset{n}{T}$ và \vec{n} .

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

2.1.3. Các ứng suất chính và các bất biến của *tensor* ứng suất

Nếu *vector* ứng suất $\overset{n}{T}$ tác động trên mặt nghiêng cùng phương với *vector* pháp tuyến đơn vị \bar{n} của mặt nghiêng thì mặt nghiêng này được gọi là *mặt chính*, phương pháp tuyến của mặt nghiêng được gọi là *phương chính*, và ứng suất pháp σ_n tác động trên mặt nghiêng được gọi là *ứng suất chính* của điểm. Vì $\overset{n}{T}$ song song với \bar{n} nên $\overset{n}{T} = \bar{\sigma}_n$ và $S_n = 0$. Như sau này chỉ rõ, ở mỗi điểm trong vật thể, tồn tại ít nhất ba phương chính. Từ định nghĩa, ta có

$$\overset{n}{T} = \sigma \bar{n} \quad (2.26)$$

hoặc trong dạng thành phần

$$\overset{n}{T}_i = \sigma n_i \quad (2.27)$$

Thay thế $\overset{n}{T}_i$ từ (2.18) sẽ đưa đến

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma n_i \quad (2.28)$$

Đẳng thức trên được khai triển chi tiết như sau:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 &= \sigma n_1 \\ \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3 &= \sigma n_2 \\ \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3 &= \sigma n_3 \end{aligned} \quad (2.29)$$

hoặc theo ký hiệu của *von Karman*

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z &= 0 \\ \tau_{yx} n_x + (\sigma_y - \sigma) n_y + \tau_{yz} n_z &= 0 \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + (\sigma_z - \sigma) n_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Hệ ba phương trình tuyến tính thuần nhất trên luôn tồn tại bộ nghiệm tầm thường ($n_x = n_y = n_z = 0$). Để có bộ nghiệm không tầm thường, định thức của các hệ số của hệ ba phương trình tuyến tính trên phải triệt tiêu:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (2.31)$$

Chương 2. Tiêu chuẩn chảy và tiêu chuẩn phá hủy

Điều kiện này xác định giá trị của σ . Tổng quát có ba nghiệm, σ_1 , σ_2 , và σ_3 (thường ký hiệu $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$). Ba nghiệm có thể này là ba độ lớn có thể của ứng suất pháp tương ứng với các ứng suất tiếp bằng không. Trong ký hiệu tắt, các đẳng thức (2.30) và (2.31) có dạng

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0 \quad (2.32)$$

và

$$|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0 \quad (2.33)$$

Khai triển (2.31) hoặc (2.33) dẫn đến phương trình đặc trưng

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (2.34)$$

ở đây

$I_1 =$ tổng các số hạng trên đường chéo chính của *tensor* ứng suất σ_{ij}

$$I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (2.35)$$

$I_2 =$ tổng các phần phụ đại số của các số hạng trên đường chéo chính của *tensor* ứng suất σ_{ij}

$$\begin{aligned} I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.36)$$

$I_3 =$ định thức của *tensor* ứng suất σ_{ij}

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (2.37)$$

Từ đặc tính của các nghiệm của phương trình bậc ba, có thể thấy rằng

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 \\ I_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Do đó, phương trình bậc ba (2.34) phải như nhau trong cả trường hợp thu được từ hệ trục x, y, z cũng như trường hợp thu được từ hệ trục ba

Lý thuyết đẻo kỹ thuật

phương chính 1, 2, 3. Vì thế, các đại lượng I_1 , I_2 , và I_3 là những bất biến của *tensor* ứng suất σ_{ij} ; nghĩa là, các giá trị của chúng sẽ không đổi bất chấp sự xoay của hệ trục tọa độ.

Thay thế σ_1 , σ_2 , và σ_3 vào trở lại (2.32), và dùng thêm đồng nhất thức

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (2.39)$$

ta có thể xác định các thành phần (n_x, n_y, n_z) của pháp *vector* đơn vị n_i tương ứng với mỗi giá trị của ứng suất chính σ ,

$$\begin{aligned} \bar{n}^{(1)} &= (n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, n_3^{(1)}) && \text{đối với } \sigma = \sigma_1 \\ \bar{n}^{(2)} &= (n_1^{(2)}, n_2^{(2)}, n_3^{(2)}) && \text{đối với } \sigma = \sigma_2 \\ \bar{n}^{(3)} &= (n_1^{(3)}, n_2^{(3)}, n_3^{(3)}) && \text{đối với } \sigma = \sigma_3 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Ba phương này được gọi là ba phương chính của điểm.

Phương trình bổ sung (2.39) được đặt ra do thực tế rằng khi σ trong (2.32) bằng σ_1 , thì theo lý thuyết đại số tuyến tính hệ ba phương trình (2.33) chỉ có tối đa hai phương trình độc lập. Có thể chỉ ra rằng nếu tất cả ba nghiệm σ khác nhau, chính xác có hai phương trình độc lập. Trường hợp đặc biệt trong đó hai hay ba nghiệm σ trùng nhau thì có thể được xem như là trường hợp giới hạn. Trong lúc chờ đợi, ta chỉ cần thực tế là hai hoặc một trong các phương trình (2.32) độc lập, ít nhất một lời giải $n_i^{(1)}$ thỏa đồng thời các phương trình (2.32) và phương trình (2.39) tồn tại. Tương tự, $n_i^{(2)}$ tương ứng với σ_2 , và $n_i^{(3)}$ tương ứng với σ_3 có thể được tìm thấy.

2.1.4. Các ứng suất tiếp chính và ứng suất tiếp cực đại

Trong việc mô tả trạng thái ứng suất của điểm, ta thường lấy ba phương chính 1, 2, 3 làm ba trục tọa độ thay cho hệ trục tổng quát x, y, z vì tính đơn giản do nó đem lại. Chú ý rằng trên những mặt phẳng tọa độ này tất cả các ứng suất tiếp đều bằng *zero* (hình 2.5). Vì thế, độ lớn của ứng suất tác động trên mặt nghiêng bất kỳ có *vector* pháp tuyến đơn vị \bar{n} ở điểm này như được cho bởi (2.25) sẽ có kết quả

$$\left(\frac{n}{T} \right)^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 \quad (2.41)$$

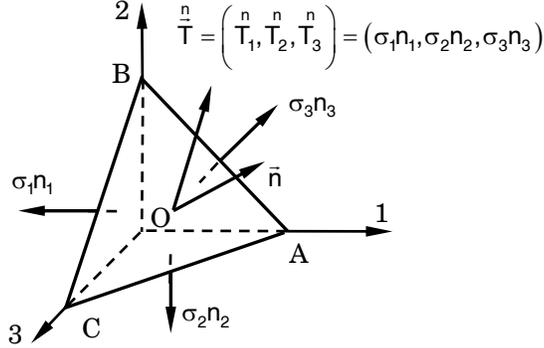
Thành phần ứng suất pháp được tính theo (2.22)

Chương 2. Tiêu chuẩn chảy và tiêu chuẩn phá hủy

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \quad (2.42)$$

Từ phương trình (2.23), độ lớn của thành phần ứng suất tiếp được biểu diễn như

$$S_n^2 = \left(\frac{n}{T} \right)^2 - \sigma_n^2 = (\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2) - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2 \quad (2.43)$$



Hình 2.5. Các thành phần của *vector* ứng suất tác động trên mặt nghiêng bất kỳ trong không gian ứng suất chính.

Điều kiện của pháp *vector* đơn vị được cho bởi

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (2.44)$$

Từ những phương trình (2.42) và (2.44), và khử n_3 , ta thu được σ_n như là hàm của n_1 và n_2 . Đối với các giá trị dừng của σ_n , lấy $\partial \sigma_n / \partial n_1 = 0$ và $\partial \sigma_n / \partial n_2 = 0$, ta có thể chỉ ra rằng $\sigma_n = \sigma_3$ là một giá trị dừng. Tương tự, ta cũng có thể chứng minh σ_1 và σ_2 là những giá trị dừng của ứng suất pháp σ_n .

Bây giờ ta khảo sát các giá trị dừng của ứng suất tiếp S_n . Từ các phương trình (2.43) và (2.44), và khử n_3 , ta thu được

$$S_n^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_3^2) n_1^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) n_2^2 + \sigma_3^2 - [(\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2 + \sigma_3]^2 \quad (2.45)$$

Do đó, vì các giá trị dừng của S_n , ta có

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S_n^2}{\partial n_1} = (\sigma_1 - \sigma_3) n_1 \left\{ (\sigma_1 - \sigma_3) - 2 [(\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2] \right\} = 0 \quad (2.45a)$$

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S_n^2}{\partial n_2} = (\sigma_2 - \sigma_3) n_2 \left\{ (\sigma_2 - \sigma_3) - 2 \left[(\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2 \right] \right\} = 0 \quad (2.45b)$$

Giả sử rằng ba ứng suất chính σ_1 , σ_2 , và σ_3 khác biệt nhau, nghĩa là $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, ta thu được những điều kiện có thể thỏa các phương trình (2.45a,b), và (2.44) như sau:

$$(i) \quad n_1 = n_2 = 0, n_3 = \pm 1 \quad (2.46)$$

Phương trình (2.43) cho kết quả $S_n = 0$, giá trị cực tiểu, và thành phần ứng suất tiếp này tác động lên mặt chính thứ ba.

$$(ii) \quad n_1 = 0, n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ và } n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.47)$$

Các giá trị n_1 , n_2 , và n_3 này xác định hai mặt phẳng song song với trục chính thứ nhất và có pháp tuyến hợp một góc 45° với trục chính thứ hai và thứ ba. Giá trị dừng của S_n trong trường hợp này được cho bởi

$$S_n^2 = \frac{1}{4} (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \quad (2.48)$$

hoặc

$$\tau_{23} = |S_n| = \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3| \quad (2.49)$$

$$(iii) \quad n_2 = 0, n_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ và } n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.50)$$

Giá trị dừng của S_n trong trường hợp này là

$$\tau_{13} = |S_n| = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3| \quad (2.51)$$

Các giá trị n_1 , n_2 , và n_3 này xác định hai mặt phẳng song song với trục chính thứ hai và có pháp tuyến hợp một góc 45° với trục chính thứ nhất và thứ ba. Tương tự, một giá trị dừng khác của ứng suất tiếp S_n có thể được xác định bởi

$$\tau_{12} = |S_n| = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| \quad (2.52)$$

Ứng suất tiếp này tác động trên những mặt phẳng song song với trục chính thứ ba và có pháp tuyến hợp một góc 45° với trục chính thứ nhất và thứ hai.

Các giá trị dừng $\frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2|$, $\frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3|$, $\frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3|$ được gọi là các ứng suất tiếp chính do chúng xảy ra trên những mặt phẳng chia đôi góc giữa các mặt chính. Cần chú ý rằng những mặt trượt chính không phải là các

Chương 2. Tiêu chuẩn chảy và tiêu chuẩn phá hủy

mặt trượt thuần túy; Các ứng suất pháp trên những mặt trượt chính có thể được tính bằng cách dùng phương trình (2.41) và các giá trị tương ứng của n_1 , n_2 , và n_3 . Giá trị cực đại của các ứng suất tiếp chính, được gọi là *ứng suất tiếp cực đại*, τ_{\max} , bằng $\tau_{13} = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_3|$ vì $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

2.1.5. Tensor ứng suất lệch và các bất biến của nó

Để tiện lợi trong việc mô hình vật liệu người ta phân tích *tensor* ứng suất thành hai phần, một phần được gọi là *tensor ứng suất cầu* hoặc *tensor ứng suất thủy tĩnh* và phần còn lại được gọi là *tensor ứng suất lệch*. *Tensor* ứng suất thủy tĩnh là *tensor* mà những phần tử của nó là $\sigma_{ij}^H = p\delta_{ij}$, ở đây p là ứng suất trung bình và được cho bởi

$$\sigma_{ij}^H = p = \frac{1}{3}\sigma_{kk} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}I_1 \quad (2.53)$$

Từ phương trình (2.53), rõ ràng p là hằng số với mọi hệ trục tọa độ; do đó, nó được gọi là *ứng suất cầu* hoặc *ứng suất thủy tĩnh*. Dạng tổng quát của *tensor* ứng suất cầu

$$\sigma_{ij}^H = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} \quad (2.53a)$$

Tensor ứng suất lệch s_{ij} được định nghĩa bằng cách trừ trạng thái ứng suất cầu khỏi trạng thái ứng suất thật. Do đó, ta có

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + p\delta_{ij} \quad (2.54)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij} \quad (2.55)$$

Phương trình (2.55) cung cấp một định nghĩa cần thiết cho *tensor* ứng suất lệch s_{ij} . Những thành phần của *tensor* này được cho bởi

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sigma_{11} - p) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & (\sigma_{22} - p) & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & (\sigma_{33} - p) \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

hoặc dùng ký hiệu của *von Karman*

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} s_x & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_y & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sigma_x - p) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - p) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - p) \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

Chú ý rằng $\delta_{ij} = 0$ và $s_{ij} = \sigma_{ij}$ đối với $i \neq j$ trong phương trình (2.55).

Rõ ràng rằng việc trừ một ứng suất pháp hằng trong tất cả các hướng sẽ không làm thay đổi những phương chính. Do đó, các phương chính của *tensor* ứng suất lệch trùng với các phương chính của *tensor* ứng suất gốc. Trong không gian của các ứng suất chính, *tensor* ứng suất lệch có dạng

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} (\sigma_1 - p) & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_2 - p) & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_3 - p) \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

hoặc

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Để thu được các bất biến của *tensor* ứng suất lệch s_{ij} , một phép dẫn xuất tương tự được thực hiện như đã dùng để thu được (2.34). Do đó ta có thể viết

$$|s_{ij} - s\delta_{ij}| = 0 \quad (2.60)$$

hoặc

$$s^3 - J_1 s^2 + J_2 s - J_3 = 0 \quad (2.61)$$

ở đây J_1 , J_2 , và J_3 là các bất biến của *tensor* ứng suất lệch. Dùng phương trình (2.54) và những định nghĩa tương tự như từ (2.35) đến (2.37), các bất biến J_1 , J_2 , và J_3 có thể được biểu diễn trong các dạng khác dưới dạng các thành phần của s_{ij} hoặc các giá trị chính của nó, s_1 , s_2 , và s_3 , hay dưới dạng các thành phần của *tensor* ứng suất σ_{ij} hoặc các giá trị chính của nó, σ_1 , σ_2 , và σ_3 . Do đó, ta có

$$J_1 = s_{ii} = s_{11} + s_{22} + s_{33} = s_1 + s_2 + s_3 = 0 \quad (2.62)$$

Chương 2. Tiêu chuẩn chảy và tiêu chuẩn phá hủy

$$\begin{aligned}
 J_2 &= \frac{1}{2} \mathbf{s}_{ij} \mathbf{s}_{ji} = \frac{1}{2} (\mathbf{s}_{11}^2 + \mathbf{s}_{22}^2 + \mathbf{s}_{33}^2 + \mathbf{s}_{12} \mathbf{s}_{21} + \mathbf{s}_{21} \mathbf{s}_{12} + \dots) = \frac{1}{2} (\mathbf{s}_1^2 + \mathbf{s}_2^2 + \mathbf{s}_3^2) \\
 &= \frac{1}{2} (\mathbf{s}_{11}^2 + \mathbf{s}_{22}^2 + \mathbf{s}_{33}^2 + 2\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{23}^2 + 2\sigma_{31}^2) \\
 &= -\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_2 \mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_3 \mathbf{s}_1 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 = -(\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_2 \mathbf{s}_3 + \mathbf{s}_3 \mathbf{s}_1) \\
 &= \frac{1}{6} \left[(\mathbf{s}_{11} - \mathbf{s}_{22})^2 + (\mathbf{s}_{22} - \mathbf{s}_{33})^2 + (\mathbf{s}_{33} - \mathbf{s}_{11})^2 \right] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 \quad (2.63) \\
 &= \frac{1}{6} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \\
 &= \frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]
 \end{aligned}$$

$$J_3 = \frac{1}{3} \mathbf{s}_{ij} \mathbf{s}_{jk} \mathbf{s}_{ki} = \begin{vmatrix} \mathbf{s}_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \mathbf{s}_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \mathbf{s}_z \end{vmatrix} = \frac{1}{3} (\mathbf{s}_1^3 + \mathbf{s}_2^3 + \mathbf{s}_3^3) = \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 \mathbf{s}_3 \quad (2.64)$$

Các bất biến J_1 , J_2 , và J_3 của *tensor* ứng suất lệch được liên hệ với các bất biến I_1 , I_2 , và I_3 của *tensor* ứng suất σ_{ij} bởi

$$\begin{aligned}
 J_1 &= 0 \\
 J_2 &= \frac{1}{3} (I_1^2 - 3I_2) \\
 J_3 &= \frac{1}{27} (2I_1^3 - 9I_1 I_2 + 27I_3)
 \end{aligned} \quad (2.65)$$

Việc sử dụng *tensor* ứng suất lệch có ưu điểm là bất biến thứ nhất của *tensor* này, J_1 , luôn bằng không. Điều này cũng có thể được thấy bằng cách lấy tổng của các phần tử chéo trong (2.56) hoặc (2.58).

Có thể thấy rằng điều kiện cần và đủ để trạng thái ứng suất là trạng thái trượt thuần túy là $\sigma_{ii} = 0$, hoặc bất biến thứ nhất của nó $I_1 = 0$ (xem bài tập 2.11). Do đó, *tensor* ứng suất lệch \mathbf{s}_{ij} là trạng thái trượt thuần túy.

2.1.6. Ứng suất bất diện

Mặt phẳng ứng suất bất diện là mặt phẳng có pháp tuyến nghiêng đều so với ba phương chính của ứng suất. Do đó, các mặt phẳng với pháp tuyến đơn vị $\bar{\mathbf{n}} = (n_1, n_2, n_3) = (1/\sqrt{3})(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ trong hệ trục ứng suất chính được gọi là các mặt bất diện. Chú ý rằng ta có đến tám mặt bất diện như được biểu diễn trong hình 2.6, với $OA = OB = OC = OA' = OB' = OC'$. Trong hệ trục ứng suất chính 1, 2, và 3, *tensor* ứng suất σ_{ij} được viết như

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

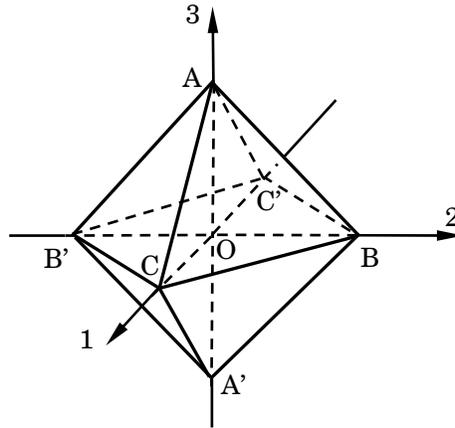
$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Thành phần ứng suất pháp của *vector* ứng suất tại điểm O, tác động trên mặt nghiêng có *vector* pháp tuyến đơn vị \bar{n} có thể thu được bằng công thức *Cauchy* (2.22),

$$\sigma_n = \sigma_{ij}n_i n_j$$

hoặc

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1 n_1 + \sigma_2 n_2 n_2 + \sigma_3 n_3 n_3 \quad (2.67)$$



Hình 2.6. Các thành phần của *vector* ứng suất tác động trên mặt nghiêng bất kỳ trong không gian ứng suất chính.

Do đó, ứng suất pháp trên một mặt bát diện sẽ là

$$\sigma_{\text{oct}} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}I_1 \quad (2.68)$$

Chú ý rằng độ lớn của σ_{oct} trên tất cả tám mặt bát diện là bằng nhau và rằng đại lượng σ_{oct} chính là ứng suất pháp trung bình (hoặc ứng suất thủy tĩnh).

Ứng suất tiếp trên mặt bát diện, τ_{oct} , có thể thu được từ công thức trong phương trình (2.23):

$$\tau_{\text{oct}}^2 = \left(\overset{n}{T}_{\text{oct}} \right)^2 - \sigma_{\text{oct}}^2 \quad (2.69)$$

Sử dụng phương trình (2.24) để tính $(\overset{n}{T}_{\text{oct}})^2$, ta nhận được

Chương 2. Tiêu chuẩn chảy và tiêu chuẩn phá hủy

$$\left(\overset{n}{T}_{\text{oct}} \right)^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) \quad (2.70)$$

Do đó,

$$\begin{aligned} \tau_{\text{oct}}^2 &= \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{3^2} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \\ &= \frac{1}{9} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.71)$$

Dùng các kết quả về ứng suất tiếp chính, τ_{oct} có thể được biểu diễn như

$$\tau_{\text{oct}}^2 = \frac{4}{9} (\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2) \quad (2.72)$$

ở đây τ_{12} , τ_{23} , và τ_{31} là các ứng suất tiếp chính. Do đó,

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{2}{3} (\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2} \quad (2.73)$$

ở đây J_2 là bất biến thứ hai của *tensor* ứng suất lệch. Ứng suất tiếp bất diện có thể được tính theo các bất biến của *tensor* ứng suất như (xem phương trình (2.65))

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{\sqrt{2}}{3} (I_1^2 - 3I_2)^{1/2} \quad (2.74)$$

và theo các thành phần ứng suất trong hệ trục tổng quát xyz, ứng suất tiếp bất diện trở thành (xem phương trình (2.63))

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{1}{3} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]^{1/2} \quad (2.75)$$

Chú ý rằng độ lớn của τ_{oct} trên tám mặt bất diện là như nhau và đại lượng τ_{oct} có thể được xem một cách hơi khập khiễng là ứng suất tiếp chính trung bình như được cho bởi (2.73).

2.1.7. Các ý nghĩa vật lý của các bất biến ứng suất I_1 và J_2

Có vài cách hiểu về các bất biến ứng suất I_1 và J_2 , một trong các cách hiểu ấy được biểu diễn bởi các đẳng thức (2.68) và (2.73). Cụ thể là, $I_1/3$ là ứng suất pháp bất diện σ_{oct} , trong khi $\sqrt{(2/3)J_2}$ là ứng suất tiếp bất diện. Những hiểu biết khác được trình bày trong các phần dưới đây.

2.1.7.1. Năng lượng biến dạng đàn hồi

Năng lượng biến dạng đàn hồi tổng cộng W trên một đơn vị thể tích của vật liệu đàn hồi tuyến tính có thể được chia thành hai phần, một phần

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

liên quan với sự thay đổi thể tích W_1 , và một phần liên quan với sự thay đổi hình dáng W_2 :

$$W = W_1 + W_2 \quad (2.79)$$

với

$$W_1 = \text{năng lượng giãn nở thể tích} = \frac{1-2\nu}{6E} I_1^2 \quad (2.80)$$

$$W_2 = \text{năng lượng thay đổi hình dáng} = \frac{1+\nu}{E} J_2 \quad (2.81)$$

ở đây E và ν tương ứng là *modulus* đàn hồi và hệ số *Poisson*. Các bất biến I_1 và J_2 được xem là tỷ lệ thuận với năng lượng giãn nở thể tích và năng lượng thay đổi hình dáng một cách tương ứng.

2.1.7.2. Ứng suất trung bình

Khảo sát phân tố thể tích hình cầu vi phân. Ở một điểm trên bề mặt của hình cầu này, *vector* ứng suất trên mặt phẳng tiếp tuyến có một thành phần ứng suất tiếp τ_s và thành phần ứng suất pháp σ_s . Giá trị trung bình của ứng suất pháp σ_s trên toàn mặt cầu có thể được xác định bởi

$$\sigma_m = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{S} \int_S \sigma_s dS \right) \quad (2.82)$$

ở đây S biểu thị diện tích mặt cầu. Biểu thức này được định lượng

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} I_1 \quad (2.83)$$

Đối với ứng suất tiếp τ_s trên mặt cầu, giá trị trung bình của τ_s có thể được dựa vào các ứng suất tồn tại trên tất cả các mặt phẳng có thể đi qua điểm bằng cách thực hiện phép tính trung bình trên toàn mặt cầu. Do dấu của ứng suất tiếp không có ý nghĩa đối với cơ chế vật lý của sự phá hủy nên thiết thực nhất là lấy phép trung bình theo dạng trung bình căn bậc hai. Nghĩa là,

$$\tau_m = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{S} \int_S \tau_s^2 dS \right)^{1/2} \quad (2.84)$$

Thực hiện phép tích phân, ta có

$$\tau_m = \frac{1}{\sqrt{15}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2} \quad (2.85)$$

Chương 2. Tiêu chuẩn chảy và tiêu chuẩn phá hủy

hoặc dưới dạng bất biến J_2 ,

$$\tau_m = \sqrt{\frac{2}{5} J_2} \quad (2.86)$$

2.1.7.3. Trung bình căn của ứng suất trượt chính

Các phương trình (2.49), (2.51), và (2.52) cho các ứng suất tiếp chính, giá trị trung bình căn của chúng là

$$\sqrt{\frac{1}{3} \left[\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2 \right]} = \frac{\sqrt{2J_2}}{2} \quad (2.87)$$

2.1.8. Các vòng tròn *Mohr* trong không gian ứng suất ba chiều

Vòng tròn *Mohr* là phương cách đồ họa có hiệu quả để biểu diễn trạng thái ứng suất của một điểm. Trong cách biểu diễn đồ họa này, trạng thái ứng suất của một điểm được biểu diễn bởi biểu đồ vòng tròn *Mohr*, trong đó hoành độ, σ_n , và tung độ, S_n , của mỗi điểm trên vòng tròn *Mohr* tương ứng sẽ cho thành phần ứng suất pháp và thành phần ứng suất tiếp tác động trên mặt nghiêng có pháp tuyến xác định.

Đối với trạng thái ứng suất khối đã cho của một điểm, các giá trị ứng suất chính σ_1 , σ_2 , và σ_3 (với $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) phải được tính trước theo công thức (2.34), và các trục chính tương ứng được tính theo các công thức (2.40). Mỗi khi các giá trị σ_1 , σ_2 , và σ_3 được xác định, một biểu đồ vòng tròn *Mohr* có thể được xây dựng như được trình bày trong hình 2.7. Trong các hình này, các tâm của ba vòng tròn *Mohr* C_1 , C_2 , và C_3 có các tọa độ tương ứng là $[\frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3), 0]$, $[\frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1), 0]$, $[\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), 0]$. Ba bán kính R_1 , R_2 , và R_3 tương ứng bằng $\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$, $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$, $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$. Đối với hệ trục tọa độ chính, các ứng suất pháp và tiếp của điểm đang khảo sát trên mặt cắt có *vector* pháp tuyến đơn vị \bar{n} có thể được vẽ như một điểm trong không gian ứng suất σ_n - S_n . Chúng ta hãy khảo sát miền dương của S_n , nghĩa là, trong miền nửa trên của không gian ứng suất σ_n - S_n .

Gọi n_1 , n_2 , và n_3 lần lượt là các thành phần của pháp *vector* đơn vị \bar{n} trong hệ trục chính 1, 2, và 3, và $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, các phương trình (2.42) và (2.43) cho

$$\sigma_n^2 + S_n^2 = \left(\begin{matrix} n \\ T \end{matrix} \right)^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 \quad (2.88)$$

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \quad (2.89)$$

Lý thuyết đẻo kỹ thuật

Đối với *vector* đơn vị, ta có

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (2.90)$$

Giải hệ ba phương trình từ (2.88) đến(2.90) đối với ba ẩn n_1^2, n_2^2, n_3^2 , ta được

$$n_1^2 = \frac{S_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \quad (2.91)$$

$$n_2^2 = \frac{S_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \quad (2.92)$$

$$n_3^2 = \frac{S_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \quad (2.93)$$

Vì $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, và các vế trái của các đẳng thức từ (2.91) đến (2.93) không âm, nên

$$S_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) \geq 0 \quad (2.94)$$

$$S_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1) \leq 0 \quad (2.95)$$

$$S_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) \geq 0 \quad (2.96)$$

Các kết quả trên có thể được viết lại như

$$S_n^2 + \left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right]^2 \geq \frac{1}{4}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 \quad (2.97)$$

$$S_n^2 + \left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right]^2 \leq \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_3)^2 \quad (2.98)$$

$$S_n^2 + \left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right]^2 \geq \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \quad (2.99)$$

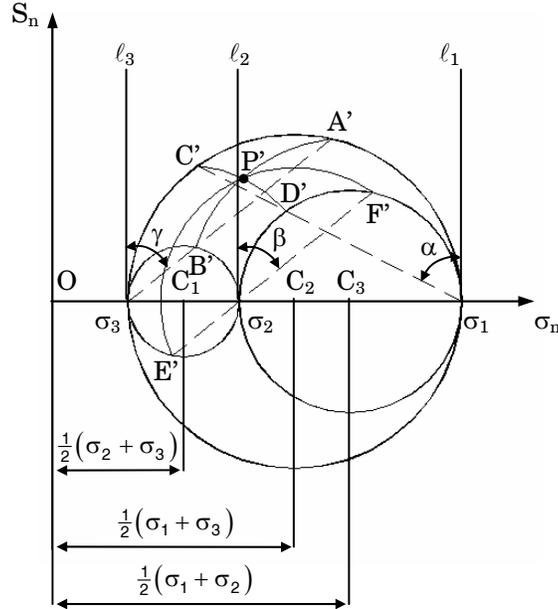
Các mối quan hệ từ (2.97) đến (2.99) chỉ ra rằng những giá trị có thể chấp nhận của σ_n và S_n nằm ở bên trong hay trên các biên của miền được giới hạn bởi các đường tròn C_1, C_2 , và C_3 , như được biểu diễn trong hình 2.7.

Đối với giá trị cố định bất kỳ của n_1 , khử n_2 và n_3 từ những phương trình (2.88) đến (2.90) cho kết quả

$$\left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right]^2 + S_n^2 = \frac{1}{4}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + n_1^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (2.100)$$

Chương 2. Tiêu chuẩn chảy và tiêu chuẩn phá hủy

Do đó, đối với giá trị n_1 đã cho, điểm (σ_n, S_n) tương ứng với giá trị n_1 này nằm trên cung tròn $C'D'$ như được biểu diễn trên hình 2.7. Để vẽ cung này, ta vẽ đường thẳng l_1 song song với trục tung S_n đi qua điểm $(\sigma_1, 0)$ và dựng thêm đường thẳng mới hợp với đường thẳng l_1 góc $\alpha = \arccos(n_1)$. Đường thẳng này cắt các vòng tròn C_2 và C_3 lần lượt tại C' và D' . Dùng điểm $[\frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3), 0]$ làm tâm, vẽ cung tròn $C'D'$.



Hình 2.7. Các vòng tròn Mohr trong trường hợp ba chiều
(với $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$).

Tương tự, đối với giá trị cố định của n_2 , khử n_1 và n_3 từ những phương trình (2.88) đến (2.90) cho kết quả

$$\left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right]^2 + S_n^2 = \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + n_2^2 (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3) \quad (2.101)$$

Do đó, đối với giá trị n_2 đã cho, điểm (σ_n, S_n) tương ứng với giá trị n_2 này nằm trên cung tròn $E'F'$ như được biểu diễn trên hình 2.7. Để vẽ cung này, ta vẽ đường thẳng l_2 song song với trục tung S_n đi qua điểm $(\sigma_2, 0)$ và dựng thêm đường thẳng mới hợp với đường thẳng l_2 góc $\beta = \arccos(n_2)$. Đường thẳng này cắt các vòng tròn C_1 và C_3 lần lượt tại E' và F' . Dùng điểm $[\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3), 0]$ làm tâm, vẽ cung tròn $E'F'$.

Cuối cùng, đối với giá trị cố định của n_3 , khử n_1 và n_2 từ những phương trình (2.88) đến (2.90) cho kết quả

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

$$\left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right]^2 + S_n^2 = \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + n_3^2 (\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) \quad (2.102)$$

Do đó, đối với giá trị n_3 đã cho, điểm (σ_n, S_n) tương ứng với giá trị n_3 này nằm trên cung tròn A'B' như được biểu diễn trên hình 2.7. Để vẽ cung này, ta vẽ đường thẳng l_3 song song với trục tung S_n đi qua điểm $(\sigma_3, 0)$ và dựng thêm đường thẳng mới hợp với đường thẳng l_3 góc $\gamma = \arccos(n_3)$. Đường thẳng này cắt các vòng tròn C_1 và C_2 lần lượt tại B' và A'. Dùng điểm $\left[\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), 0 \right]$ làm tâm, vẽ cung tròn A'B'.

Đối với trạng thái ứng suất đã cho của điểm P, ta có thể xác định xác định bằng phương pháp hình học các thành phần ứng suất pháp σ_n và ứng suất tiếp S_n trên mặt nghiêng đi qua điểm này và có pháp tuyến đơn vị $\bar{n} = (n_1, n_2, n_3)$. Do chỉ có hai trong ba đại lượng n_1, n_2 , và n_3 là độc lập nên ta có thể dùng hai giá trị bất kỳ, thí dụ, n_1 và n_3 để xác định điểm (σ_n, S_n) tương ứng với hai giá trị này. Đối với giá trị cố định của n_1 , ta dựng cung tròn C'D'. Tương tự, đối với giá trị cố định của n_3 , ta dựng cung tròn A'B', như được biểu diễn trong hình 2.7. Giao điểm P' giữa hai cung tròn này, P', cho những giá trị σ_n và S_n tương ứng với các giá trị n_1, n_2 , và n_3 đã cho. Giá trị thứ ba, n_2 , được dùng để kiểm tra quy trình do cung thứ ba E'F' phải đi qua điểm P'.

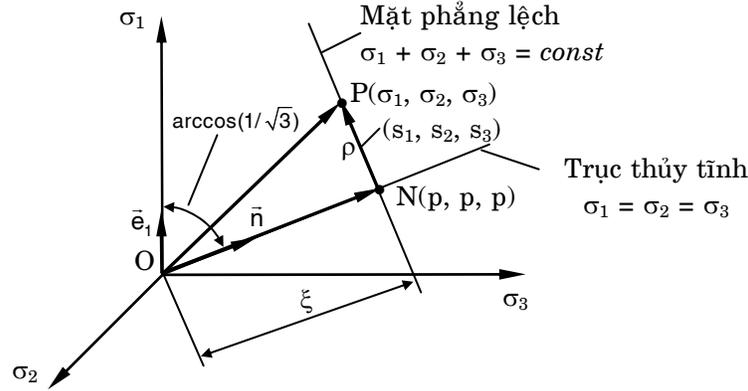
2.1.9. Không gian ứng suất Haigh–Westergaard

Sự biểu diễn trạng thái ứng suất ở một điểm bằng phương pháp hình học này thì rất hữu ích trong việc nghiên cứu lý thuyết dẻo và các tiêu chuẩn phá hủy. Do *tensor* ứng suất σ_{ij} có sáu thành phần độc lập, dĩ nhiên có thể khảo sát những thành phần này như là các tọa độ vị trí trong không gian sáu chiều. Tuy nhiên, điều này thì quá khó để xử lý. Sự lựa chọn đơn giản nhất là lấy ba ứng suất chính $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ như là ba tọa độ và biểu diễn trạng thái ứng suất ở một điểm như là một điểm trong không gian ứng suất ba chiều này. Không gian này được gọi là không gian ứng suất Haigh–Westergaard. Trong không gian ứng suất chính này, mỗi điểm có các tọa độ σ_1, σ_2 , và σ_3 sẽ biểu diễn một trạng thái ứng suất khả dĩ. Hai trạng thái ứng suất bất kỳ ở một điểm P khác nhau về các phương chính, nhưng có cùng các giá trị ứng suất chính sẽ được biểu diễn bởi cùng một điểm trong không gian ứng suất ba chiều. Điều này ngụ ý rằng loại biểu diễn không gian ứng suất này được tập trung chủ yếu vào hình học của ứng suất và không tập trung vào hướng của trạng thái ứng suất đối với vật thể.

Khảo sát đường thẳng ON đi qua gốc tọa độ và nghiêng đều so với ba trục chính, như được biểu diễn trong hình 2.8. Đối với mỗi điểm trên

Chương 2. Tiêu chuẩn chảy và tiêu chuẩn phá hủy

đường thẳng này tương ứng với trạng thái ứng suất có $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Đó là trạng thái ứng suất thủy tĩnh hay trạng thái ứng suất cầu, trong khi các ứng suất lệch, $s_1 = (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)/3, \dots$, đều bằng *zero*. Do đó, đường này được đặt tên là trục thủy tĩnh. Hơn nữa, mặt phẳng bất kỳ vuông góc với ON được gọi là mặt phẳng lệch. Mặt phẳng như thế có phương trình



Hình 2.8. Không gian ứng suất *Haigh-Westergaard*.

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sqrt{3}\xi \quad (2.103)$$

ở đây ξ là khoảng cách từ điểm gốc tọa độ đến mặt phẳng được đo dọc theo pháp tuyến ON. Mặt phẳng lệch đặc biệt đi qua điểm gốc 0,

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (2.104)$$

được gọi là mặt phẳng π .

Khảo sát một trạng thái ứng suất bất kỳ ở điểm đã cho với các thành phần ứng suất σ_1, σ_2 , và σ_3 . Trạng thái ứng suất này được biểu diễn bởi điểm $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ trong không gian ứng suất chính trong hình 2.8. Vector ứng suất \overline{OP} có thể được phân tích thành hai thành phần, thành phần \overline{ON} theo phương của vector đơn vị $\bar{n} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ và thành phần \overline{NP} vuông góc với \overline{ON} (song song với mặt phẳng π). Do đó,

$$|\overline{ON}| = \overline{OP} \cdot \bar{n} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (2.105)$$

$$|\overline{ON}| = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{l_1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}p \quad (2.106)$$

Các thành phần của vector \overline{NP} được cho bởi

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

$$\overline{NP} = \overline{OP} - \overline{ON} \quad (2.107)$$

Nhưng

$$\overline{ON} = |\overline{ON}| \bar{n} = (\rho, \rho, \rho) \quad (2.108)$$

Do đó, thay thế (2.108) vào (2.107),

$$\overline{NP} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - (\rho, \rho, \rho) = [(\sigma_1 - \rho), (\sigma_2 - \rho), (\sigma_3 - \rho)] \quad (2.109)$$

Dùng đẳng thức (2.55), ta rút gọn (2.109) dưới dạng

$$\overline{NP} = (s_1, s_2, s_3) \quad (2.110)$$

Do đó chiều dài ρ của *vector* \overline{NP} được cho bởi

$$\rho = |\overline{NP}| = (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{1/2} = \sqrt{2J_2} \quad (2.111)$$

hoặc, theo đẳng thức (2.73),

$$\rho = |\overline{NP}| = \sqrt{3} \tau_{\text{oct}} \quad (2.112)$$

Do đó, các *vector* \overline{ON} và \overline{NP} lần lượt mô tả các thành phần ứng suất thủy tĩnh ($\rho \delta_{ij}$) và các thành phần ứng suất lệch (s_{ij}) của trạng thái ứng suất (σ_{ij}) được biểu diễn bởi điểm P trong hình 2.8.

Bây giờ chúng ta khảo sát các hình chiếu của *vector* \overline{NP} và các hình chiếu của trục tọa độ σ_i trên mặt phẳng lệch như được vẽ trong hình 2.9. Trong hình này, các trục σ_1' , σ_2' , và σ_3' là các hình chiếu của các trục σ_1 , σ_2 , và σ_3 trên mặt phẳng lệch, và NP là hình chiếu của *vector* \overline{NP} trên mặt phẳng lệch. Do *vector* đơn vị \bar{e}'_1 của trục σ_1' có các hình chiếu trên các trục σ_1 , σ_2 , và σ_3 là

$$\bar{e}'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \right) (2, -1, -1),$$

trong trường hợp này hình chiếu NQ' của *vector* \overline{NP} lên trục σ_1' được cho bởi

$$NP' = \rho \cos \theta = \overline{NP} \cdot \bar{e}'_1 = (s_1, s_2, s_3) \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \right) (2, -1, -1)$$

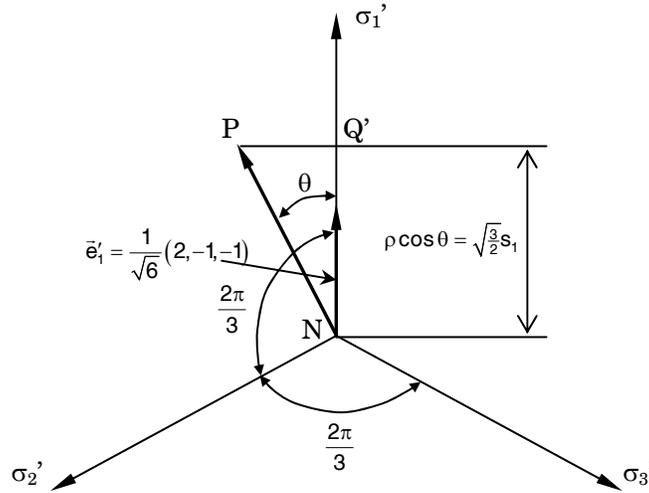
hoặc

Chương 2. Tiêu chuẩn chảy và tiêu chuẩn phá hủy

$$\rho \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{6}}(2s_1 - s_2 - s_3) \quad (2.113)$$

Thay $s_2 + s_3 = -s_1$ vào (2.113), ta có

$$\rho \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{2}}s_1 \quad (2.114)$$



Hình 2.9. Hình chiếu của trạng thái ứng điểm lên mặt phẳng lệch.

Thay ρ từ (2.111) vào (2.114), ta nhận được

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{s_1}{\sqrt{J_2}} \quad (2.115)$$

Dùng đồng nhất thức lượng giác $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ và thay $\cos\theta$ từ (2.115) sẽ dẫn đến kết quả

$$\cos 3\theta = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{s_1}{\sqrt{J_2}} \right)^3 - 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{s_1}{\sqrt{J_2}} \right)$$

hoặc

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2J_2^{3/2}}(s_1^3 - s_1 J_2) \quad (2.116)$$

Thay $J_2 = -(s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1)$ vào (2.116) ta được

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2J_2^{3/2}} \left[s_1^3 + s_1^2(s_2 + s_3) + s_1s_2s_3 \right] \quad (2.117)$$

Cuối cùng, thay $s_2 + s_3 = -s_1$ và $J_3 = s_1s_2s_3$ vào (2.113), ta nhận được

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \quad (2.118)$$

Phương trình (2.118) chỉ ra rằng giá trị của $\cos 3\theta$ là một bất biến được liên hệ với các bất biến của *tensor* ứng suất lệch J_2 và J_3 . Bây giờ ta thấy rằng một trạng thái ứng suất $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ có thể được biểu diễn bởi (ξ, ρ, θ) , chúng được xem như là các tọa độ *Haigh–Westergaard*. Sau này, trong những thảo luận về chảy dẻo và các điều kiện phá hủy, ξ, ρ , và θ được dùng như là những thông số được cần đến để mô tả các hàm chảy dẻo và phá hủy trong không gian ứng suất. Các mối quan hệ giữa $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ và (ξ, ρ, θ) có thể được thiết lập trong cách thức sau đây.

Từ phương trình (2.115), ta biết

$$s_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \cos \theta \quad (2.119)$$

Tương tự, các thành phần ứng suất lệch s_2 và s_3 cũng có thể thu được theo góc θ . Từ hình 2.9, những thành phần này được cho bởi

$$s_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \theta \right) \quad (2.120)$$

$$s_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \theta \right) \quad (2.121)$$

Các quan hệ này chỉ được thỏa chỉ khi góc nằm trong miền giá trị (đối với $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$)

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \quad (2.122)$$

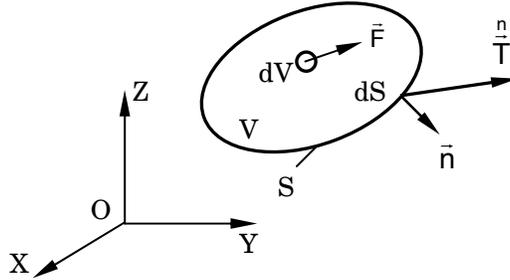
Do các phương trình (2.58), (2.103), (2.111), (2.119), (2.120), và (2.121), ba ứng suất chính của *tensor* ứng suất σ_{ij} được cho bởi

Chương 2. Tiêu chuẩn chảy và tiêu chuẩn phá hủy

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} p \\ p \\ p \end{Bmatrix} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \cos(\theta - 2\pi/3) \\ \cos(\theta + 2\pi/3) \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \xi \\ \xi \\ \xi \end{Bmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}} \rho \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \cos(\theta - 2\pi/3) \\ \cos(\theta + 2\pi/3) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.123)$$

2.1.10. Phương trình cân bằng

Đối với thể tích vật liệu bất kỳ V và được bao quanh bởi diện tích S , như được chỉ ra trong hình 2.10, ta có phương trình cân bằng sau:



Hình 2.10. Cân bằng của vật thể.

$$\int_S \bar{T}_i dS + \int_V F_i dV = 0 \quad (2.124)$$

Thay thế \bar{T} từ (2.18), phương trình (2.124) có thể được viết như

$$\int_S \sigma_{ij} n_j dS + \int_V F_i dV = 0 \quad (2.125)$$

Dùng định lý *divergence*

$$\int_S u_j n_j dS = \int_V u_{j,j} dV \quad (2.126)$$

Phương trình (2.125) có thể được biểu diễn như

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + F_i) dV = 0 \quad (2.127)$$

Vì thể tích V là bất kỳ, nên

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (2.128)$$

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

Phương trình (2.128) có thể được khai triển theo các ký hiệu chỉ số (x, y, z)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= 0\end{aligned}\quad (2.129)$$

2.2. Tiêu chuẩn chảy độc lập với ứng suất thủy tĩnh

2.2.1. Các khảo sát tổng quát

Tiêu chuẩn chảy định nghĩa các giới hạn đàn hồi của vật liệu dưới các trạng thái ứng suất phức hợp. Như chúng ta biết, giới hạn đàn hồi trong thí nghiệm kéo đơn trục là ứng suất chảy σ_0 , trong lúc trong thí nghiệm trượt thuần túy, là ứng suất tiếp chảy τ_0 . Tổng quát, giới hạn đàn hồi hoặc ứng suất chảy là một hàm của trạng thái ứng suất, σ_{ij} . Do đó, điều kiện chảy có thể được biểu diễn tổng quát như

$$f(\sigma_{ij}, k_1, k_2, \dots) = 0 \quad (2.130)$$

ở đây k_1, k_2, \dots là những hằng số vật liệu giống như σ_0 và τ_0 , chúng được xác định từ thí nghiệm.

Đối với những vật liệu đẳng hướng, phương của các ứng suất chính thì không phụ thuộc vào vật liệu, và những giá trị của các ứng suất chính đủ để mô tả trạng thái ứng suất duy nhất. Do đó một tiêu chuẩn chảy có dạng quan hệ như sau

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, k_1, k_2, \dots) = 0 \quad (2.131)$$

Chúng ta đã biết rằng ba ứng suất chính σ_1, σ_2 , và σ_3 có thể được biểu diễn dưới dạng các tổ hợp của ba bất biến ứng suất I_1, J_2 và J_3 , ở đây I_1 là bất biến thứ nhất của *tensor* ứng suất σ_{ij} và J_2 và J_3 là các bất biến thứ hai và thứ ba của *tensor* ứng suất lệch s_{ij} . Do đó, phương trình (2.131) có thể được thay thế bởi

$$f(I_1, J_2, J_3, k_1, k_2, \dots) = 0 \quad (2.132)$$

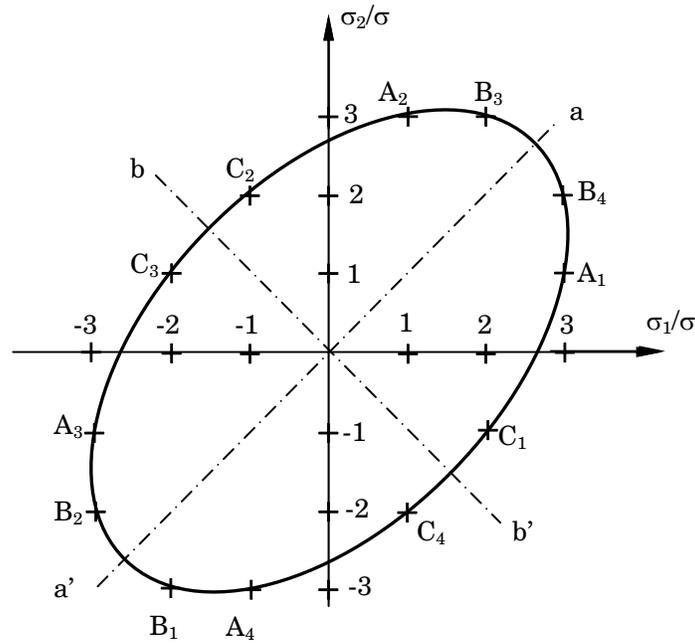
Hơn nữa, ba bất biến chính này được liên hệ trực tiếp với các tọa độ ξ, ρ, θ trong không gian ứng suất [xem phương trình (2.123)]. Do đó, phương trình (2.132) cũng có thể được viết như

Chương 2. Tiêu chuẩn chảy và tiêu chuẩn phá hủy

$$f(\xi, \rho, \theta, k_1, k_2, \dots) = 0 \quad (2.133)$$

Các tiêu chuẩn chảy của các loại vật liệu nên được xác định bằng thực nghiệm. Một sự kiện thí nghiệm quan trọng đối với các kim loại, được chỉ ra bởi *Bridgman* và những người khác [xem *Hill* (1950)], là ảnh hưởng của ứng suất thủy tĩnh đến chảy dẻo là không đáng kể. Sự không có ảnh hưởng của ứng suất thủy tĩnh có nghĩa là hàm chảy dẻo có thể được rút gọn đến dạng

$$f(J_2, J_3, k_1, k_2, \dots) = 0 \quad (2.134)$$



Hình 2.11. Quỹ đạo chảy trên mặt phẳng σ_1 - σ_2 được tạo từ điểm khảo sát A_1 .

Một đường cong ứng suất-biến dạng trong kéo đơn trục, tự nó, không cung cấp một thông tin nào về ứng xử dưới trạng thái ứng suất phức hợp. Các thí nghiệm ứng suất phức hợp, tương tự với kéo đơn trục, được cho là những thí nghiệm tỷ lệ. Trong những thí nghiệm này, tất cả ứng suất được gia tăng một cách tỷ lệ. Thí dụ, trong một trạng thái ứng suất song trục, σ_1 và σ_2 được gia tăng sao cho duy trì tỷ số σ_1/σ_2 là hằng. Có vẻ như chúng ta sẽ cần biểu diễn một số thí nghiệm để xây dựng bề mặt (quỹ tích) chảy dẻo. Tuy nhiên, chúng ta sẽ chỉ ra rằng một điểm trên

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

bề mặt chảy có thể đưa đến sự gia tăng mười hai điểm (hình 2.11) nếu vật liệu thuộc loại: (1) là đẳng hướng, (2) là độc lập với ứng suất thủy tĩnh, và (3) có những ứng suất chảy bằng nhau trong kéo và nén.

Bây giờ giả sử rằng vật liệu chảy dẻo ở trạng thái ứng suất $(3\sigma, \sigma, 0)$. Điểm $A_1(3\sigma, \sigma, 0)$ trong hình 2.11 nằm trên bề mặt chảy và trên mặt phẳng tọa độ $\sigma_1\text{-}\sigma_2$. Nếu vật liệu là đẳng hướng, ta nên gán lại tên cho các trục theo cách khác. Do đó ta kết luận rằng điểm $A_2(\sigma, 3\sigma, 0)$ cũng nằm trên bề mặt chảy. Hơn nữa, nếu đáp ứng của vật liệu tương tự với kéo và nén, các điểm $A_3(-3\sigma, -\sigma, 0)$ và $A_4(-\sigma, -3\sigma, 0)$ cũng sẽ nằm trên bề mặt chảy. Bây giờ khảo sát A_1 và A_2 hoặc A_3 và A_4 , ta thấy rằng chúng là các ảnh đối xứng gương qua đường thẳng aa' chia đôi góc phần tư thứ nhất trên mặt phẳng tọa độ $\sigma_1\text{-}\sigma_2$. Tương tự, A_1 và A_4 hoặc A_2 và A_3 là đối xứng nhau qua đường thẳng bb' vuông góc với đường thẳng aa' . Do đó, có hai trục đối xứng cho quỹ đạo chảy.

Ngoài ra, nếu ứng suất thủy tĩnh không ảnh hưởng đến chảy dẻo, ta có thể cộng thêm một trạng thái ứng suất thủy tĩnh, gọi là (h, h, h) , vào trạng thái ứng suất chảy để tạo ra một điểm chảy khác. Thí dụ, nếu một áp lực thủy tĩnh $(-3\sigma, -3\sigma, -3\sigma)$ được cộng thêm vào điểm ứng suất chảy $(3\sigma, \sigma, 0)$, thì trạng thái ứng suất $(0, -2\sigma, -3\sigma)$ là một điểm chảy khác. Bây giờ, ta thay đổi các tọa độ của nó đến mức một điểm chảy $B_1(-2\sigma, -3\sigma, 0)$ thu được trên mặt phẳng tọa độ $\sigma_1\text{-}\sigma_2$. Tương tự, ta có thể nhận được điểm chảy mới khác $C_1(2\sigma, -\sigma, 0)$ trên mặt phẳng tọa độ $\sigma_1\text{-}\sigma_2$ bằng cách thêm $(-\sigma, -\sigma, -\sigma)$ vào $(3\sigma, \sigma, 0)$ và thay đổi các tọa độ một cách tương ứng. Cuối cùng, do tính đối xứng, các điểm B_1 và C_1 , như điểm A_1 , có thể sinh ra bốn điểm B_1, B_2, B_3, B_4 , và C_1, C_2, C_3, C_4 một cách tương ứng nằm trên quỹ đạo chảy dẻo. Bây giờ, ta đã tạo ra một tập hợp mười hai điểm chảy trên mặt phẳng tọa độ $\sigma_1\text{-}\sigma_2$ từ một điểm khảo sát. Nói các điểm chảy này theo một đường cong trơn, ta sẽ dựng ra một quỹ đạo chảy như được vẽ trong hình 2.11. Chú ý rằng quỹ đạo này được tạo từ chỉ một điểm khảo sát, nó có thể được xem như một sự xấp xỉ của hàm chảy trong trạng thái ứng suất song trục của vật liệu đẳng hướng, với sự đáp ứng tương tự như kéo và nén, và áp lực thủy tĩnh không có ảnh hưởng đến chảy dẻo.

Chúng ta đã bàn luận đến mức dạng tổng quát và vài nét đặc trưng của hàm chảy. Các tiêu chuẩn chảy rất hữu dụng của *Tresca* và *von Mises* cho các kim loại sẽ được nghiên cứu trong những phần tiếp theo.

2.2.2. Tiêu chuẩn chảy *Tresca*

Chương 2. Tiêu chuẩn chảy và tiêu chuẩn phá hủy

Về mặt lịch sử, tiêu chuẩn chảy đầu tiên cho trạng thái ứng suất phức hợp của kim loại đã được đề nghị vào năm 1864 bởi *Tresca*, ông ấy đã đề xuất rằng chảy dẻo sẽ xảy ra khi ứng suất trượt cực đại của điểm đạt đến giá trị giới hạn k . Phát biểu tiêu chuẩn này theo các ứng suất chính (xem mục 2.1.4), một nửa giá trị tuyệt đối lớn nhất của các hiệu giữa các cặp ứng suất chính phải bằng k lúc chảy dẻo, nghĩa là

$$\text{Max}\left(\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3|, \frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_1|\right) = k \quad (2.135)$$

ở đây hằng số vật liệu k có thể xác định từ thí nghiệm kéo đơn trục. Thế thì

$$k = \frac{\sigma_0}{2} \quad (2.136)$$

trong đó σ_0 là ứng suất chảy trong thí nghiệm kéo đơn trục,

Có sáu biểu thức khác nhau trong những miền khác nhau của mặt phẳng σ_1 - σ_2 , phụ thuộc vào các độ lớn tương đối và các dấu của σ_1 và σ_2 (xem hình 2.12). Trong góc phần tư thứ nhất, giữa trục σ_1 và đường phân giác của hai trục, theo quy ước thứ tự của các ứng suất chính ta có

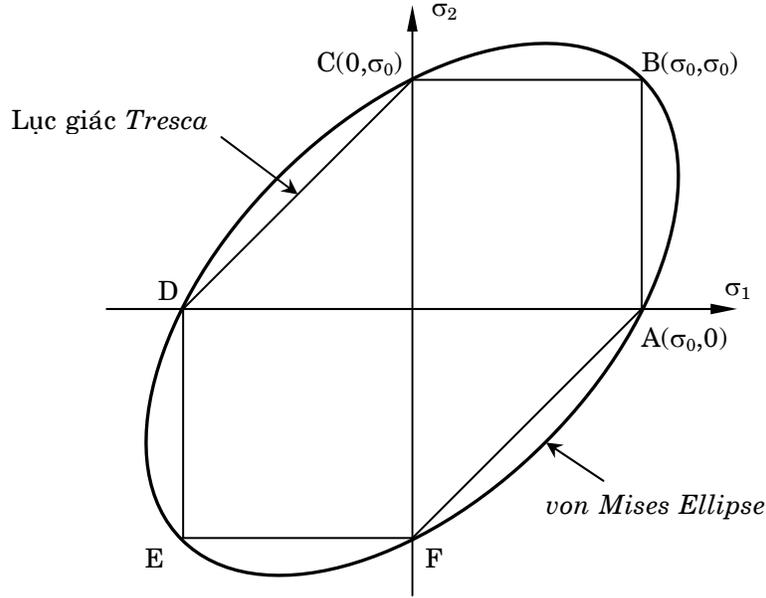
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}$$

Do đó, tiêu chuẩn chảy trở thành $\sigma_1 = \sigma_0$ và tạo ra đường thẳng AB. Trong cùng góc phần tư thứ nhất này, giữa đường phân giác của hai trục và trục σ_2 , ta có

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_2}{2}$$

và tiêu chuẩn chảy $\sigma_2 = \sigma_0$ được mô tả bởi đường thẳng BC. Trong góc phần tư thứ hai, ta có

Lý thuyết dẻo kỹ thuật



Hình 2.12. Các tiêu chuẩn chảy phù hợp trong kéo trên mặt phẳng tọa độ $\sigma_3 = 0$.

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}$$

Do đó, tiêu chuẩn chảy trở thành $\sigma_2 - \sigma_1 = \sigma_0$, và ta thu đường thẳng CD. Bằng các thủ tục tương tự cho các góc phần tư thứ ba và thứ tư, ta có thể tìm ra rằng quỹ đạo chảy cho ứng suất phẳng là lục giác ABCDEF như được vẽ trong hình 2.12.

Để biểu diễn bề mặt chảy trong không gian ứng suất chính, phương trình (2.123) được dùng ở đây cho các ứng suất chính. Giả sử thứ tự của các ứng suất chính là $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, ta có thể viết lại phương trình (2.135) dưới dạng

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \left[\cos \theta - \cos \left(\theta + \frac{2}{3} \pi \right) \right] = k \quad (0 \leq \theta \leq 60^\circ) \quad (2.137)$$

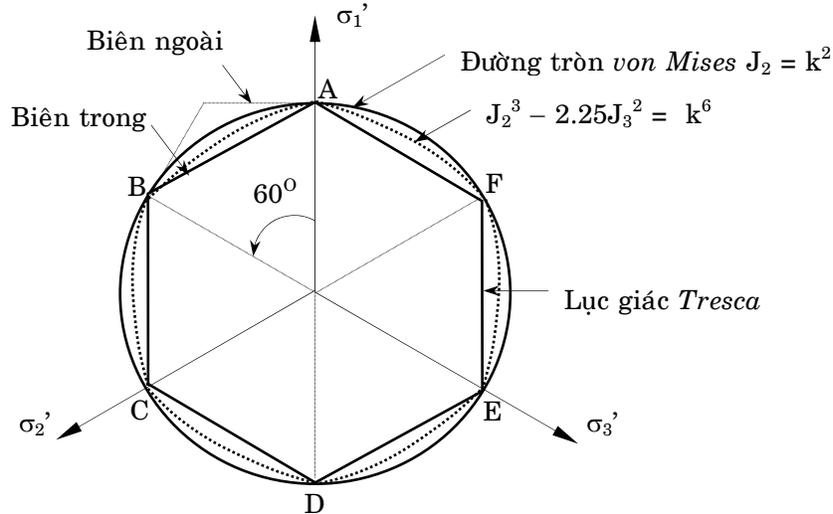
Khai triển phương trình này và chú ý phương trình (2.136), ta thu được tiêu chuẩn chảy *Tresca* theo các bất biến ứng suất,

$$f(J_2, \theta) = 2\sqrt{J_2} \sin \left(\theta + \frac{1}{3} \pi \right) - \sigma_0 = 0 \quad (0 \leq \theta \leq 60^\circ) \quad (2.138)$$

Chương 2. Tiêu chuẩn chảy và tiêu chuẩn phá hủy

hoặc theo các biến ξ, ρ, θ ,

$$f(\rho, \theta) = \sqrt{2}\rho \sin\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right) - \sigma_0 = 0 \quad (2.139)$$



Hình 2.13. Các tiêu chuẩn chảy trên mặt phẳng lệch π .

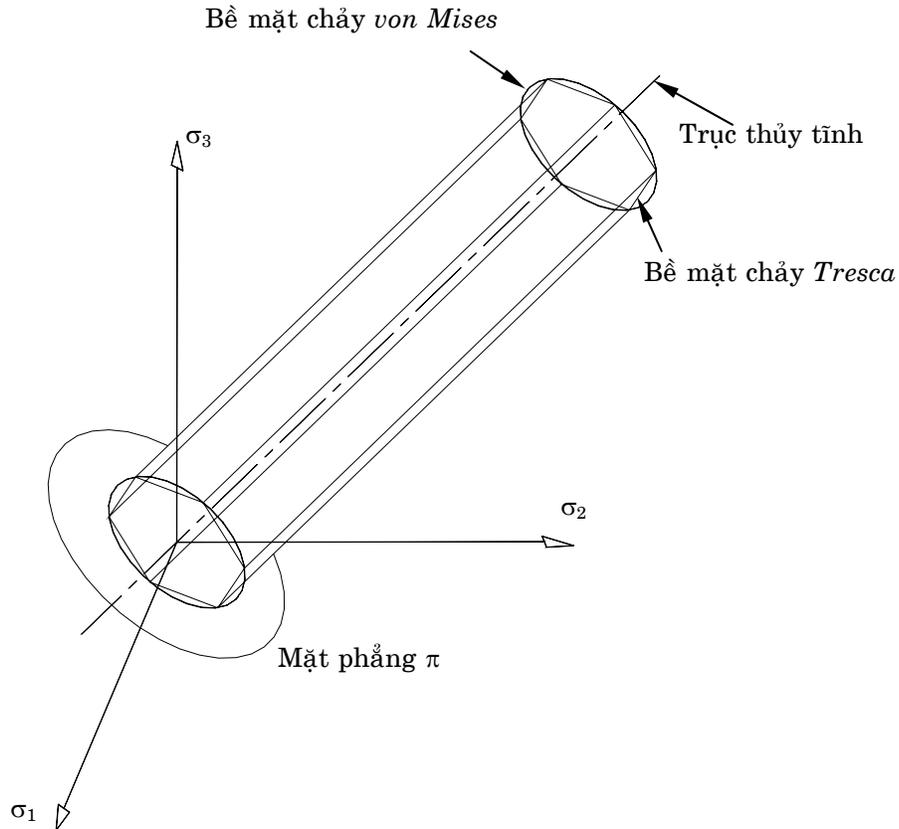
Do áp lực thủy tĩnh không ảnh hưởng đến bề mặt chảy, phương trình (2.138) hoặc (2.139) phải độc lập với ứng suất thủy tĩnh I_1 hay ξ , nó mô tả một mặt trụ có trục song song với trục thủy tĩnh. Trên mặt phẳng lệch, phương trình (2.138) hoặc (2.139) biểu diễn một đường thẳng đi qua điểm A (với $\theta = 0$, và $\rho = \sqrt{2/3}\sigma_0$) và điểm B (với $\theta = 60^\circ$, và $\rho = \sqrt{2/3}\sigma_0$), như được biểu diễn trong hình 2.13. Đây là một *sector* của quỹ đạo chảy trên mặt phẳng lệch. Tương tự, ta có năm đường thẳng trong năm *sector* còn lại của quỹ đạo chảy trên mặt phẳng lệch, và thu được một lục giác đều ABCDEF. Bây giờ chúng ta có thể thấy rằng bề mặt chảy là một lăng trụ lục giác đều trong không gian ứng suất chính, như được vẽ trong hình 2.14. Quỹ đạo chảy đối với trạng thái ứng suất song trục (trạng thái ứng suất phẳng) được biểu diễn trong hình 2.12 là giao tuyến của mặt trụ với mặt phẳng tọa độ $\sigma_3 = 0$.

Do vật liệu đẳng hướng, nghĩa là không cần vẽ bề mặt chảy trong không gian ứng suất tổng quát (σ_{ij}). Tuy nhiên, vài giao tuyến giữa các mặt phẳng đặc biệt với mặt chảy trong không gian ứng suất tổng quát có tầm quan trọng đáng kể, thí dụ, giao tuyến với mặt phẳng $\sigma_x - \tau_{xy}$. Giao

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

tuyến này là quỹ đạo chảy đối với ứng suất pháp và tiếp kết hợp (hình 2.15), nó là một *ellipse*

$$\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2 = \sigma_0^2 \quad (2.140)$$

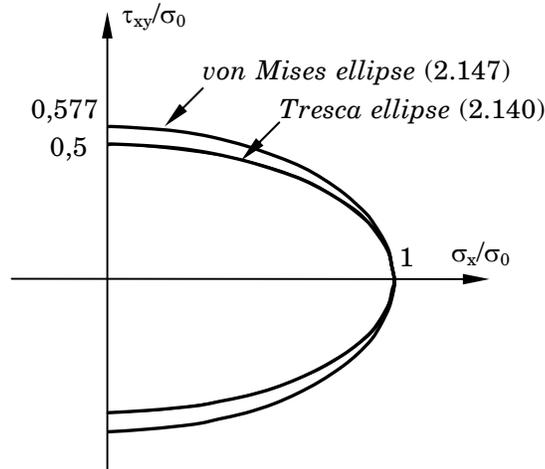


Hình 2.14. Các bề mặt chảy trong không gian ứng suất chính.

Cần chú ý rằng dạng bất biến của (2.137) cũng có thể được biểu diễn một cách rõ ràng theo các bất biến J_2 và J_3 như

$$f(J_2, J_3) = 4J_2^3 - 27J_3^2 - 36k^2J_2^2 + 96k^4J_2 - 64k^6 = 0 \quad (2.141)$$

Chương 2. Tiêu chuẩn chảy và tiêu chuẩn phá hủy



Hình 2.15. Giao tuyến giữa mặt phẳng σ_x - τ_{xy} với mặt chảy.

2.2.3. Tiêu chuẩn chảy *von Mises*

Mặc dù tiêu chuẩn ứng suất tiếp cực đại là đơn giản, nó không phản ánh ảnh hưởng của ứng suất chính thứ hai. Ứng suất tiếp bất diện hoặc năng lượng biến đổi hình dáng là một sự lựa chọn thích hợp khác đối với ứng suất tiếp cực đại như là biến chính làm chảy dẻo loại vật liệu độc lập với ứng suất thủy tĩnh. Tiêu chuẩn *von Mises*, được đề nghị từ 1913, được dựa trên sự lựa chọn này. Tiêu chuẩn này phát biểu rằng chảy dẻo sẽ bắt đầu khi ứng suất tiếp bất diện đạt đến giá trị giới hạn k . Từ đẳng thức (2.73), tiêu chuẩn này có dạng

$$\tau_{\text{oct}} = \sqrt{\frac{2}{3}J_2} = \sqrt{\frac{2}{3}}k \quad (2.142)$$

nó được rút gọn về dạng đơn giản

$$f(J_2) = J_2 - k^2 = 0 \quad (2.143)$$

hoặc được trình bày theo các ứng suất chính,

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6k^2 \quad (2.144)$$

ở đây k là ứng suất chảy trong trượt thuần túy. Chảy dẻo sẽ xảy ra trong kéo đơn trục khi $\sigma_1 = \sigma_0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Thay các giá trị này vào (2.144), ta tìm được

$$k = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (2.145)$$

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

Như đã bàn luận trước đây đối với vật liệu độc lập với ứng suất thủy tĩnh, tiêu chuẩn chảy cho vật liệu đẳng hướng phải có dạng tổng quát của phương trình (2.134). Dạng toán đơn giản nhất tương thích với yêu cầu này là phương trình (2.143). Phương trình này mô tả hình trụ tròn mà giao tuyến của nó với mặt phẳng lệch π là đường tròn có bán kính $\rho = \sqrt{2}k$.

Chú ý rằng hằng số k , trong cả hai phương trình (2.143) đối với tiêu chuẩn *von Mises* và (2.135) đối với tiêu chuẩn *Tresca*, là ứng suất chảy trong trượt thuần túy. Tuy nhiên, những mối quan hệ giữa ứng suất chảy trong kéo đơn trục, σ_0 , và thông số k được xác định bởi (2.136) của tiêu chuẩn *Tresca* và bởi (2.145) của tiêu chuẩn *von Mises* là khác nhau. Nếu hai tiêu chuẩn được làm cho phù hợp với ứng suất chảy kéo đơn trục σ_0 , hệ số của ứng suất chảy trong trượt, k , giữa tiêu chuẩn *von Mises* và *Tresca* là $2/\sqrt{3} = 1,15$, và về đồ thị, đường tròn *von Mises* sẽ ngoại tiếp với lục giác *Tresca* như được vẽ trong hình 2.13. Tuy nhiên, nếu hai tiêu chuẩn được làm cho phù hợp với trường hợp trượt thuần túy (cùng giá trị k), vòng tròn sẽ nội tiếp lục giác.

Tiêu chuẩn *von Mises* đối với trạng thái ứng suất song trục (ứng suất phẳng) được mô tả bởi giao tuyến của hình trụ tròn với mặt phẳng tọa độ $\sigma_3 = 0$, nghĩa là,

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_0^2 \quad (2.146)$$

Đây là một *ellipse* và nó được biểu diễn trong hình 2.12. Giao tuyến của bề mặt chảy *von Mises* trong không gian ứng suất tổng quát với mặt phẳng $\sigma_x - \tau_{xy}$ cũng là một *ellipse*, phương trình của nó có dạng

$$\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_0^2 \quad (2.147)$$

như được biểu diễn trong hình 2.15.