

Chương 1

GIỚI THIỆU

- 1.1. Giới thiệu**
- 1.2. Ứng xử dẻo trong kéo nén đơn trực**
- 1.3. Mô hình ứng xử đơn trực trong chảy dẻo**
- 1.4. Ký hiệu chỉ số**

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

1.1. Giới thiệu

1.1.1. Tầm quan trọng của chảy dẻo trong kết cấu

Việc thiết kế kỹ thuật các kết cấu lớn là một quá trình gồm hai giai đoạn. Trường nội lực (ứng suất) bên trong vật liệu cấu trúc phải được xác định ở giai đoạn đầu tiên, và giai đoạn thứ hai là xác định đáp ứng của vật liệu dưới tác động của trường ứng suất đó. Giai đoạn một bao gồm một sự phân tích ứng suất tác động bên trong các phân tố kết cấu; giai đoạn hai liên quan đến các đặc tính của vật liệu kết cấu. Mỗi quan hệ tuyến tính giữa ứng suất và biến dạng bên trong vật liệu lý tưởng hóa đã hình thành cơ sở toán học cho *lý thuyết đàn hồi*, lý thuyết này được áp dụng rộng rãi cho những vật liệu thật để đánh giá ứng suất hoặc biến dạng trong các phân tố kết cấu dưới điều kiện tải làm việc cụ thể. Các ứng suất này bị giới hạn nhỏ hơn *ứng suất cho phép*, ứng suất này được tính như một phần của ứng suất chảy vật liệu. Do đó, một thiết kế an toàn sẽ thu được không phải do tính toán và sự hiểu biết các đặc tính vật liệu một cách đầy đủ mà dựa vào kinh nghiệm thu thập được trong vài thập kỷ hay vài thế kỷ.

Một kết cấu thực là một vật thể rất phức tạp với một trạng thái ứng suất cực kỳ phức tạp. Nhiều ứng suất thứ cấp xuất hiện do chế tạo, lắp ráp và định vị chi tiết. Sự tổ hợp của ứng suất ban đầu chưa biết, các ứng suất thứ cấp, và sự tập trung ứng suất và sự phân bố lại do những sự bất liên tục của kết cấu đã không tuân theo một tính toán lý tưởng hóa dựa trên lý thuyết đàn hồi. Lý thuyết dẻo mô tả một sự mở rộng cần thiết của lý thuyết đàn hồi và đề cập đến việc tính toán ứng suất và biến dạng trong kết cấu biến dạng dẻo cũng như những phạm vi biến dạng đàn hồi. Nó cung cấp các đánh giá thực tế hơn về các khả năng mang tải của kết cấu và cung cấp một sự hiểu biết tốt hơn về ứng xử của kết cấu đối với các lực được gây ra trong vật liệu. Do đó, một sự hiểu biết về vai trò của các biến số cơ học thích hợp, chúng định nghĩa sự phản ứng của vật liệu với lực tác động, là cần thiết cho kỹ sư trong việc thiết kế cấu trúc. Những mối quan hệ ứng suất - biến dạng và các ứng dụng của chúng cho các bài toán kỹ thuật kết cấu sẽ được bàn luận trong những chương sau này. Sự linh hội kiến thức này càng nhiều sẽ làm cho bản thiết kế kết cấu càng chính xác và hoàn hảo hơn.

1.1.2. Mục tiêu

Cả hai lý thuyết đàn hồi và lý thuyết dẻo đều là hiện tượng tự nhiên. Chúng là sự chính thức hóa các quan sát thí nghiệm về ứng xử vĩ

Chương 1. Giới thiệu

mô của vật rắn biến dạng và không quan tâm sâu sắc đến cơ sở vật lý và hóa học của ứng xử đó.

Nội dung đầy đủ của lý thuyết và ứng dụng của chảy dẻo là phải xử lý hai khía cạnh quan trọng như nhau: kỹ thuật tổng quát được dùng trong việc khai triển các mối quan hệ ứng suất-biến dạng cho những vật liệu đàn-dẻo với sự biến cứng cũng như biến mềm; và qui trình giải số tổng quát để giải một bài toán kết cấu đàn-dẻo tổng quát dưới tác động của tải hay chuyển vị cưỡng bức thay đổi theo qui luật xác định.

Nhiệm vụ đầu tiên của lý thuyết dẻo là thiết lập các mối quan hệ giữa ứng suất và biến dạng dưới trạng thái ứng suất phức tạp để có thể mô tả một cách thỏa đáng biến dạng dẻo khảo sát được. Đây là nhiệm vụ khó khăn. Tuy nhiên, các quy luật biến dạng của kim loại, tổng quát, phù hợp tốt với chứng cứ thí nghiệm đã được thiết lập vững chắc và được dùng thành công trong các ứng dụng kỹ thuật. Hơn nữa, trong những năm gần đây, các phương pháp chảy dẻo cũng đã được mở rộng và được ứng dụng để nghiên cứu ứng xử biến dạng của các vật liệu địa chất như đá, đất và bê tông. Sự mở rộng của lý thuyết dẻo cho các vật liệu phi kim loại chắc chắn là vấn đề nghiên cứu tích cực nhất trong lĩnh vực cơ học vật liệu hiện nay, và các mô hình vật liệu khác nhau đã được xây dựng.

Nhiệm vụ thứ hai của lý thuyết là xây dựng các kỹ thuật số cho việc thực thi những mối quan hệ ứng suất-biến dạng trong tính toán kết cấu. Do bản chất phi tuyến của các quy luật biến dạng dẻo, các phép giải của các phương trình cơ sở của cơ học vật rắn chắc chắn sẽ đưa đến những khó khăn đáng kể. Tuy nhiên, trong những năm gần đây, sự phát triển nhanh chóng của các máy tính tốc độ cao và các kỹ thuật hiện đại của phương pháp phân tử hữu hạn đã cung cấp cho kỹ sư một công cụ mạnh mẽ để giải hầu hết các bài toán kết cấu phi tuyến bất kỳ. Điều này cũng kích thích các phát triển mới hơn và những ứng dụng rộng hơn của lý thuyết dẻo cổ điển. Hoạt động nghiên cứu trong lĩnh vực này đã gia tăng một cách dữ dội trong thập niên cuối.

Tài liệu này cố gắng cung cấp một sự mô tả súc tích về các khái niệm cơ bản của lý thuyết và các tiến triển mới nhất cũng như các thực thi bằng máy tính của nó.

1.2. Ứng xử dẻo trong kéo néo đơn trực

Loại gia tải đơn giản nhất được giới thiệu bởi điều kiện ứng suất đơn trực. Ta có hai loại thí nghiệm để đạt được điều kiện này: thí nghiệm

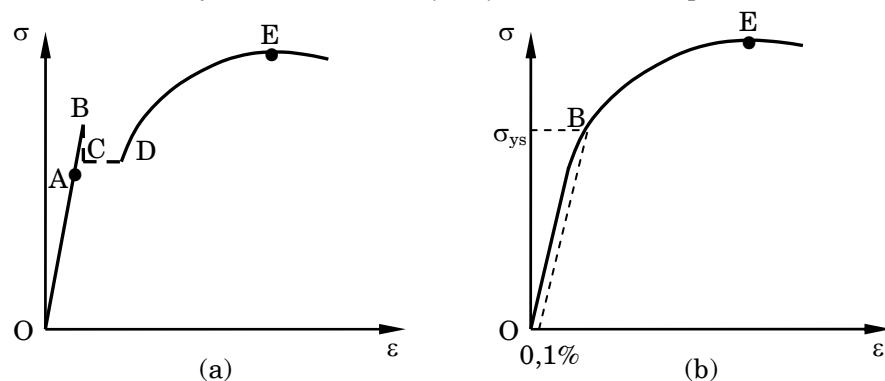
Lý thuyết dẻo kĩ thuật

kéo đơn trục sẽ cho các ứng suất chính $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, và thí nghiệm nén đơn trục sẽ cho các ứng suất chính $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 < 0$. Đồ thị ứng suất-biến dạng đơn trục nổi tiếng, trong đó ứng suất chính hướng trục σ_1 (hoặc σ_3) được vẽ theo biến dạng dài hướng trục ε_1 (hoặc ε_3) tạo ra một sự mô tả hữu ích ứng xử dẻo cũng như ứng xử đàn hồi.

1.2.1. Gia tải đều

Hình 1.1a biểu diễn đường cong điển hình cho mẫu kéo đơn trục bằng thép ít carbon. Miền đàn hồi đầu tiên nói chung xuất hiện như một đường thẳng OA với điểm A xác định *giới hạn tỉ lệ*. Khi biến dạng tăng thêm, mối quan hệ giữa ứng suất và biến dạng không còn tuyến tính nữa nhưng vật liệu vẫn còn đàn hồi, và theo sự cất tải, mẫu trở lại chiều dài gốc của nó. Điểm ứng suất cực đại B, ở đó tải có thể được tác động mà không gây ra bất cứ sự biến dạng thường xuyên nào, xác định *giới hạn đàn hồi*. Điểm B cũng được gọi là điểm chảy, vì nó biểu thị sự bắt đầu biến dạng dẻo hay biến dạng không hồi phục. Thông thường có sự khác nhau nhỏ giữa giới hạn tỉ lệ, A, và giới hạn đàn hồi, B. Thép ít carbon cho điểm chảy trên B và điểm chảy dưới C. Qua khỏi điểm C, biến dạng gia tăng trong điều kiện tải hằng. Ứng xử vật liệu trong miền phẳng CD được xem như *chảy dẻo*. Tuy nhiên, đối với hầu hết kim loại sẽ không có điểm chảy nhọn hoặc chảy dẻo được nhận thấy rõ, và ứng suất chảy thường được xác định bởi *ứng suất chảy offset*, σ_{ys} , tương ứng với giá trị 0,1% của biến dạng như hình 1.1b. Ứng suất chảy qui ước này được xem như *ứng suất chảy ban đầu*.

Trên điểm chảy, đáp ứng của vật liệu bao gồm cả đàn hồi và chảy dẻo. Độ dốc của đường cong giảm đều, đơn điệu, và cuối cùng sự phá hủy của mẫu thử sẽ xảy ra ở điểm E. Vật liệu dẻo như thép ít carbon sẽ chịu



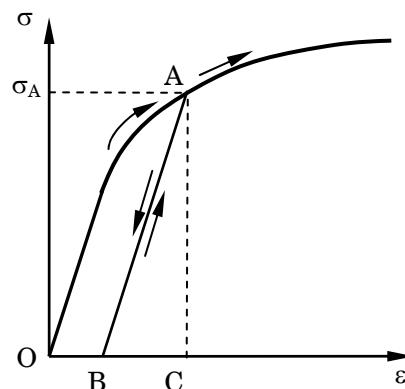
Hình 1.1. Biểu đồ ứng suất-biến dạng của thép ít carbon (a) và của một số kim loại khác.

biến dạng lớn mà không bị phá hủy. Mặt khác, gang là *vật liệu giòn* do nó bị phá hủy sau biến dạng rất nhỏ. Nói chung, phá hủy của kim loại gồm có hai dạng: dạng nứt tách như gang và dạng nứt trượt như thép ít carbon. Các đặc trưng phá hủy của các vật liệu địa chất thì phức tạp hơn rất nhiều. Chúng cũng phụ thuộc vào trạng thái tải tác động: thí dụ, bê tông thể hiện ứng xử giòn dưới tác động của tải kéo, nhưng dưới tác động của tải nén, bê tông có thể biểu thị một mức độ dẻo trước khi bị phá hủy.

1.2.2. Cắt tải và chất tải lại

Bây giờ chúng ta khảo sát thí nghiệm trong đó mẫu đầu tiên được gia tải một cách đều đặn đến giá trị vượt quá điểm chảy đầu tiên và rồi cắt tải hoàn toàn. Ứng xử này được biểu thị trên hình 1.2. Khi ứng suất được giảm, biến dạng sẽ giảm theo một đường cắt tải gần như dàn hồi AB song song với đường dàn hồi đầu tiên của đường cong. Khi tải về không ở cuối đường cắt tải, biến dạng không bằng không; vẫn còn biến dạng dư OB. Biến dạng không hồi phục OB được xem là biến dạng dẻo trong khi biến dạng hồi phục BC là biến dạng dàn hồi. Bây giờ, nếu mẫu này được gia tải lại, đường cong ứng suất-biến dạng sẽ theo đường gia tải lại BA, nó trùng với đường cắt tải AB. Do đó, vật liệu biến dạng dàn hồi cho đến khi đạt đến giá trị ứng suất cực đại trước khi cắt tải ở điểm A. Ứng suất σ_A được xem như là *ứng suất chảy tiếp sau*, vượt quá ứng suất này biến dạng dẻo thêm nữa sẽ được gây ra và đường cong ứng suất-biến dạng lại theo đường cong cong đối với trường hợp gia tải đơn điệu.

Đối với hầu hết các vật liệu, sau khi đạt đến điểm chảy đầu tiên, đường cong ứng suất-biến dạng tiếp tục tăng mặc dù độ dốc giảm dần, cho đến khi độ dốc giảm đến không và phá hủy xảy ra. Do đó, ứng suất chảy tiếp



Hình 1.2. Biểu đồ ứng suất-biến dạng khi gia tải, cắt tải và gia tải lại.

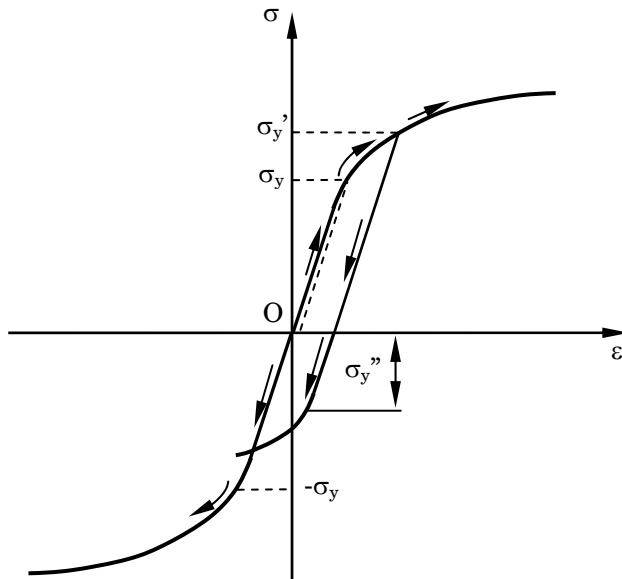
Lý thuyết dẻo kĩ thuật

sau tăng với sự gia tăng biến dạng. Đặc tính này của vật liệu để có thể chịu đựng ứng suất lớn hơn sau khi vật liệu biến dạng dẻo được gọi là *biến cứng do biến dạng* hay *tái bền*, nghĩa là vật liệu trở nên bền hơn với biến dạng dẻo.

Đối với một vài vật liệu, như bê tông hoặc đá trong thí nghiệm nén đơn trực, có một miền ở phía bên kia của điểm đỉnh (điểm cực đại) trong đó độ dốc của đường cong âm. Ứng xử như thế được gọi *biến mềm do biến dạng*. Loại vật liệu này trở nên yếu hơn khi biến dạng tiếp tục vượt quá giới hạn tương ứng với ứng suất đỉnh.

1.2.3. Gia tải đảo ngược

Nếu chúng ta biểu diễn một thí nghiệm nén đơn trực của kim loại, chúng ta sẽ thu được một đường cong ứng suất-biến dạng hầu như giống hệt như trong thí nghiệm kéo đơn trực. Tuy nhiên, sau biến dạng dẻo trước trong thí nghiệm kéo của một mẫu, đường cong ứng suất-biến dạng của mẫu này trong thí nghiệm nén sẽ khác đáng kể so với đường cong sẽ thu được khi gia tải lại đối với mẫu này ở trạng thái kéo. Như được minh họa trong hình 1.3, đối với mẫu được gia tải kéo trước σ_y' , chảy dẻo nén tương ứng của nó xảy ra ở mức ứng suất σ_y'' nhỏ hơn ứng suất chảy ban đầu σ_y và nhỏ hơn nhiều so với ứng suất chảy tiếp sau σ_y' . Hiện tượng này được gọi là *hiệu ứng Bauschinger* và thường xuất hiện khi có sự đảo ngược ứng suất.



Hình 1.3. Hiệu ứng Bauschinger.

Rõ ràng không có mối quan hệ một-một giữa ứng suất và biến dạng trong vật rắn biến dạng dẻo. Nói cách khác, biến dạng không là hàm của chỉ riêng ứng suất, mà còn phụ thuộc vào *lịch sử của quá trình gia tải* trước đó. Do đó, vật liệu phụ thuộc vào lô trình đặt tải. Điều này có thể được minh họa bởi trường hợp đơn giản của ứng suất zero, khi các biến dạng dư với các độ lớn khác nhau có thể được kiến lập bằng cách thay đổi lịch sử đặt tải với ứng suất bắt đầu và kết thúc ở zero.

Trong việc bàn luận từ trước đến giờ, ta đã giả sử rằng có một đường cong ứng suất-biến dạng đơn giản cho trường hợp kéo hoặc nén, độc lập với suất biến dạng. Giả định này được xem như độc lập với thời gian. Điều này thì phù hợp với thực tiễn của các kim loại kết cấu ở nhiệt độ phòng dưới điều kiện đặt tải tĩnh. Những ảnh hưởng của suất thì rất quan trọng cho các vật liệu chịu các điều kiện gia tải động lực và không được khảo sát trong tài liệu này.

1.3. Mô hình ứng xử đơn trực trong chảy dẻo

1.3.1. Các đường cong ứng suất-biến dạng kéo đơn trực đơn giản hóa

Để thu được lời giải cho bài toán biến dạng, cần thiết phải lý tưởng hóa ứng xử ứng suất-biến dạng của vật liệu. Những mô hình lý tưởng hóa sau đây đáng được lưu ý.

1.3.1.1. Mô hình đàn-dẻo lý tưởng (hình 1.4a)

Trong vài trường hợp, việc bỏ qua sự biến cứng của vật liệu là chấp nhận được và tiện lợi, giả sử rằng chảy dẻo xảy ra khi ứng suất đạt đến ứng suất chảy σ_0 . Do đó, mối quan hệ ứng suất-biến dạng kéo đơn trực có thể được biểu diễn dưới dạng

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\sigma}{E} && \text{for } \sigma < \sigma_0 \\ \varepsilon &= \frac{\sigma}{E} + \lambda && \text{for } \sigma = \sigma_0\end{aligned}\tag{1.1}$$

ở đây E là *Young's modulus*, và λ là số vô hướng, xác định và lớn hơn không.

1.3.1.2. Mô hình đàn hồi-biến cứng tuyến tính (hình 1.4b)

Trong mô hình đàn hồi-biến cứng tuyến tính, đường cong liên tục được xấp xỉ bởi hai đoạn thẳng, do đó thay thế đường cong chuyển tiếp trơn bằng một điểm gãy nhọn, tung độ của nó được lấy là ứng suất giới hạn đàn hồi hoặc ứng suất chảy σ_0 . Nhánh đoạn thẳng đầu của biểu đồ có độ

Lý thuyết dẻo kĩ thuật

dốc bằng *Young's modulus*, E . Nhánh đoạn thẳng thứ hai, mô tả miền biến cứng được lý tưởng hóa dưới dạng tuyến tính, có độ dốc $E_t < E$. Quan hệ ứng suất-biến dạng đối với trường hợp gia tải kéo đơn điệu có dạng

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\sigma}{E} && \text{for } \sigma \leq \sigma_0 \\ \varepsilon &= \frac{\sigma_0}{E} + \frac{1}{E_t}(\sigma - \sigma_0) && \text{for } \sigma > \sigma_0\end{aligned}\quad (1.2)$$

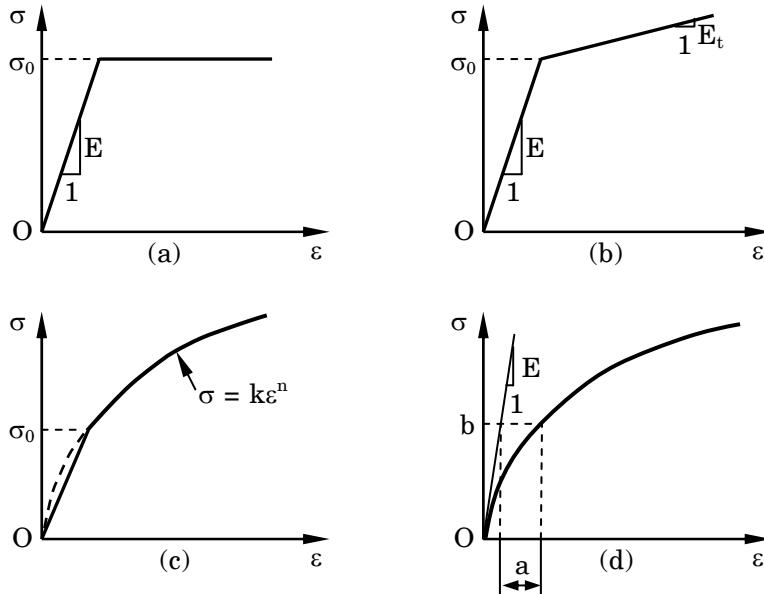
1.3.1.3. Mô hình dàn hồi-biến cứng hàm mũ (hình 1.4c)

Quan hệ ứng suất-biến dạng được khảo sát dưới dạng lũy thừa như sau

$$\begin{aligned}\sigma &= E\varepsilon && \text{for } \sigma \leq \sigma_0 \\ \sigma &= k\varepsilon^n && \text{for } \sigma > \sigma_0\end{aligned}\quad (1.3)$$

trong đó k và n là hai hằng số đặc trưng của vật liệu, chúng được xác định sao cho phù hợp tốt nhất với đường cong thu được từ thí nghiệm. Nếu ε mô tả biến dạng tổng, đường cong nên đi qua điểm mô tả ứng suất chảy và biến dạng dàn hồi tương ứng. Biểu thức lũy thừa (1.3) chỉ nên dùng trong miền biến cứng (biến dạng dẻo).

1.3.1.4. Mô hình Ramberg-Osgood (hình 1.4d).



Hình 1.4. Các đường cong ứng suất-biến dạng lý tưởng hóa.

Đường cong ứng suất-biến dạng phi tuyến trong hình 1.4d có dạng biểu thức như sau

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + a \left(\frac{\sigma}{b} \right)^n \quad (1.4)$$

trong đó a , b và n là những hằng số vật liệu. Độ dốc ban đầu của đường cong lấy giá trị của *Young's modulus* E ở $\sigma = 0$, và giảm đơn điệu theo sự gia tăng của tải. Do mô hình có ba thông số, nó cho phép mô hình phù hợp tốt hơn với những đường cong ứng suất-biến dạng thực tế.

1.3.2. Modulus tiếp tuyến E_t và modulus dẻo E_p

Bởi vì đáp ứng ứng suất-biến dạng đàn-dẻo của vật liệu có tính chất phi tuyến, một qui trình gia tăng nói chung được chọn để giải bài toán biến dạng. Do đó chúng ta giả định rằng một *gia tăng biến dạng*, $d\varepsilon$, bao gồm hai phần: *gia tăng biến dạng đàn hồi*, $d\varepsilon^e$, và *gia tăng biến dạng dẻo*, $d\varepsilon^p$ (xem hình 1.5a),

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (1.5)$$

Lượng gia tăng ứng suất $d\sigma$ được liên hệ với lượng gia tăng biến dạng $d\varepsilon$ theo dạng

$$d\sigma = E_t d\varepsilon \quad (1.6)$$

với E_t là *modulus tiếp tuyến*, nó thay đổi trong quá trình biến dạng dẻo. Trong trường hợp đặt tải đơn trực, E_t là độ dốc hiện hành của đường cong $\sigma-\varepsilon$ (hình 1.5a). Nếu chúng ta tách biến dạng dẻo ε^p khỏi biến dạng tổng ε , thì lượng gia tăng biến dạng dẻo $d\varepsilon^p$ và lượng gia tăng ứng suất $d\sigma$ được liên hệ với nhau theo biểu thức

$$d\sigma = E_p d\varepsilon^p \quad (1.7)$$

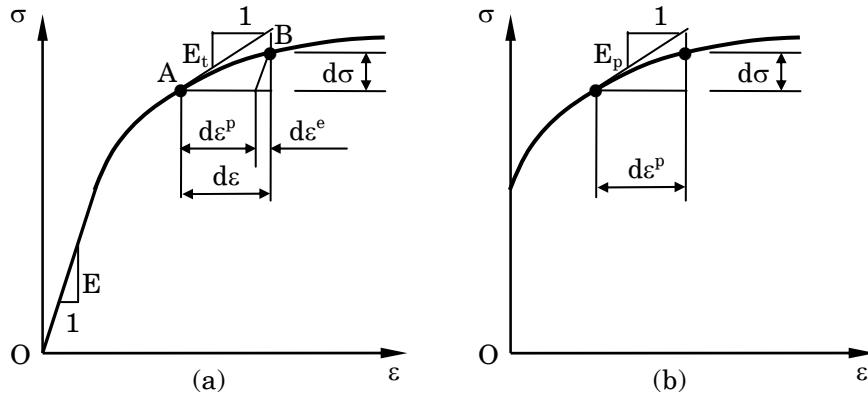
trong đó E_p được xem là *modulus dẻo*, nó bằng độ dốc của đường cong $\sigma-\varepsilon^p$ trong trường hợp kéo đơn trực (hình 1.5b). Đối với lượng gia tăng biến dạng đàn hồi $d\varepsilon^e$, ta có mối quan hệ

$$d\sigma = E d\varepsilon^e \quad (1.8)$$

với E là *modulus đàn hồi* hay *Young's modulus*.

Thay $d\varepsilon$ trong đẳng thức (1.6), $d\varepsilon^p$ trong đẳng thức (1.7), và $d\varepsilon^e$ trong đẳng thức (1.8) vào đẳng thức (1.5) ta sẽ có mối quan hệ giữa ba *modulus* E_t , E và E_p

Lý thuyết dẻo kĩ thuật



Hình 1.5. *Modulus tiếp tuyến* và *modulus dẻo*.

$$\frac{1}{E_t} = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_p} \quad (1.9)$$

1.3.3. Các quy luật biến cứng

Như đã được mô tả trong phần trên, hiện tượng mà nhờ đó ứng suất chảy gia tăng với sự gia tăng biến dạng dẻo được gọi là biến cứng hay tái bền của vật liệu. Để mô tả ứng xử này, một thông số biến cứng κ được giới thiệu để đặc trưng cho các trạng thái biến cứng khác nhau, và *modulus dẻo* E_p được cho là một hàm của thông số biến cứng κ như

$$E_p = E_p(\kappa) \quad (1.10)$$

ở đây κ có thể được lấy như là công chảy dẻo W_p

$$W_p = \int \sigma d\epsilon^p \quad (1.11)$$

hoặc biến dạng dẻo ϵ^p hoặc, thực tế hơn, biến dạng dẻo tích lũy

$$\epsilon^p = \int (d\epsilon^p d\epsilon^p)^{1/2}$$

nó là tổng của các gia tăng biến dạng dẻo tương đương được định nghĩa bởi

$$|d\epsilon_p| = \sqrt{d\epsilon^p d\epsilon^p} \quad (1.12)$$

Bởi vì đường cong kéo đơn trực $\sigma-\epsilon$ đối với một vật liệu nói chung thu được từ một thí nghiệm đơn giản, dạng hàm của *modulus dẻo* E_p trong đẳng thức (1.10) có thể được xác định từ thí nghiệm này dưới dạng định nghĩa của thông số biến cứng κ .

Đối với một phân tử vật liệu dưới điều kiện gia tải nghịch đảo, ứng suất chảy tiếp sau thường được xác định theo một trong ba quy luật đơn giản sau đây :

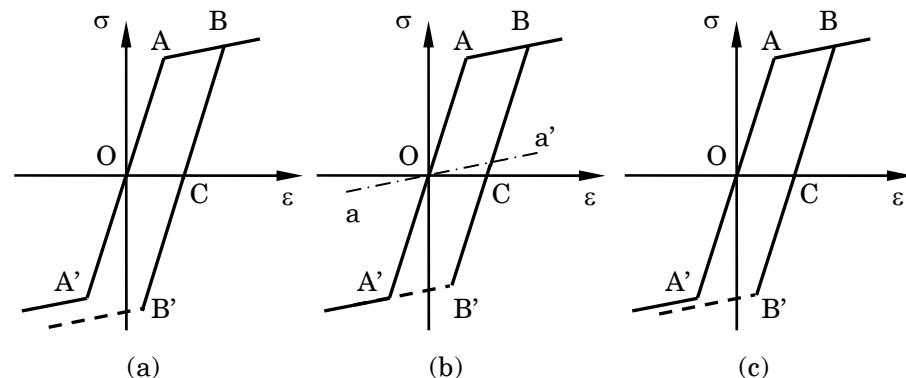
1. *Quy luật biến cứng đẳng hướng*: độ lớn ứng suất chảy nén nghịch đảo được giả định bằng với ứng suất chảy kéo. Như được minh họa trong hình 1.6a, ở đây $|\overline{B'C}| = |\overline{BC}|$, ứng suất chảy nén nghịch đảo $\sigma_{B'}$ thì bằng với ứng suất chảy kéo σ_B trước khi nghịch đảo tải. Do đó quy luật biến cứng đẳng hướng bỏ qua hoàn toàn hiệu ứng *Bauschinger*, khi giả định rằng ứng suất chảy gia tăng trong lúc kéo sẽ bằng với độ lớn ứng suất chảy gia tăng trong lúc nén. Quy luật biến cứng này có thể được biểu diễn dưới dạng toán học như sau

$$|\sigma| = |\sigma(\kappa)| \quad (1.13)$$

ở đây $\sigma(\kappa)$ là một hàm của thông số biến cứng κ và thông số κ là số vô hướng, xác định, không âm, như công chảy dẻo hoặc biến dạng dẻo tích lũy đã được đề cập ở trên.

2. *Quy luật biến cứng động học*: miền đàn hồi được cho là không bị thay đổi trong quá trình biến cứng (biến dạng dẻo). Do đó, quy luật biến cứng động học khảo sát hiệu ứng *Bauschinger* tới mức độ đầy đủ của nó. Biến cứng động học đối với vật liệu biến cứng tuyến tính được biểu thị trong hình 1.6b, với $|\overline{BB'}| = |\overline{AA'}|$. Tâm của miền đàn hồi được di chuyển dọc theo đường thẳng aa' . Quy luật biến cứng này có thể được biểu diễn dưới dạng toán học như sau

$$|\sigma - c(\kappa)| = \sigma_0 \quad (1.14)$$



Hình 1.6. Các quy luật biến cứng.

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

với $c(\kappa)$ là hàm của thông số biến cứng κ .

3. *Quy luật biến cứng độc lập*: vật liệu được cho là bị biến cứng một cách độc lập khi chịu kéo và khi chịu nén. Quy luật biến cứng này được minh họa trong hình 1.6c, với $\overline{BC} > \overline{OA}$, nhưng $\overline{CB'} = \overline{OA'}$; vật liệu đã biến cứng chỉ trong kéo, nhưng nó đổi xử gióng như vật liệu chưa chịu biến dạng (mới nguyên) dưới điều kiện đặt tải nén nghịch đảo. Nó có thể được biểu diễn dưới dạng toán học như sau

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_t(\kappa_t) \text{ nếu } \sigma > 0 \\ \sigma &= \sigma_c(\kappa_c) \text{ nếu } \sigma < 0\end{aligned}$$

với κ_t và κ_c là các thông số biến cứng được tích lũy trong quá trình đặt tải kéo và nén tương ứng.

1.4. Ký hiệu chỉ số

Do ký hiệu chỉ số cho phép giảm đáng kể các số hạng trong một biểu thức hoặc phương trình và sự đơn giản hóa của việc hình thành công thức tổng quát, nên nó thường được dùng trong các tài liệu hiện hành khi ứng suất, biến dạng và những phương trình cơ bản được đề cập đến. Vì thế, kiến thức cơ bản về các ký hiệu này là cần thiết trong việc nghiên cứu lý thuyết dẻo và mô hình cơ bản của vật liệu. Với những ký hiệu như thế, các mối quan hệ ứng suất biến dạng đa dạng có thể được biểu diễn trong dạng cô đọng (dạng nén), bằng cách ấy cho phép tập trung nhiều đến các nguồn gốc vật lý hơn là chính các phương trình.

1.4.1. Ký hiệu chỉ số và quy ước phép tổng

Xét hệ tọa độ *Descartes* bàn tay phải. Trong không gian ba chiều, hệ tọa độ *Descartes* bàn tay phải được vẽ bởi một bộ gồm ba trục vuông góc lẫn nhau và thường được ký hiệu là x, y, z . Để thuận tiện hơn cho các công việc sau này, các trục này được ký hiệu lại là x_1, x_2, x_3 . Hình vẽ phác của hệ trục này được thể hiện trong hình 1.11.

1.4.1.1. Ký hiệu chỉ số

Trong hệ tọa độ này, *vector* \vec{v} được biểu thị

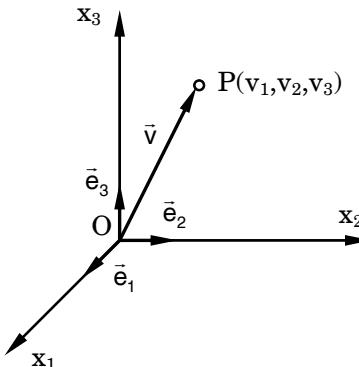
$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3 = v_i \quad (1.40)$$

ở đây \vec{e}_1, \vec{e}_2 và \vec{e}_3 lần lượt là các *vector* đơn vị trên ba trục tọa độ x_1, x_2, x_3 , và v_1, v_2, v_3 là ba hình chiếu - thành phần - của *vector* \vec{v} lên ba trục. Thật là ích lợi để ký hiệu các thành phần của một vector bằng chỉ một thành phần đơn giản với chỉ số đã tổng quát hóa. Do đó, trong ký

hiệu chỉ số, v_i biểu thị cho các thành phần của vector \vec{v} . Điều này được hiểu là chỉ số i biến thiên từ 1 đến 3 khi v_i được viết cho \vec{v} .

Thí dụ, đẳng thức $x_i = 0$ ngụ ý rằng cả ba thành phần của vector \vec{x} : $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, hoặc vector $\vec{x} = \vec{0}$. Tương tự,

$$f(\vec{x}) = f(x_i) = f(x_j) = f(x_1, x_2, x_3) \quad (1.41)$$



Hình 1.11. Hệ tọa độ *Descartes* thuận.

Chỉ số có thể được chọn tự do. Do đó, x_i và x_j mô tả cùng một vector.

1.4.1.2. Quy ước phép tổng

Quy ước phép tổng bổ sung cho ký hiệu chỉ số và cho phép sự vắn tắt (rút gọn) nhiều hơn nữa khi trình bày các phép tổng. Chúng ta chấp nhận quy ước sau: khi chỉ số xuất hiện hai lần trong cùng số hạn, điều này được hiểu là chỉ số được tính từ 1 đến 3. Thí dụ tích vô hướng của hai vector \vec{u} và \vec{v} sẽ được biểu diễn

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \sum_{i=1}^3 u_i v_i = u_i v_i = u_j v_j = u_k v_k \quad (1.42)$$

Quy ước phép tổng yêu cầu chỉ số i phải được lặp lại, nhưng loại bỏ ký hiệu tổng Σ . Tuy nhiên, cần nhắc lại rằng chỉ số có thể chọn tự do. Do đó, $u_i v_i$ hay $u_j v_j$ hoặc $u_k v_k$ cùng biểu diễn một tổng như nhau, $u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$. Các chỉ số được lặp lại như thế được gọi là chỉ số *giả* hoặc *cầm* bởi vì thực ra chữ cái cụ thể được dùng cho chỉ số thì không quan trọng; nghĩa là $u_i v_i = u_j v_j = u_k v_k$.

Trong ý nghĩa này, cần chỉ ra rằng tổng hai vector \vec{u} và \vec{v} sẽ được biểu diễn

Lý thuyết déo kĩ thuật

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \quad \text{hay} \quad w_i = u_i + v_i \quad (1.43)$$

Ở ký hiệu trên, mỗi số hạng, thí dụ u_i , không phải là một tổng vô hướng mà là một *vector* vì chỉ số i chỉ xuất hiện một lần trong mỗi số hạng và được gọi là chỉ số *giả* hoặc *câm*. Sự xuất hiện của chỉ số tự do trong biểu thức chỉ ra rằng các *vector* sẽ tồn tại trong biểu thức đó. Do đó, biểu thức sau đây là một biểu thức **sai**

$$u_i + v_i = u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + u_3 + v_3 \quad (1.44)$$

Hơn nữa, chỉ số trong một số hạng của một phương trình hay biểu thức chỉ nên xảy ra hai lần trong cùng số hạng này đối với quy ước phép tổng là hợp lệ. Một biểu thức như $u_i v_{ii}$ không truyền đạt ý nghĩa gì đặc biệt.

Sự có hiệu lực của quy ước sẽ rõ ràng hơn khi nó được áp dụng vào hệ phương trình tuyến tính. Thí dụ xét hệ ba phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \quad (1.45)$$

Hai giai đoạn ký hiệu có thể được viết như sau

$$\begin{aligned} a_{1j}x_j &= b_1 \\ a_{2j}x_j &= b_2 \\ a_{3j}x_j &= b_3 \end{aligned} \quad (1.46)$$

$$a_{ij}x_j = b_i \quad (1.47)$$

Chỉ số i trong dạng ký hiệu cuối của hệ ba phương trình chỉ xuất hiện một lần trong mỗi số hạng và đó là chỉ số tự do. Điều này cho thấy các *vector* tồn tại trong biểu thức. Ngoài ra, khi hai chỉ số tự do được dùng để ký hiệu *tensor*. Với các quy ước trên ta có thể thấy a_{ij} ký hiệu một *tensor*, x_j , b_i ký hiệu các *vector*.

Như thế, hệ phương trình tuyến tính (1.47) cũng có thể được viết

$$a_{rs}x_s = b_r \quad (1.48)$$

Các thành phần và dạng ký hiệu chỉ số cơ bản cho *vector* được trình bày trong bảng 1.2.

Phép toán *divergence* của *vector* \vec{v} là $\nabla \cdot \vec{v}$ và được tính bởi

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \quad (1.49)$$

Phép toán này được ký hiệu phép tổng như sau

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (1.50)$$

ở đây i là chỉ số câm.

Các quy ước về các chỉ số được mô tả ở trên bây giờ có thể được tổng quát theo ba quy luật như sau :

Bảng 1.2. Ký hiệu chỉ số của vector

Vector	Các thành phần	Ký hiệu chỉ số
\vec{v}	(v_1, v_2, v_3)	v_i
$\vec{u} + \vec{v}$	$(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$	$u_i + v_i$
$\nabla \vec{\phi}$	$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right)$	$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$

Quy luật 1: nếu chỉ số chỉ xuất hiện một lần trong một số hạng của biểu thức hay phương trình, nó được gọi là « *chỉ số tự do* ». Điều này phải xảy ra chính xác một lần trong mỗi số hạng của biểu thức hoặc phương trình.

Quy luật 2: nếu chỉ số xuất hiện hai lần trong một số hạng của biểu thức hay phương trình, nó được gọi là « *chỉ số giả hoặc câm* ». Nó được cộng từ 1 đến 3. Chỉ số giả có thể hoặc không thể xảy ra chính xác hai lần trong số hạng bất kỳ.

Quy luật 3: nếu chỉ số xuất hiện hơn hai lần trong một số hạng của biểu thức hay phương trình, nó là một lỗi.

1.4.1.3. Ký hiệu đạo hàm

Trong ký hiệu chỉ số, ta dùng dấu phẩy để chỉ thị đạo hàm ; do đó, thí dụ, dạng đạo hàm riêng của phương trình (1.50) có thể đơn giản hóa hơn dưới dạng

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = v_{i,i} \quad (1.51a)$$

Lý thuyết déo kỹ thuật

trong đó dấu phẩy biểu thị đạo hàm riêng theo biến của chỉ số thứ hai. Hơn nữa, *gradient* của hàm ϕ được biểu diễn như

$$\overline{\text{Grad}}\phi = \phi_{,j} \quad (1.51b)$$

nó chỉ rõ đặc tính *vector* của *gradient* của hàm ϕ do chỉ số tự do i. *Divergence* của $\nabla\phi$, được gọi là toán tử Laplace của hàm ϕ , sẽ được viết

$$\nabla^2\phi = \nabla \cdot \nabla\phi = \phi_{,11} + \phi_{,22} + \phi_{,33} = \phi_{,ii} \quad (1.51c)$$

1.4.2. Ký hiệu Kronecker δ_{ij}

Ký hiệu *Kronecker* δ_{ij} là một ma trận đối xứng đặc biệt được định nghĩa

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

Do đó, các thành phần của $\delta_{ij} = 1$ nếu $i = j$, và $\delta_{ij} = 0$ nếu $i \neq j$:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1 \quad (1.53)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0 \quad (1.54)$$

Chú ý phép tổng

$$\delta_{jj} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3 \quad (1.55)$$

Ký hiệu δ_{ij} có thể được xem như một toán tử và cung cấp một hàm hữu ích khi dùng đến. Thí dụ, khảo sát phép chiếu $\delta_{ij}v_j$. Theo quy ước phép tổng, điều này sẽ mang lại sự khai triển *vector*

$$\delta_{ij}v_j = \delta_{i1}v_1 + \delta_{i2}v_2 + \delta_{i3}v_3 \quad (1.56)$$

Lần lượt gán giá trị 1, 2, 3 cho i ta thu được các thành phần tương ứng của $\delta_{ij}v_j$ là v_1, v_2, v_3 . Vì thế

$$\delta_{ij}v_j = v_i \quad (1.57)$$

Kết quả này có thể được hình dung như là kết quả của sự thay thế i cho j (hoặc j cho i) trong đại lượng được tác động bởi toán tử δ_{ij} . Do đó, khi áp dụng toán tử δ_{ij} lên đại lượng v_j đã thay thế chỉ số i cho chỉ số j trên đại lượng v_j ; ký hiệu δ_{ij} thường được gọi là *toán tử thay thế*.

Như một thí dụ khác, $\delta_{ij}\delta_{ji} = \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$

$$\delta_{ij}\delta_{ji} = \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3 \quad (1.58)$$

Tương tự,

$$\delta_{ij}a_{ji} = a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} \quad (1.59)$$

Cuối cùng, chú ý rằng tích vô hướng

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i=j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$$

Do đó ta có thể viết

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad (1.60)$$

1.4.3. Chuyển đổi hệ trục tọa độ

1.4.3.1. Cosine chỉ phương

Các giá trị của các thành phần v_1, v_2, v_3 của vector \vec{v} sẽ phụ thuộc vào hệ trục tọa độ đã chọn. Khi giải quyết các bài toán cơ học ta thường có nhu cầu thay đổi hệ trục quy chiếu, do đó thường cần phải định lại các giá trị mới cho các thành phần của vector \vec{v} trong hệ trục mới.

Gọi x_i và x'_i là hai hệ trục tọa độ *Descartes* thuận có cùng gốc. Vector \vec{v} có các thành phần trong hai hệ trục này lần lượt là v_i và v'_i . Do vector là không đổi trong cả hai hệ tọa độ nên các thành phần phải được liên hệ thông qua các cosine của các góc hợp bởi các trục x'_i và x_i .

Bảng 1.3. Các cosine chỉ phương ℓ_{ij}

Trục	Trục		
	x_1	x_2	x_3
x'_1	ℓ_{11}	ℓ_{12}	ℓ_{13}
x'_2	ℓ_{21}	ℓ_{22}	ℓ_{23}
x'_3	ℓ_{31}	ℓ_{32}	ℓ_{33}

Ký hiệu ℓ_{ij} là $\cos(x'_i, x_j)$, nghĩa là cosine của các góc hợp bởi các trục x'_i và x_j đối với i và j thay đổi từ 1 đến 3, các giá trị mới của các thành phần của vector \vec{v} trong hệ trục mới x'_i : $v'_i = \ell_{ij}v_j$. Những cosine này được lập thành bảng 1.3. nên chú ý rằng các thành phần của ma trận ℓ_{ij} là không đối xứng, $\ell_{ij} \neq \ell_{ji}$. Thí dụ, ℓ_{12} là cosine của góc giữa trục x'_1 và x_2 và ℓ_{21} là cosine của góc giữa trục x'_2 và x_1 (xem hình 1.12). Góc được giả định là được đo từ hệ trục mới x'_i đến hệ trục cũ x_i .

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

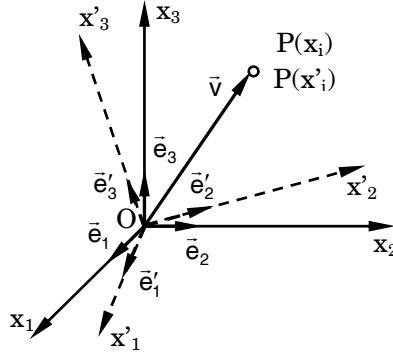
1.4.3.2. Mối quan hệ giữa các ℓ_{ij}

Từ định nghĩa của ℓ_{ij} , ta có

$$\ell_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j \quad (1.61)$$

Vector đơn vị \vec{e}'_i có thể được biểu diễn

$$\begin{aligned} \vec{e}'_i &= (\vec{e}'_i \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\vec{e}'_i \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2 + (\vec{e}'_i \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_3 \\ &= \ell_{i1} \vec{e}_1 + \ell_{i2} \vec{e}_2 + \ell_{i3} \vec{e}_3 = \ell_{ij} \vec{e}_j \end{aligned} \quad (1.62)$$



Hình 1.12. Phép biến đổi hệ trục tọa độ.

Trái lại,

$$\vec{e}_i = \ell_{ji} \vec{e}'_j \quad (1.63)$$

Do đó,

$$\vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = \delta_{ij} = \ell_{ir} \vec{e}_r \cdot \ell_{jk} \vec{e}_k = \ell_{ir} \ell_{jk} \delta_{rk} = \ell_{ir} \ell_{jr} \quad (1.64)$$

hoặc

$$\ell_{ir} \ell_{jr} = \delta_{ij} \quad (1.65)$$

Đẳng thức dưới dạng ký hiệu trên biểu thị sáu phương trình sau:

$$\begin{aligned} \ell_{11}^2 + \ell_{12}^2 + \ell_{13}^2 &= 1 \\ \ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 + \ell_{23}^2 &= 1 \\ \ell_{31}^2 + \ell_{32}^2 + \ell_{33}^2 &= 1 \\ \ell_{11}\ell_{21} + \ell_{12}\ell_{22} + \ell_{13}\ell_{23} &= 0 \\ \ell_{11}\ell_{31} + \ell_{12}\ell_{32} + \ell_{13}\ell_{33} &= 0 \\ \ell_{21}\ell_{31} + \ell_{22}\ell_{32} + \ell_{23}\ell_{33} &= 0 \end{aligned} \quad (1.66)$$

Tương tự,

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \ell_{ri} \vec{e}'_r \cdot \ell_{kj} \vec{e}'_k = \ell_{ri} \ell_{kj} \delta_{rk} = \ell_{ri} \ell_{rj} \quad (1.67)$$

hoặc

$$\ell_{ri} \ell_{rj} = \delta_{ij} \quad (1.68)$$

Vector bất kỳ \vec{v} có thể được biểu diễn hoặc theo dạng $v_i \vec{e}_i$ hoặc theo dạng $v'_i \vec{e}'_i$:

$$v'_i = \vec{v} \vec{e}'_i = v_j \vec{e}_j \vec{e}'_i = v_j \vec{e}_j \ell_{ik} \vec{e}_k = \ell_{ik} v_j \delta_{jk} = \ell_{ij} v_j \quad (1.69)$$

hoặc

$$v'_i = \ell_{ij} v_j \quad (1.70)$$

Trái lại,

$$v_i = \vec{v} \vec{e}_i = v'_j \vec{e}'_j \ell_{ri} \vec{e}'_r = \ell_{ri} v'_j \delta_{jr} = \ell_{ji} v'_j \quad (1.71)$$

hoặc

$$v_i = \ell_{ji} v'_j \quad (1.72)$$

Trong cách thức tương tự, nếu điểm P (hình 1.12) có các tọa độ x_i trong hệ trục cũ và x'_i trong hệ trục mới, thế thì

$$x'_i = \ell_{ij} x_j \quad \text{và} \quad x_i = \ell_{ji} x'_j \quad (1.73)$$

Điều này dẫn đến

$$\ell_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \quad (1.74)$$

1.4.4. Định nghĩa tensor trong hệ tọa độ Descartes

Trong phần trước, chúng ta đã chứng minh rằng một vector đặt ở điểm bất kỳ trong không gian thì hoàn toàn được xác định khi ta biết được ba thành phần (hình chiếu) của nó. Nếu ta biết các hình chiếu của một vector trong hệ trục tọa độ x_i , thì các hình chiếu của vector này trong hệ trục tọa độ x'_i có thể nhận được bằng cách chuyển trục tọa độ $v'_i = \ell_{ij} v_j$. Công thức chuyển trục tọa độ này vẫn đúng cho một vector bất kỳ, dù nó là một đại lượng vật lý như vector vận tốc hoặc lực, là một đại lượng

Lý thuyết về kỹ thuật

hình học như *vector* bán kính, hoặc một đại lượng được hình dung khó hơn như *gradient* của một đại lượng vô hướng. Thí dụ, nếu

$$G_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (1.75)$$

thì

$$G'_i = \frac{\partial \phi}{\partial x'_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} = \ell_{ik} G_k \quad (1.76)$$

Quy luật chuyển trực tiếp đã đề cập ở trên, trong đó mỗi hình chiếu mới của *vector* trong hệ trực mới là một tổ hợp tuyến tính của các hình chiếu cũ của *vector* trong hệ trực cũ, rất tiện lợi trong sử dụng. Trong phần tiếp theo, chúng ta thừa nhận điều này như định nghĩa của một *vector*, do đó sự thay thế định nghĩa *vector* trước đây như một đại lượng có hướng và độ lớn. Nguyên nhân cơ bản cho việc thừa nhận định nghĩa *vector* mới này là nó có thể được tổng quát hóa một cách dễ dàng để áp dụng vào những đại lượng vật lý phức tạp hơn được gọi là *tensor* trong khi sự định nghĩa “độ lớn và hướng” thì không thể.

Đầu tiên *tensor* bậc một được định nghĩa là tập hợp ba đại lượng (được gọi là các thành phần của nó) có đặc tính là nếu những giá trị của chúng ở một điểm cố định trong hệ trực tọa độ x_i là v_i , thì những giá trị của chúng ở một điểm này trong hệ trực tọa độ mới bất kỳ x'_i là $v'_i = \ell_{ij} v_j$. Tất nhiên ta cũng có sự trình bày tương đương $v_i = \ell_{ji} v'_j$. Vì tất cả các *vector* biến đổi theo quy luật này, nên các *vector* là những *tensor* bậc một. Một đại lượng vô hướng, như nhiệt độ ở một điểm, có giá trị không đổi bất chấp hệ trực tọa độ được dùng để biểu thị nó, và do đó số vô hướng không bị ảnh hưởng bởi sự chuyển hệ trực và được định nghĩa như là *tensor* bậc không. Một *tensor* bậc một (hoặc một *vector*) là một tập hợp $3^1 = 3$ thành phần, và *tensor* bậc không (hoặc một số vô hướng) là một tập hợp $3^0 = 1$ thành phần.

Bây giờ định nghĩa được mở rộng một cách tương tự cho những *tensor* bậc cao hơn. Một *tensor* bậc hai được định nghĩa như là tập hợp $3^2 = 9$ thành phần, nếu các giá trị của chúng ở một điểm là a_{ij} trong hệ trực tọa độ x_i , những giá trị của chúng a'_{ij} ở cùng điểm trong hệ trực mới bất kỳ x'_i được cho bởi

$$a'_{ij} = \ell_{im} \ell_{jn} a_{mn} \quad (1.77)$$

Chương 1. Giới thiệu

Một *tensor* bậc hai có thể được hiểu là được định nghĩa hoàn toàn bởi ba *vector* giống như một *vector* được định nghĩa hoàn toàn bởi ba số vô hướng. Như sẽ được thấy sau này, các đại lượng biểu thị trạng thái ứng suất ở một điểm trong vật thể biến dạng có dạng *tensor* bậc hai. Nói cách khác, trạng thái ứng suất ở một điểm được định nghĩa hoàn toàn bởi ba *vector*.

Một *tensor* bậc ba là một tập hợp $3^3 = 27$ thành phần, nếu các giá trị của chúng ở một điểm là a_{ijk} trong hệ trục tọa độ x_i , những giá trị của chúng a'_{ijk} ở cùng điểm trong hệ trục mới bất kỳ x'_i được cho bởi

$$a'_{ijk} = \ell_{im}\ell_{jn}\ell_{kp}a_{mnp} \quad (1.78)$$

Tensor có thể có bậc bất kỳ; công thức chuyển trục tổng quát có thể xác định từ những định nghĩa trước đây. Tất cả những *tensor* như thế được gọi là *Cartesian tensor* bởi vì sự giới hạn vào các hệ trục tọa độ *Descartes*.

Bảng 1.5. Các *cosine* chỉ phương (ℓ_{ij})

Trục mới	Trục cũ		
	x_1	x_2	x_3
x'_1	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	0
x'_2	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	0
x'_3	0	0	1

Như một thí dụ, giả sử rằng chín thành phần của *tensor* bậc hai trong hệ trục tọa độ x_i được biết:

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = -1, \quad a_{32} = 2, \quad \text{các thành phần còn lại } a_{ij} = 0$$

Khảo sát hệ trục tọa độ mới x'_i được liên hệ với hệ trục x_i bởi các *cosine* chỉ phương (ℓ_{ij}) được cho trong bảng 1.5.

Những thành phần mới a'_{ij} trong hệ trục x'_i được cho bởi

$$\begin{aligned} a'_{11} &= \ell_{1m}\ell_{1n}a_{mn} = \ell_{11}\ell_{11}a_{11} + \ell_{11}\ell_{12}a_{12} + \ell_{13}\ell_{12}a_{32} + 0 \\ &= \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(-1) + 0 = 0 \end{aligned} \quad (1.79)$$

Tương tự, $a'_{12} = -1, a'_{32} = \sqrt{2}$, và v.v...

Lý thuyết về kỹ thuật

1.4.5. Các đặc trưng của tensor

Các phép toán trên tensor tương tự như các phép toán trên vector.

1.4.5.1. Hai tensor bằng nhau

Hai tensor A và B được định nghĩa là bằng nhau khi các thành phần tương ứng của chúng bằng nhau. Thí dụ, điều kiện bằng nhau của tensor a_{ij} và tensor b_{ij} là

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (1.80)$$

1.4.5.2. Phép cộng

Tổng hoặc hiệu hai tensor cùng bậc là một tensor cùng bậc, nó được định nghĩa là cộng hoặc trừ các thành phần tương ứng của hai tensor. Thí dụ, nếu cộng hai tensor bậc hai a_{ij} và b_{ij} ta thu được tensor bậc hai c_{ij} :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (1.81)$$

Rõ ràng rằng tổng hoặc hiệu hai tensor khác bậc không thể được định nghĩa.

1.4.5.3. Các phương trình tensor

Như đã đề cập trước đây, một phương trình tensor đúng trong hệ trực tọa độ thì đúng trong tất cả các hệ trực tọa độ, nếu hai tensor thỏa $a_{ij} = b_{ij}$ trong hệ trực x_i , ta có thể xác định $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ trong tất cả hệ trực. Theo lập luận trước đây, hiệu của hai tensor cùng bậc là tensor cũng cùng bậc, nghĩa là c_{ij} là tensor bậc hai. Nay giờ, c_{ij} triệt tiêu trong hệ trực x_i , và do đó cũng triệt tiêu trong tất cả các hệ trực tọa độ. Điều này cũng có thể dễ dàng thấy được từ thực tế rằng c'_{ij} trong hệ trực bất kỳ là tổ hợp tuyến tính của c_{ij} .

1.4.5.4. Phép nhân

Phép nhân tensor a_{ij} với một đại lượng vô hướng α tạo ra một tensor b_{ij} có cùng bậc:

$$b_{ij} = \alpha a_{ij} \quad (1.82)$$

Xét tensor bậc một a_i và tensor bậc hai b_{ij} . Chúng ta có thể định nghĩa một tập hợp các đại lượng mới c_{ijk} bởi một cách thức được gọi là phép nhân tensor:

$$c_{ijk} = a_i b_{jk} \quad (1.83)$$

Đi nhiên có thể hiểu rằng một quy luật định nghĩa tương tự sẽ được dùng trong hệ trực khác.

$$\begin{aligned} c'_{ijk} &= a'_i b'_{jk} = (\ell_{im} a_m)(\ell_{jn} \ell_{ko} a_{no}) \\ &= \ell_{im} \ell_{jn} \ell_{ko} a_m a_{no} = \ell_{im} \ell_{jn} \ell_{ko} c_{mno} \end{aligned} \quad (1.84)$$

Phương trình (1.84) cho thấy c_{ijk} là một *tensor* hạng ba. Tổng quát, phép nhân *tensor* tạo ra một *tensor* mới có bậc bằng tổng các bậc của các *tensor* gốc.

1.4.5.5. Sự rút gọn

Khảo sát *tensor* a_{ijk} - một tập hợp 27 thành phần. Nếu ta cho hai chỉ số cùng chữ cái, tức là thay j bằng k , ta có a_{ikk} . Lúc này *tensor* chỉ còn ba thành phần, mỗi thành phần là tổng của ba thành phần gốc. Dễ dàng thấy rằng tập hợp ba đại lượng này là một *tensor* bậc một. Đối với *tensor* bậc ba a_{ijk} , ta có

$$a'_{ijk} = \ell_{ip} \ell_{jq} \ell_{kr} a_{pqr}$$

và do đó

$$a'_{ikk} = \ell_{ip} (\ell_{kq} \ell_{kr}) a_{pqr} = \ell_{ip} \delta_{qr} a_{pqr} = \ell_{ip} a_{prr} \quad (1.85)$$

đó là quy luật chuyển trực đối với *tensor* bậc một, nghĩa là, a_{ikk} là một *tensor* bậc một.

1.4.6. Tensor đẳng hướng

Một *tensor* là đẳng hướng nếu những thành phần của nó cùng giá trị trong tất cả hệ trục tọa độ. Một số vô hướng (*tensor* bậc không) là thí dụ đơn giản về *tensor* đẳng hướng. *Tensor* δ_{ij} là đẳng hướng bậc hai vì δ_{ij} có các giá trị không đổi khi chuyển trục tọa độ

$$\delta'_{ij} = \ell_{ir} \ell_{js} \delta_{rs} = \ell_{ir} \ell_{jr} = \delta_{ij} \quad (1.86)$$

Có thể thấy rằng *tensor* đẳng hướng bậc hai bất kỳ phải ở dạng hằng số nhân với δ_{ij} , và *tensor* đẳng hướng bậc bốn tổng quát nhất có dạng:

$$a_{ijkl} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk} \quad (1.87)$$

1.5. Tóm tắt

Lý thuyết dẻo đề cập đến sự phân tích ứng suất và biến dạng trong miền chảy dẻo của vật liệu dẻo, đặc biệt là các kim loại. Chương này giới thiệu những khái niệm cơ sở của lý thuyết dẻo bằng cách bàn luận ứng xử ứng suất-biến dạng đơn trực của các kim loại. Các khái niệm quan trọng, như biến dạng đàn hồi, biến dạng dẻo, giới hạn đàn hồi, chảy dẻo, biến cứng, biến mềm, và hiệu ứng *Bauschinger* cho đặt tải

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

nghịch đảo đã được minh họa tất cả. Điểm đặc trưng có ý nghĩa nhất của biến dạng dẻo là *tính không thuận nghịch* của nó và *phụ thuộc lô trình đặt tải*. Đối với vật liệu biến cứng, một thông số biến cứng liên hệ với công chảy dẻo hay biến dạng dẻo đã được giới thiệu để ghi nhận lịch sử đặt tải. Rồi *modulus* dẻo được liên hệ với thông số biến cứng này. Các đặc trưng tổng quát của vật liệu được thảo luận trong chương này dưới dạng ứng xử ứng suất-biến dạng đơn trực của các kim loại có thể được dùng trong những chương sau để rút ra quy luật rộng hơn về các quan hệ ứng suất-biến dạng hai chiều và ba chiều của những vật liệu nói chung và kim loại và bê tông nói riêng.

Mỗi quan hệ giữa ứng suất và biến dạng trong những trường hợp đặt tải tổng quát đặc trưng những thuộc tính của vật liệu thì được xem như là mối quan hệ cơ bản. Các chương tiếp theo sẽ đề cập đến những kỹ thuật tổng quát được dùng trong sự mở rộng cần thiết của ứng xử ứng suất-biến dạng từ điều kiện đơn trực đến trạng thái ba chiều. Tổng quát, sáu thành phần ứng suất và sáu thành phần biến dạng được bao gồm trong các phương trình cơ bản. Để đơn giản hóa các biểu thức toán học, chúng ta sẽ dùng các ký hiệu chỉ số. Nhằm chuẩn bị cho các chương sau, ký hiệu súc tích về *tensor* đã được giới thiệu trong chương này.

Bài tập

1.1. Đáp ứng σ - ϵ trong kéo đơn trực của vật liệu được xấp xỉ bởi dạng công thức của Ramberg-Osgood

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{b} \right)^n$$

- (a) Tìm *modulus* tiếp tuyến E_t và *modulus* dẻo E_p như là những hàm của ứng suất σ và của biến dạng dẻo ϵ^p .
- (b) Xác định công chảy dẻo W_p như là hàm của ứng suất σ và của biến dạng dẻo ϵ^p .
- (c) Hãy biểu diễn ứng suất σ và *modulus* dẻo E_p dưới dạng công chảy dẻo W_p .
- (d) Ứng suất chảy ban đầu là gì?
- (e) Giả sử $n = 1$, hãy vẽ đường cong σ - ϵ cho việc đặt tải được theo sau bởi sự cất tải hoàn toàn.
- (f) Cho $n = 5$, tìm các ứng suất chảy kéo *offset* đối với các *offset* $\epsilon^p = 0,1\%$ và $\epsilon^p = 0,2\%$.

Chương 1. Giới thiệu

1.2. Đối với vật liệu của bài tập 1.1, cho $n = 4$, $E = 73.000 \text{ Mpa}$, và $b = 800 \text{ Mpa}$. Một phân tố vật liệu được làm biến dạng kéo trước đến trạng thái có $\varepsilon^p = 0,015$ và được cất tải tiếp sau đó và rồi đặt tải nghịch đảo cho đến khi chảy dẻo ở trạng thái nén bắt đầu; chảy dẻo nén được tiếp tục thêm cho đến khi $\varepsilon^p = -0,015$. Vật liệu được giả định là theo: (i) quy luật biến cứng đẳng hướng; (ii) quy luật biến cứng độc lập, cả hai đều với *modulus* dẻo E_p được lấy phụ thuộc vào *modulus* biến cứng đơn κ được định nghĩa như

$$\kappa = \int (d\varepsilon^p d\varepsilon^p)^{1/2}$$

- (a) Xác định ứng suất lúc bắt đầu chảy dẻo nén.
- (b) Vẽ đường cong $\sigma-\varepsilon^p$.

1.3. Đối với vật liệu của bài tập 1.1, cho $n = 3$, $E = 69.000 \text{ Mpa}$, và $b = 690 \text{ Mpa}$. Một phân tố vật liệu trước tiên được làm biến dạng kéo trước đến trạng thái 1 với $W_p = 113,85 \text{ kN.m/m}^3$ và được cất tải tiếp sau đó và rồi đặt tải nghịch đảo cho đến khi chảy dẻo nén bắt đầu ở trạng thái 2. Tiếp theo, nó được đặt tải với một giá số ứng suất $d\sigma = -2,07 \text{ Mpa}$ cho đến điểm 3, và rồi với một giá số ứng suất khác $d\sigma = -2,07 \text{ Mpa}$ cho đến điểm 4. Sau đó, phân tố được cất tải và đặt tải lại ở trạng thái kéo cho đến khi chảy dẻo xảy ra ở trạng thái 5. Vật liệu được giả sử là theo quy luật biến cứng đẳng hướng với *modulus* dẻo E_p được lấy phụ thuộc vào thông số biến cứng κ được định nghĩa như $\kappa = W_p$.

- (a) Xác định ứng suất kéo σ_1 và biến dạng dẻo ε_1^p ở trạng thái 1.
- (b) Xác định ứng suất σ , biến dạng ε , biến dạng dẻo ε^p , công chảy dẻo W_p , và *modulus* dẻo E_p ở các trạng thái 2, 3, 4.
- (c) Xác định ứng suất σ_5 và *modulus* dẻo E_p ở trạng thái 5.

1.4. Đối với mô hình vật liệu của thí dụ 1.1 (xem hình 1.7), giả sử các thông số vật liệu được chọn là $A_1 = 2/3$, $A_2 = 1/3$, $\sigma_{01} = 138 \text{ MPa}$, $\sigma_{02} = 345 \text{ Mpa}$, và $E = 69000 \text{ Mpa}$. Các biến dạng ở điểm c và f trong hình 1.8 được lấy là $\varepsilon_c = 0,013$ và $\varepsilon_f = 0,011$, và trạng thái h được giả sử tương ứng với giá trị ứng suất nén trong các thanh 2 là $\sigma_{02}/2$.

- (a) Xác định các ứng suất dư trong các thanh 1 và 2 khi $\sigma = 0$ dọc theo lộ trình cất tải f-g và trong quá trình đặt tải lại dọc h-i?
- (b) Xác định ứng suất trong các thanh 2 tương ứng với các trạng thái g và i.

Lý thuyết dẻo kĩ thuật

- (c) Tìm các giá trị ứng suất trong các thanh 2, σ_2 , và giá trị biến dạng ε khi ứng suất trong những thanh 1 được giải phóng hoàn toàn ($\sigma_1 = 0$) trong quá trình cất tải dọc lộ trình f-g và trong quá trình đặt tải lại dọc lộ trình h-i.
- (d) Đối với các lô trình $\sigma-\varepsilon$ trong hình 1.8, hãy vẽ đồ thị biểu diễn quan hệ σ_1 theo σ_2 , biểu thị đường ứng suất tương đương $\sigma = 0$.
- 1.5. Một phân tố vật liệu biến cứng tuyến tính giống như thí dụ 1.2 không có ứng suất và biến dạng ban đầu, chịu các quá trình đặt tải khác nhau và tạo ra các lô trình ứng suất được cho dưới đây. Đối với mỗi quy luật biến cứng (trong ba quy luật biến cứng) được khảo sát trong thí dụ 1.2, hãy tìm trạng thái biến dạng cuối cùng, ε , và ε^p đạt được ở cuối của mỗi lô trình đặt tải. Các giá trị ứng suất được cho với đơn vị là Mpa.
- (i) $\sigma = 0 \rightarrow 414 \rightarrow -414 \rightarrow 0 \rightarrow 414$.
- (ii) $\sigma = 0 \rightarrow 621 \rightarrow 0$.
- Đối với mỗi trường hợp, hãy trình bày bằng đồ thị những sự biểu diễn các lô trình ứng suất-biến dạng trong không gian $\sigma-\varepsilon$ và $\sigma-\varepsilon^p$.
- 1.6. Đáp ứng $\sigma-\varepsilon$ trong kéo đơn trực đối với vật liệu đàn-dẻo được xấp xỉ bởi đường cong được tuyến tính hóa như sau:

$$\begin{array}{lll} \text{Đàn hồi} & \sigma = E\varepsilon & (\varepsilon < \varepsilon_0) \\ \text{Đàn-dẻo} & \sigma = \sigma_0 + E_{t1}(\varepsilon - \varepsilon_0) & (\varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1) \\ & \sigma = \sigma_1 + E_{t2}(\varepsilon - \varepsilon_1) & (\varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2) \\ \text{Chảy dẻo hoàn toàn} & \sigma = \sigma_2 & (\varepsilon > \varepsilon_2) \end{array}$$

với các hằng số vật liệu được cho là $\sigma_0 = 207$ Mpa, $\varepsilon_0 = 0,001$; $\sigma_1 = 414$ Mpa, $\varepsilon_1 = 0,005$; $\sigma_2 = 587$ Mpa, $\varepsilon_1 = 0,013$. Một phân tố của vật liệu được làm biến dạng kéo trước đến trạng thái A với $\varepsilon_A = 0,015$ và tiếp theo được cất tải cho đến khi chảy dẻo nén bắt đầu ở trạng thái C. Duy trì chảy dẻo nén tiếp tục cho đến khi $\varepsilon^p = 0$. Vật liệu được giả sử là biến cứng động học, với modulus dẻo E_p được lấy phụ thuộc vào thông số biến cứng đơn κ như được định nghĩa dưới đây.

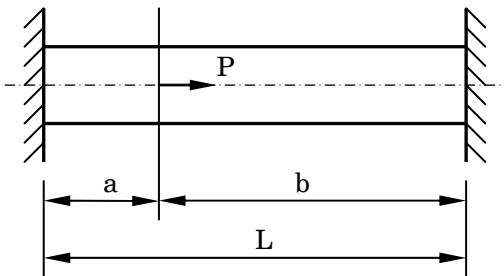
- (a) Hãy vẽ đường cong đặt tải-cất tải-đặt tải nghịch đảo $\sigma-\varepsilon^p$ đối với mỗi giả thiết sau đây : (i) $\kappa = \int (d\varepsilon^p d\varepsilon^p)^{1/2}$; (ii) $\kappa = \varepsilon^p$ (đối với $\varepsilon^p \geq$

0) ; (iii) $\kappa = \int \sigma d\varepsilon^p$; (iv) $\kappa = \int (\sigma - \alpha) d\varepsilon^p$ với α (có đơn vị ứng suất) là tâm của miền đàn hồi hiện hành.

- (b) Xác định các giá trị σ và ε khi $\varepsilon^p = 0$ trong quá trình chảy dẻo nén nghịch đảo đối với từng giả thiết trong bốn giả thiết ở câu (a).

1.7. Một thanh với hai đầu được ngầm chịu tác động của lực dọc trực P ở điểm cách đầu trái một khoảng a và cách đầu phải một khoảng b , với $a < b$ như được biểu diễn trong hình B1.7. Thanh được làm bằng vật liệu đàn-dẻo lý tưởng với ứng suất chảy σ_y . Lực dọc trực đầu tiên được gia tăng từ 0 đến khi chảy dẻo xảy ra trong toàn bộ thanh, và rồi được cất tải đến zero, sau đó đặt tải lại theo hướng nghịch đảo.

- (a) Xác định tải giới hạn đàn hồi P_e và tải giới hạn dẻo P_p trong quá trình đặt tải.
- (b) Xác định ứng suất dư và biến dạng dẻo trong thanh khi tải dọc trực P được giảm đến zero.



Hình B1.7. Hình bài tập 1.7

- (c) Xác định tải giới hạn dẻo P_p trong quá trình đặt tải nghịch đảo.
- (d) Hãy vẽ đường cong P theo u cho chu trình đặt tải-đặt tải nghịch đảo đối với trường hợp $b = 2a$, ở đây u là chuyển vị dọc trực của thanh ở thời điểm tải đang xé.

1.8. Dùng bảng của các cosine chỉ phương (ℓ_{ij}) như được cho trong thí dụ 1.4 (bảng 1.4), hãy chứng tỏ rằng hai mặt phẳng sau đây trùng nhau:

$$2x_1 - \frac{1}{3}x_2 + x_3 = 1 \quad \text{trong hệ trục } x_i$$

$$\frac{47}{25}x'_1 + \frac{14}{15}x'_2 - \frac{21}{25}x'_3 = 1 \quad \text{trong hệ trục } x'_i$$

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

1.9. Nếu $B_i = A_i / (A_j A_j)^{1/2}$, chứng tỏ rằng B_i là *vector* đơn vị.

1.10. Những mối quan hệ được cho như sau:

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji}$$

ở đây σ_{ij} và s_{ij} là những *tensor* bậc hai đối xứng, hãy chứng tỏ rằng (a) $s_{ii} = 0$ và (b) $\partial J_2 / \partial \sigma_{ij} = s_{ij}$.

1.11. Chứng minh rằng không có cặp *vector* A_i và B_i để mà $\delta_{ij} = A_i B_j$.

1.12. Chúng tỏ rằng một *tensor* bậc hai bất kỳ σ_{ij} có thể được viết dưới dạng

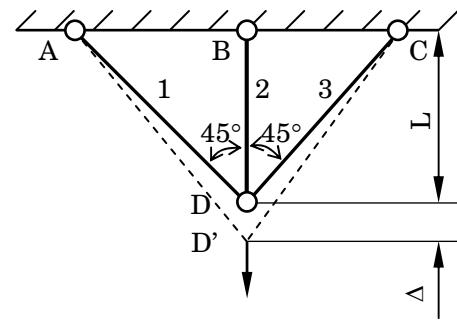
$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \alpha \delta_{ij}$$

ở đây $s_{ii} = 0$.

1.13. Xét hệ giàn phẳng đối xứng gồm có ba thanh với diện tích mặt cắt ngang A và chịu tác động của một tải thẳng đứng P ở điểm D như trong hình B1.13. Các thanh được làm bằng vật liệu đàn-dẻo lý tưởng với *modulus* đàn hồi E và ứng suất chảy σ_0 . Khi Tải P được gia tăng một cách liên tục, thanh 2 sẽ được chảy dẻo trước tiên ở trạng thái a (P_a, Δ_a), và tiếp theo các thanh 1 và 3 được chảy dẻo ở trạng thái b (P_b, Δ_b). Chảy dẻo xảy ra ở tải hằng P_b cho đến điểm D có một lượng chuyển vị thêm $\sigma_0 L/E$ (trạng thái c); rồi P được cắt tải hoàn toàn (trạng thái d). Sau đó, tải P được gia tăng theo hướng ngược lại cho tới khi tất cả ba thanh được chảy dẻo nghịch đảo (trạng thái f).

- Hãy tìm các ứng suất dư và biến dạng dư ở trạng thái d cho ba thanh trong hệ giàn.
- Hãy tìm tải chảy dẻo nghịch đảo.
- Vẽ đường cong của tải theo chuyển vị của nút D (P theo Δ) đối với toàn bộ chương trình đặt tải-cắt tải-đặt tải nghịch đảo.
- Tham khảo mô hình thanh song song của thí dụ 1.1, kết luận gì có thể rút ra từ mô hình giàn này?

Chương 1. Giới thiệu



Hình B1.13. Hình bài 1.13.