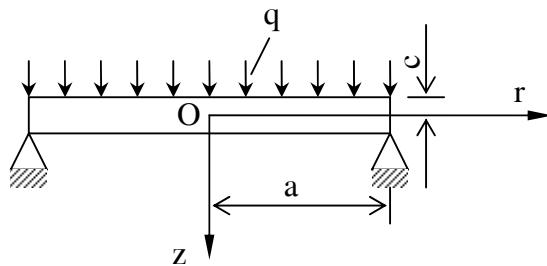


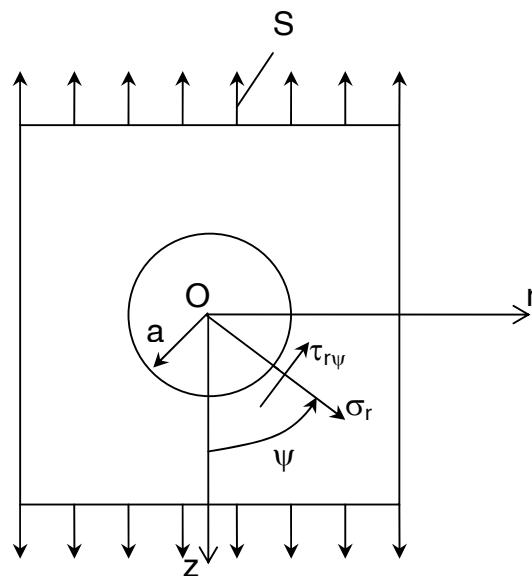
Chương 2. Bài toán đối xứng trục

1. Cho một tấm tròn, dày đều $\delta = 2c$, bán kính $R = a$ và được liên kết gối xung quanh biên tròn như hình vẽ. Tấm chịu tác động của áp lực đều q vuông góc với mặt trên của tấm.



Hãy xác định các thành phần ứng suất của các điểm trong tấm.

2. Xác định qui luật phân bố của các thành phần ứng suất trong đĩa tròn, dày đều $\delta = 2c$, bán kính $R = a$, được làm bằng vật liệu có khối lượng riêng ρ và quay đều với vận tốc góc ω .
3. Xác định sự phân bố ứng suất quanh một lỗ hổng hình cầu, bán kính a tại trung tâm bên trong một thanh chịu kéo đều ở hai đầu (xem hình).



Chương 2. Bài toán đối xứng trục

Lời giải.

1.

- Trường hợp chọn hàm ứng suất có dạng đa thức bậc ba bằng cách tổ hợp tuyến tính hai nghiệm riêng Φ_3 và Φ_1^* từ (2.29) và (2.30):

$$\Phi = a_3(2z^3 - 3r^2z) + b_3(z^3 + r^2z) \quad (1.a)$$

Thay (1.a) vào (2.18), ta thu được:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 6a_3 + (10v - 2)b_3; & \sigma_\theta &= 6a_3 + (10v - 2)b_3; \\ \sigma_z &= -12a_3 + (14 - 10v)b_3; & \tau_{rz} &= 0 \end{aligned} \quad (1.b)$$

Các biểu thức (1.b) chứng tỏ trường ứng suất trong tấm là trường ứng suất đồng nhất. Bằng sự hiệu chỉnh thích hợp các hằng số a_3 và b_3 , lời giải (1.b) mô tả trường ứng suất trong một tấm chịu các hằng số ứng suất σ_z và σ_r ở bề mặt tấm.

- Trường hợp chọn hàm ứng suất có dạng đa thức bậc bốn bằng cách tổ hợp tuyến tính hai nghiệm riêng Φ_4 và Φ_2^* từ (2.29) và (2.30):

$$\Phi = a_4(8z^4 - 24r^2z^2 + 3r^4) + b_4(2z^4 + r^2z^2 - r^4) \quad (1.c)$$

Thay (1.c) vào (2.18), ta thu được:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 96a_4z + 4b_4(14v - 1)z; \\ \sigma_z &= -192a_4z + 4b_4(16 - 14v)z; \\ \tau_{rz} &= 96a_4r - 2b_4(16 - 14v)r \end{aligned} \quad (1.d)$$

Vì $\tau_{rz} = 0 \forall r$, nên:

$$96a_4 - 2b_4(16 - 14v) = 0$$

Do đó:

$$\sigma_z = \tau_{rz} = 0; \quad \sigma_r = 28(1+v)b_4z \quad (1.e)$$

Lời giải (1.e) biểu diễn sự uốn đều của tấm bởi *moment* phân bố đều dọc theo biên tròn.

- Để có lời giải cho tấm chịu tác động của áp lực đều q vuông góc với mặt trên của tấm, ta chọn hàm ứng suất có dạng đa thức bậc sáu:

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

$$\begin{aligned}\Phi = & \frac{1}{3}a_6(16z^6 - 120z^4r_2 + 90z^2r^4 - 5r^6) + \\ & + b_6(8z^6 - 16z^4r^2 - 21z^2r^4 + 3r^6)\end{aligned}\quad (1.f)$$

Thay (1.f) vào (2.18), ta thu được:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= a_6(320z^3 - 720r^2z) + \\ & + b_6\{64(2+11v)z^3 + [504 - 48(22v)]r^2z\}; \\ \sigma_z &= a_6(-640z^3 + 960r^2z) + \\ & + b_6\{[-960 + 32(22)(2-v)]z^3 + [384 - 48(22)(2-v)]r^2z\}; \\ \tau_{rz} &= a_6(960rz^2 - 240r^3) + \\ & + b_6\{[-672 + 48(22)v]rz^2 + [432 - 12(22)v]r^3\}\end{aligned}$$

Thêm vào các thành phần ứng suất trên các ứng suất được rút ra từ (1.d) bằng cách lấy $b_4 = 0$: $\sigma_r = 96a_4z$; $\sigma_z = -192a_4z$; $\tau_{rz} = 96a_4r$ và các ứng suất được rút ra từ (b) của trường hợp kéo đều theo hướng z : $\sigma_z = b$.

Do đó ta thu được những biểu thức tính các thành phần ứng suất chứa bốn hằng số a_6 , b_6 , a_4 , b . Các hằng số này có thể được điều chỉnh sao cho thỏa mãn các điều kiện biên ở mặt trên và mặt dưới của tấm. Những điều kiện biên bao gồm:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= 0 \quad \text{tại } z = c; \quad \sigma_z = -q \quad \text{tại } z = -c; \\ \tau_{rz} &= 0 \quad \text{tại } z = c; \quad \tau_{rz} = 0 \quad \text{tại } z = -c\end{aligned}\quad (1.g)$$

Với q là cường độ của tải phân bố và $2c$ là chiều dày của tấm. Bốn hằng số a_6 , b_6 , a_4 , b sẽ được xác định từ bốn điều kiện biên (1.g) và các thành phần ứng suất thỏa các điều kiện biên (1.g):

$$\begin{aligned}\sigma_r &= q\left[\frac{2+v}{8}\frac{z^3}{c^3} - \frac{3(3+v)}{32}\frac{r^2z}{c^3} - \frac{3z}{8c}\right]; \\ \sigma_z &= q\left(-\frac{z^3}{4c^3} + \frac{3z}{4c} - \frac{1}{2}\right); \\ \tau_{rz} &= -\frac{3qr}{8c^3}(c^2 - z^2)\end{aligned}\quad (1.h)$$

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

Ta có thể nhận thấy rằng hai thành phần ứng suất σ_z và τ_{rz} được phân bố tương tự như trường hợp dầm có tiết diện hình chữ nhật hẹp chịu tải đều. Thành phần ứng suất σ_r được biểu diễn bởi hàm lẻ của biến z , và ở biên tròn của tấm chúng biểu thị *moment uốn* phân bố đều dọc theo biên này.

Để tìm lời giải cho tấm có liên kết gối xung quanh biên tròn, ta chông chập một ứng suất uốn thuần (1.e) và hiệu chỉnh hằng số b_4 sao cho *moment uốn* ở biên bằng không:

$$\int_{-c}^c \sigma_r z dz = 0$$

Biểu thức cuối cùng của σ_r có dạng:

$$\sigma_r = q \left[\frac{2+v}{8} \frac{z^3}{c^3} - \frac{3(3+v)}{32} \frac{r^2 z}{c^3} - \frac{3}{8} \frac{2+v}{5} \frac{z}{c} + \frac{3(3+v)}{32} \frac{a^2 z}{c^3} \right] \quad (1.i)$$

và ở tâm của tấm ta có:

$$(\sigma_r)_{r=0} = q \left[\frac{2+v}{8} \frac{z^3}{c^3} - \frac{3}{8} \frac{2+v}{5} \frac{z}{c} + \frac{3(3+v)}{32} \frac{a^2 z}{c^3} \right] \quad (1.j)$$

Lý thuyết cơ sở của tấm chịu uốn, dựa trên các giả định rằng các phân tố thẳng của tấm vuông góc với mặt phẳng trung hòa ($z = 0$) vẫn thẳng và vuông góc với mặt phẳng uốn của tấm trong suốt quá trình uốn, tìm được ứng suất hướng kính ở tâm đĩa:

$$\sigma_r = \frac{3(3+v)}{32} \frac{a^2 z}{c^3} q \quad (1.k)$$

So sánh (1.k) với (1.j), ta thấy rằng hai số hạng đầu trong kết quả chính xác (1.j) có trị số nhỏ nếu chiều dày $2c$ nhỏ so với bán kính a .

Nên chú ý rằng bằng cách đặt chông thêm tác động uốn thuần túy ta loại trừ *moment uốn* dọc theo biên tròn của tấm; nhưng có thành phần ứng suất hướng kính ở biên:

$$(\sigma_r)_{r=a} = q \left(\frac{2+v}{8} \frac{z^3}{c^3} - \frac{3}{8} \frac{2+v}{5} \frac{z}{c} \right) \quad (1.l)$$

Hợp của ứng suất này trên một đơn vị chiều dài của biên tròn và *moment* của chúng đều bằng không. Do đó, dựa trên cơ sở của nguyên lý *Saint-Venant*, ta có thể nói rằng việc bỏ qua thành phần ứng suất này sẽ không có ảnh hưởng đáng kể đến sự phân bố ứng suất ở xa mép của tấm.

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

Bằng cách chọn hàm ứng suất là các đa thức bậc cao hơn sáu, ta có thể khám phá thêm những trường hợp uốn của tấm tròn chịu tải phân bố không đều. Tất cả những lời giải trên chỉ thỏa khi độ vồng của tấm nhỏ so với chiều dày. Đối với các trường hợp độ vồng lớn, sự căng của mặt phẳng trung hòa tấm phải được khảo sát đến.

2.

Bài toán đã cho có tính đối xứng trục vì:

- Hình học kết cấu đối xứng quanh trục quay.
- Vật liệu kết cấu đối xứng quanh trục quay.
- Tải tác động (lực quán tính ly tâm - lực thể tích) đối xứng quanh trục quay.

Do đó trường ứng suất cần tìm trong đĩa tròn sẽ có tính đối xứng quanh trục quay.

Các thành phần lực thể tích :

$$X = \rho\omega^2 x; \quad Y = \rho\omega^2 y; \quad Z = 0 \quad (2.a)$$

Thêm thành phần của lực quán tính ly tâm vào phương trình vi phân cân bằng (2.11) ta sẽ có :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho\omega^2 r &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (2.b)$$

với ρ là khối lượng riêng và ω là vận tốc góc quay của đĩa.

Các phương trình tương thích:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_r + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) &= -\frac{2\rho\omega^2}{1-\nu} \\ \nabla^2 \sigma_\theta + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) &= -\frac{2\rho\omega^2}{1-\nu} \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} &= -\frac{2\nu\rho\omega^2}{1-\nu} \\ \nabla^2 \tau_{rz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r\partial z} - \frac{\tau_{rz}}{r^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.c)$$

Nghiệm riêng của hệ phương trình cân bằng (2.b):

$$\sigma_r = Br^2 + Dz^2; \quad \sigma_z = Ar^2; \quad \sigma_\theta = Cr^2 + Dz^2; \quad \tau_{rz} = 0 \quad (2.d)$$

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

Nghiệm này thỏa phương trình cân bằng thứ hai của (2.b) và phương trình thứ tư của (2.c). Bốn hằng số A, B, C, D được xác định sao cho thỏa phương trình cân bằng thứ nhất của (2.b) và ba phương trình đầu của (2.c):

$$A = \frac{\rho\omega^2(1+3v)}{6v}; \quad B = -\frac{\rho\omega^2}{3};$$

$$C = 0; \quad D = -\frac{\rho\omega^2(1+2v)(1+v)}{6v(1-v)}$$

Các thành phần ứng suất có dạng:

$$\sigma_r = -\frac{\rho\omega^2}{3}r^2 - \frac{\rho\omega^2(1+2v)(1+v)}{6v(1-v)}z^2 \quad (2.e)$$

$$\sigma_z = \frac{\rho\omega^2(1+3v)}{6v}r^2; \quad \tau_{rz} = 0;$$

$$\sigma_\theta = \frac{\rho\omega^2(1+2v)(1+v)}{6v(1-v)}z^2$$

Trong trường hợp đĩa tròn có chiều dày đều, ta đặt chồng lên lời giải (2.e) một trường ứng suất nhận được từ một hàm ứng suất có dạng đa thức bậc năm bằng cách tổ hợp hai nghiệm riêng bậc năm của hai họ nghiệm (2.29) và (2.30):

$$\Phi = a_5(8z^5 - 40r^2z^3 + 15r^4z) + b_5(2z^5 - r^2z^3 - 3r^4z) \quad (2.f)$$

Từ bốn hệ thức (2.18), ta tìm được:

$$\sigma_r = -a_5(180r^2 - 240z^2) + b_5[(36 - 54v)r^2 + 6(1 + 18v)z^2];$$

$$\sigma_z = -a_5(-240r^2 + 480z^2) + b_5[(-102 + 54v)r^2 + (96 - 108v)z^2]; \quad (2.g)$$

$$\sigma_\theta = a_5(-60r^2 + 240z^2) + b_5[(12 - 54v)r^2 + (6 + 108v)z^2];$$

$$\tau_{rz} = 480a_5rz - b_5(96 - 108v)rz$$

Chồng chập các thành phần ứng suất này vào (2.e) và xác định các hằng số a_5 và b_5 sao cho hai thành phần ứng suất τ_{rz} và σ_z triệt tiêu, ta có:

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\rho\omega^2 \left[\frac{v(1+v)}{2(1-v)} z^2 + \frac{3+v}{8} r^2 \right]; \\ \sigma_\theta &= -\rho\omega^2 \left[\frac{v(1+v)}{2(1-v)} z^2 + \frac{(1+3v)}{8} r^2 \right]\end{aligned}\quad (2.h)$$

Dọc theo biên tròn của đĩa không có lực nén, do đó điều kiện biên tĩnh học ở biên tròn:

$$\int_{-c}^c \sigma_r dz \Big|_{r=a} = 0 \quad (2.i)$$

Để (2.i) thỏa, ta đặt chồng lên (2.h) áp lực kéo đều theo phương hướng kính có độ lớn:

$$\frac{\rho\omega^2}{8} (3+v) a^2 + \rho\omega^2 \frac{v(1+v)}{2(1-v)} \frac{c^2}{3}$$

Cuối cùng ta có:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \rho\omega^2 \left[\frac{3+v}{8} (a^2 - r^2) + \frac{v(1+v)}{6(1-v)} (c^2 - 3z^2) \right]; \\ \sigma_\theta &= \rho\omega^2 \left[\frac{3+v}{8} a^2 - \frac{1+3v}{8} r^2 + \frac{v(1+v)}{6(1-v)} (c^2 - 3z^2) \right]; \\ \sigma_\theta &= 0; \quad \tau_{rz} = 0\end{aligned}\quad (2.j)$$

Sự phân bố ứng suất trong đĩa tròn xoay có dạng một ellipsoid dẹt tròn xoay.

3.

Đối với thanh chịu kéo đơn với tải phân bố bề mặt S ở hai đầu, các thành phần ứng suất pháp và tiếp tác động lên mặt cầu của lỗ trong thanh có thể xác định theo điều kiện cân bằng:

$$\sigma_R = \sigma_r \sin^2 \psi + \sigma_z \cos^2 \psi + 2\tau_{rz} \sin \psi \cos \psi = S \cos^2 \psi; \quad (3.a)$$

$$\tau_{R\psi} = (\sigma_r - \sigma_z) \sin \psi \cos \psi - \tau_{rz} (\sin^2 \psi - \cos^2 \psi) = -S \sin \psi \cos \psi$$

Các thành phần ứng suất của một điểm trong thanh được tạo ra bởi một lực kéo ở đầu thanh sẽ được xác định bởi các hệ thức (2.36) và (2.37). Tương tự, các thành phần ứng suất của một điểm trong thanh được tạo ra bởi một lực kéo ở đầu thanh còn lại sẽ được xác định bằng cách thay thế các số hạng $f(r,z)$ trong (2.36) bởi $-[f + (\partial f / \partial z)d]$.

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

Chồng chập hai trường ứng suất này, ta có các thành phần ứng suất của một điểm trong thanh được tạo ra bởi hai lực kéo ở hai đầu thanh:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -A \frac{\partial}{\partial z} \left[(1-2v)z(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3r^2z(r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \right]; \\ \sigma_\theta &= -A \frac{\partial}{\partial z} (1-2v)z(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}; \\ \sigma_z &= A \frac{\partial}{\partial z} \left[(1-2v)z(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3z^3(r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \right]; \\ \tau_{rz} &= A \frac{\partial}{\partial z} \left[(1-2v)r(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3rz^2(r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \right]\end{aligned}\tag{3.b}$$

Thay (3.b) vào (3.a) và dùng quan hệ hình học:

$$\sin \psi = r(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r}{R}; \quad \cos \psi = z(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{z}{R}$$

ta thu được:

$$\begin{aligned}\sigma_R &= -\frac{2(1+v)A}{R^3} \left[-\sin^2 \psi + \frac{2(2-v)}{(1+v)} \cos^2 \psi \right]; \\ \tau_{R\psi} &= -\frac{2(1+v)A}{R^3} \sin \psi \cos \psi\end{aligned}\tag{3.c}$$

Trường ứng suất (3.c) đối xứng với trục z và với mặt phẳng tọa độ vuông góc với trục z.

Bây giờ ta xét trường hợp tại gốc tọa độ có ba hệ thống cặp lực cùng đường tác dụng, cùng trị số và ngược chiều: một cặp tác động dọc trục z, một cặp tác động dọc trục r và một cặp tác động dọc vuông góc với mặt phẳng rz. Do tính đối xứng đã đề cập ở trên, trường ứng suất thu được lúc này sẽ đối xứng quanh gốc tọa độ.

Nếu ta khảo sát hình cầu với tâm ở gốc tọa độ, chỉ có duy nhất một thành phần ứng suất pháp phân bố đều tác động lên mặt cầu. Độ lớn của thành phần ứng suất này có thể được xác định bởi hệ thức đầu của (3.c). Xét điểm trên đường tròn trong mặt phẳng rz, hệ thức đầu của (3.c) biểu thị một phần của ứng suất pháp này do cặp lực dọc trục z tạo ra. Bằng cách hoán vị $\sin \psi$ và $\cos \psi$, ta thu được phần ứng suất pháp do cặp lực dọc trục r gây ra. Phần ứng suất pháp do cặp lực tác động dọc vuông góc với mặt phẳng rz sẽ

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

nhận được bằng cách thay $\psi = \pi/2$. Dùng phương pháp cộng tác dụng, ta xác định được ứng suất pháp tác động lên mặt cầu:

$$\sigma_R = -\frac{4(1-2\nu)A}{R^3} \quad (3.d)$$

Khi lõi hổng có bán kính a nhỏ, ta phải đặt chồng lên tải kéo đơn một trường ứng suất với các thành phần ứng suất bằng trị số và ngược dấu với (3.a) và chúng triệt tiêu ở vô cùng.

Sử dụng các thành phần ứng suất (3.c) do cặp lực dọc trục z tạo ra và ứng suất (3.d), ta nhận được các thành phần ứng suất tác động trên mặt cầu bán kính a :

$$\sigma_R' = -\frac{2(1+\nu)A}{a^3} \left[-1 + \frac{5-\nu}{1+\nu} \cos^2 \psi \right]; \quad (3.e)$$

$$\tau_{R\psi}' = -\frac{2(1+\nu)A}{a^3} \sin \psi \cos \psi$$

$$\sigma_R'' = \frac{B}{a^3}; \quad \tau_{R\psi}'' = 0 \quad (3.f)$$

với A và B là các hằng số sẽ được hiệu chỉnh sau. Ta nhận thấy rằng, kết hợp các ứng suất (3.e) và (3.f), các thành phần ứng suất (3.a) do kéo không thể tạo ra sự triệt tiêu. Do đó, một trường ứng suất bổ sung là cần thiết.

Ta chọn hàm ứng suất bổ sung theo (2.31):

$$\Phi = Cz(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

Theo (2.18), các thành phần ứng suất được xác định:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{3C}{R^5} (-4 + 35 \sin^2 \psi \cos^2 \psi); \\ \sigma_z &= \frac{3C}{R^5} (3 - 30 \cos^2 \psi + 35 \cos^4 \psi); \\ \sigma_\theta &= \frac{3C}{R^5} (1 - 5 \cos^2 \psi); \\ \tau_{rz} &= \frac{15C}{R^5} (-3 \sin \psi \cos \psi + 7 \sin \psi \cos^3 \psi) \end{aligned} \quad (3.g)$$

Thay (3.g) vào (3.a) ta có các thành phần ứng suất tác động trên mặt cầu bán kính a :

$$\sigma_R''' = \frac{12C}{a^5} (-1 + 3 \cos^2 \psi); \quad \tau_{R\psi}''' = \frac{24C}{a^5} \sin \psi \cos \psi \quad (3.h)$$

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

Tổ hợp (3.e), (3.f) và (3.h) ta có:

$$\sigma_R = \frac{2(1+v)A}{a^3} - 2(5-v)\frac{A}{a^3}\cos^2\psi + \frac{B}{a^3} - \frac{12C}{a^5} + \frac{36C}{a^5}\cos^2\psi; \quad (3.k)$$

$$\tau_{R\psi} = -\frac{2(1+v)A}{a^3}\sin\psi\cos\psi + \frac{24C}{a^5}\sin\psi\cos\psi$$

Đặt ch�ng các ứng suất này lên (3.a), bề mặt cầu của lõi sẽ được tự do nếu chúng thỏa các điều kiện:

$$\begin{aligned} \frac{2(1+v)A}{a^3} + \frac{B}{a^3} - \frac{12C}{a^5} &= 0; \\ -2(5-v)\frac{A}{a^3} + \frac{36C}{a^5} &= -S; \\ -\frac{2(1+v)A}{a^3} + \frac{24C}{a^5} &= S \end{aligned} \quad (3.l)$$

Giải hệ phương trình (3.l), ta được:

$$\frac{A}{a^3} = \frac{5S}{2(7-5v)}; \quad \frac{B}{a^3} = \frac{S(1-5v)}{7-5v}; \quad \frac{C}{a^5} = \frac{S}{2(7-5v)} \quad (3.m)$$

Ứng suất hoàn chỉnh tác động ở một điểm trong thanh bây giờ thu được bằng cách cộng tác dụng lên áp lực kéo đơn S các thành phần ứng suất được cho bởi các hệ thức (3.g), các thành phần ứng suất (3.b) do cắp lực, các thành phần ứng suất do tâm áp lực được cho bởi các hệ thức (3.f) và thành phần ứng suất pháp theo phương tiếp tuyến thu được từ phương trình cân bằng:

$$\sigma_t = \frac{d\sigma_R}{dR} \frac{R}{2} + \sigma_R \quad (3.n)$$

Thí dụ, xác định các ứng suất tác động lên mặt phẳng $z = 0$. Do điều kiện đối xứng, các thành phần ứng suất tiếp sẽ không tồn tại trên mặt phẳng này. Từ (3.g), thay $\psi = \pi/2$ và $R = r$, ta có:

$$\sigma_z' = \frac{9C}{r^5} = \frac{9Sa^5}{2(7-5v)r^5} \quad (3.0)$$

Từ (3.b), khi $z = 0$, ta có:

$$\sigma_z'' = \frac{A(1-2v)}{r^3} = \frac{5(1-2v)S}{2(7-5v)} \frac{a^3}{r^3} \quad (3.p)$$

Từ (3.n), ta có:

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

$$\sigma_z''' = (\sigma_t)_{z=0} = -\frac{B}{2r^3} = -\frac{S(1-5v)}{2(7-5v)} \frac{a^3}{r^3} \quad (3.q)$$

Ứng suất tổng trên mặt phẳng $z = 0$:

$$\sigma_z = \sigma_z' + \sigma_z'' + \sigma_z''' + S = S \left[1 + \frac{4-5v}{2(7-5v)} \frac{a^3}{r^3} + \frac{4-5v}{2(7-5v)} \frac{a^3}{r^3} + \frac{9}{2(7-5v)} \frac{a^5}{r^5} \right] \quad (3.r)$$

Tại $r = a$, ta có :

$$(\sigma_z)_{\max} = \frac{27-15v}{2(7-5v)} S \quad (3.s)$$

Lấy $v = 0,3$, ta thu được :

$$(\sigma_z)_{\max} = \frac{45}{22} S \quad (3.t)$$

Ứng suất cực đại này lớn hơn hai lần so với tải kéo phân bố đều S tác động lên hai đầu thanh. Sự gia tăng ứng suất này gọi là tập trung ứng suất. Khi r tăng ứng suất (3.r) tiến nhanh đến giá trị S . Thí dụ, tại $r = 2a$, $v = 0,3$, ta có $\sigma_z = 1,054S$.

Tương tự, tại các điểm trên mặt phẳng $z = 0$, ta có:

$$(\sigma_\theta)_{z=0} = \frac{3C}{r^5} - \frac{A(1-2v)}{r^3} - \frac{B}{2r^3}$$

Thay các giá trị A , B , C từ (3.m) và lấy $r = a$, ta thu được ứng suất kéo dọc theo xích đạo ($\psi = \pi/2$) của lõi:

$$(\sigma_\theta)_{z=0, r=a} = \frac{(15v-3)}{2(7-5v)} S$$

Ở cực của lõi ($\psi = 0$ hoặc $\psi = \pi/2$), ta có:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{2(1-2v)A}{a^3} - \frac{12C}{a^5} - \frac{B}{2a^3} = -\frac{3+15v}{2(7-5v)} S \quad (3.u)$$

Do đó, khi kéo thanh theo chiều dọc sẽ tạo ra nén tại điểm cực này.

Kết hợp tải kéo S theo một phương với tải nén S theo phương vuông góc, ta có thể thu được lời giải cho sự phân bố ứng suất quanh lõi hổng hình cầu trong trường hợp trượt thuần túy. Ứng suất tiếp cực đại trong trường hợp này :

$$\tau_{\max} = \frac{15(1-v)}{7-5v} S \quad (3.v)$$