

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

1. Tại điểm P cho tensor ứng suất:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

- a) Biểu diễn phân tố ứng suất.
- b) Xác định vector ứng suất trên tiết diện đi qua điểm P song song với mặt phẳng ABC. Với A(4,0,0); B(0,2,0); C(0,0,6).
- c) Xác định các ứng suất chính và các phương chính. Vẽ các vòng tròn Mohr ứng suất.
- d) Xác định ứng suất pháp và tiếp trên mặt nghiêng đều so với ba phương chính. Xác định các mặt nghiêng có ứng suất tiếp cực đại, cực tiểu và tính các ứng suất tiếp cực trị này.

2. Trạng thái ứng suất tại một điểm cho bởi tensor ứng suất:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & a\sigma & b\sigma \\ a\sigma & \sigma & c\sigma \\ b\sigma & c\sigma & \sigma \end{bmatrix}$$

với a, b, c là các hằng số, σ là một trị số ứng suất. Xác định các hằng số a, b, c sao cho ứng suất trên mặt nghiêng đều với ba trục tọa độ bằng không.

3. Trường ứng suất trong vật rắn được cho bởi tensor:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 3xy & 5y^2 & 0 \\ 5y^2 & 0 & 2z \\ 0 & 2z & 0 \end{bmatrix}$$

Xác định các thành phần X , Y , Z của lực thể tích để phương trình cân bằng thỏa mãn trong toàn vật.

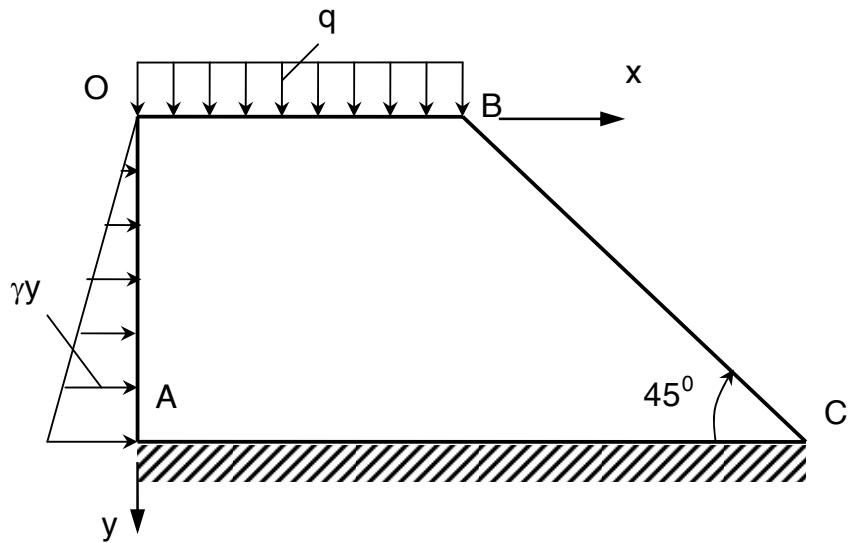
4. Cho tensor ứng suất tại điểm P:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \sigma & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Xác định giá trị σ để ứng suất bằng không trên một mặt nghiêng. Xác định các cosin chỉ phương của pháp tuyến đơn vị của mặt nghiêng đó.

5. Một đập nước được mô hình hóa bằng bài toán phẳng chịu lực như hình vẽ. Hãy viết các điều kiện biên tĩnh học trên các mặt OA, OB và BC.

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát



6. Cho trường tensor biến dạng trong vật rắn:

$$T_e = \begin{bmatrix} x^2 & y^2 & xz \\ y^2 & z & z^3 \\ xz & z^3 & x^2 \end{bmatrix}$$

Trường biến dạng này có thỏa điều kiện tương thích không?

7. Cho tensor biến dạng tại một điểm:

$$T_e = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Xác định tensor biến dạng trong hệ trục chính biến dạng. Tính các bất biến của tensor biến dạng.

8. Chứng tỏ rằng trường chuyển vị của vật rắn:

$$u = Ax + 3y; \quad v = 3x - By; \quad w = 5$$

biểu thị trường biến dạng phẳng. Xác định quan hệ giữa hai hằng số A và B để biến dạng thể tích bằng không.

9. Cho trường chuyển vị của vật rắn:

$$u = 4x - y + 3z; \quad v = x + 7y; \quad w = -3x + 4y + 4z$$

Xác định các biến dạng chính.

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

Lời giải.

1. Sinh viên tự giải.
2. *Tensor* ứng suất của một điểm cho bởi:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma & a\sigma & b\sigma \\ a\sigma & \sigma & c\sigma \\ b\sigma & c\sigma & \sigma \end{bmatrix}$$

Dùng hệ thức Cauchy (1.50a):

$$t_i^{(n_i)} = \sigma_{ji} n_j = 0$$

Dạng chi tiết của (1.50a) biểu diễn ba thành phần hình chiếu lên ba trục tọa độ của vector ứng suất $t_i^{(n)}$ trên mặt nghiêng ABC nghiêng đều với ba trục tọa độ:

$$t_1^{(n_1)} = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma (1+a+b) = 0$$

$$t_2^{(n_2)} = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma (a+1+c) = 0$$

$$t_3^{(n_3)} = \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma (b+c+1) = 0$$

Hay:

$$\begin{cases} 1+a+b=0 \\ a+1+c=0 \\ b+c+1=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=c=-\frac{1}{2}$$

3. Trường ứng suất trong vật rắn được cho bởi *tensor*:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 3xy & 5y^2 & 0 \\ 5y^2 & 0 & 2z \\ 0 & 2z & 0 \end{bmatrix}$$

Theo phương trình cân bằng (1.53a) ta có:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i = 0$$

Hay dạng khai triển các phương trình cân bằng (1.53a):

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho b_1 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho b_2 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho b_3 = 0$$

Thay các dữ liệu vào, ta có các thành phần của lực thể tích để phương trình cân bằng thỏa mãn trong toàn vật:

$$\begin{cases} 3y + 10y + 0 + \rho b_1 = 0 \\ 0 + 0 + 2 + \rho b_2 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + \rho b_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \rho b_1 = -13y \\ Y = \rho b_2 = -2 \\ Z = \rho b_3 = 0 \end{cases}$$

4. Tensor ứng suất của điểm :

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \sigma & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Gọi n_i là vector pháp tuyến đơn vị của mặt nghiêng cần xác định, ta có:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (1)$$

Các thành phần hình chiếu của vector ứng suất bằng không trên mặt nghiêng được xác định theo công thức (1.50b):

$$t_1^{(n_i)} = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 = 0n_1 + 1n_2 + 2n_3 = 0 \quad (2)$$

$$t_2^{(n_i)} = \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{32}n_3 = 1n_1 + \sigma n_2 + 1n_3 = 0 \quad (3)$$

$$t_3^{(n_i)} = \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 = 2n_1 + 1n_2 + 0n_3 = 0 \quad (4)$$

Giải hệ bốn phương trình trên ta thu được:

$$\sigma = 1 \text{ MPa}; \quad n_1 = n_3 = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}; \quad n_2 = \mp \frac{\sqrt{6}}{3};$$

Hay:

$$\alpha = \gamma = 65,91^\circ; \quad n_2 = 144,74^\circ;$$

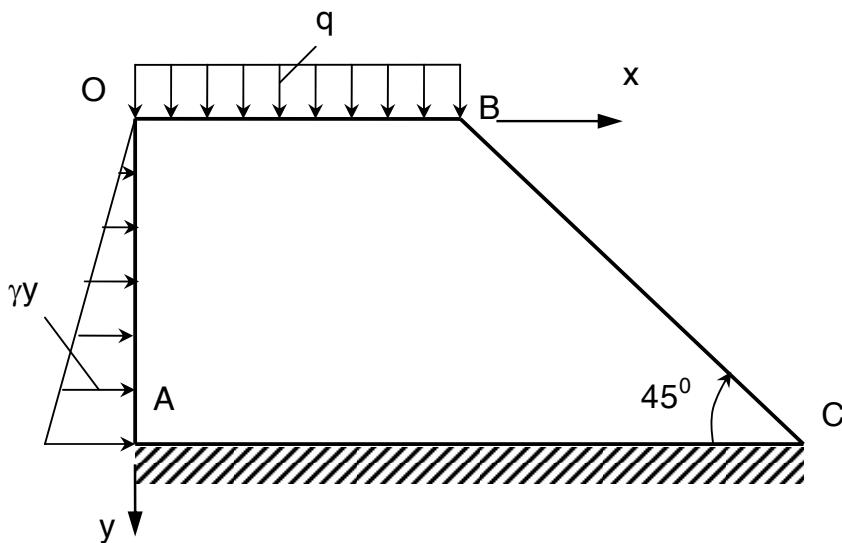
$$\alpha = \gamma = 114,095^\circ; \quad n_2 = 35,26^\circ$$

5. Đây là mô hình hóa bằng bài toán phẳng.

Các điều kiện biên tĩnh học về lực bề mặt của bài toán phẳng có dạng tổng quát:

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

$$q_j = \sigma_{ij} n_i; \quad i, j = 1, 2 \text{ hoặc } i, j = x, y$$



Hay dưới dạng khai triển:

$$q_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 \quad \text{hay} \quad q_x = \sigma_x \ell + \tau_{yx} m;$$

$$q_2 = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 \quad \text{hay} \quad q_y = \tau_{xy} \ell + \sigma_y m$$

- Trên mặt OA ta có: $q_x = \gamma y$; $q_y = 0$; $\ell = -1$; $m = 0$ nên

$$\sigma_x = -\gamma y; \quad \tau_{xy} = 0$$

- Trên mặt OB ta có: $q_x = 0$; $q_y = q$; $\ell = 0$; $m = -1$ nên

$$\tau_{yx} = 0; \quad \sigma_y = -q$$

- Trên mặt BC ta có: $q_x = 0$; $q_y = 0$; $\ell = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ nên:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (\sigma_x - \tau_{yx}) = 0;$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (\tau_{xy} - \sigma_y) = 0$$

- Cho trường tensor biến dạng trong vật rắn:

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} x^2 & y^2 & xz \\ y^2 & z & z^3 \\ xz & z^3 & x^2 \end{bmatrix}$$

Vì:

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0$$

Nên quan hệ sau đây luôn thỏa:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Tương tự hai mối quan hệ sau đây cũng luôn thỏa:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}$$

Vì:

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} x^2 & y^2 & xz \\ y^2 & z & z^3 \\ xz & z^3 & x^2 \end{bmatrix}$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (-0 + 0 + 0) = 0$$

Nên quan hệ sau đây luôn thỏa:

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

Tương tự hai mối quan hệ sau đây cũng luôn thỏa:

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

Vậy trường biến dạng đã cho thỏa điều kiện tương thích.

7. Cho tensor biến dạng tại một điểm:

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Các bất biến của tensor biến dạng:

$$I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 13$$

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

$$I_2 = -\varepsilon_x \varepsilon_y - \varepsilon_y \varepsilon_z - \varepsilon_z \varepsilon_x + (\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2) = -20 - 16 - 20 + 2 = -54$$

$$I_3 = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + 2\varepsilon_{xy} \varepsilon_{yz} \varepsilon_{zx} - \varepsilon_x \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_y \varepsilon_{zx}^2 - \varepsilon_z \varepsilon_{xy}^2 = 80 + 0 - 0 - 4 - 4 = 72$$

Các biến dạng chính là các nghiệm của phương trình bậc ba:

$$\varepsilon^3 - I_1 \varepsilon^2 - I_2 \varepsilon - I_3 = 0$$

Thay các hệ số vào phương trình trên, ta có:

$$\varepsilon^3 - 13\varepsilon^2 + 54\varepsilon - 72 = 0 \quad \text{hay} \quad (\varepsilon - 3)(\varepsilon^2 - 10\varepsilon + 24) = 0$$

Các ứng suất chính:

$$\varepsilon_1 = 6; \quad \varepsilon_2 = 4; \quad \varepsilon_3 = 3$$

Tensor biến dạng trong hệ trực chính biến dạng:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

8. Cho trường chuyển vị của vật rắn:

$$u = Ax + 3y; \quad v = 3x - By; \quad w = 5$$

Ta có:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = A; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -B; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 6; \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0; \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0$$

Nên trường chuyển vị của vật rắn biểu thị trường biến dạng phẳng trong mặt phẳng (x,y).

Quan hệ giữa hai hằng số A và B để biến dạng thể tích bằng không:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = A - B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = B$$

9. Cho trường chuyển vị của vật rắn:

$$u = 4x - y + 3z; \quad v = x + 7y; \quad w = -3x + 4y + 4z$$

Các thành phần biến dạng :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 4; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 7; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 4;$$

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0; \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0; \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 4$$

Tensor biến dạng:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Các bất biến của tensor biến dạng:

$$I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 15$$

$$I_2 = -\varepsilon_x \varepsilon_y - \varepsilon_y \varepsilon_z - \varepsilon_z \varepsilon_x + \frac{1}{4} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) = -28 - 28 - 16 + 4 = -68$$

$$I_3 = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4} (\gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} - \varepsilon_x \gamma_{yz}^2 - \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 - \varepsilon_z \gamma_{xy}^2) = 112 + \frac{1}{4} (0 - 64 - 0 - 0) = 96$$

Các biến dạng chính là các nghiệm của phương trình bậc ba:

$$\varepsilon^3 - I_1 \varepsilon^2 - I_2 \varepsilon - I_3 = 0$$

Thay các hệ số vào phương trình trên, ta có:

$$\varepsilon^3 - 15\varepsilon^2 + 68\varepsilon - 96 = 0 \quad \text{hay} \quad (\varepsilon - 4)(\varepsilon^2 - 11\varepsilon + 24) = 0$$

Các ứng suất chính:

$$\varepsilon_1 = 8; \quad \varepsilon_2 = 4; \quad \varepsilon_3 = 3$$

Tensor biến dạng trong hệ trục chính biến dạng:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$