

Chương 5

TÍNH TOÁN HỆ THANH

5.1. Hệ thanh dàn.

5.2. Khung phẳng.

5.3. Khung không gian.

Tính toán hệ thanh

Phương pháp phân tích bài toán hệ thanh theo PPPTHH với mô hình tương thích cũng không nằm ngoài các bước đi chung đã nói. Vấn đề còn lại là tùy thuộc đặc tính của từng loại bài toán mà áp dụng. Trước hết cần thấy rằng bài toán hệ thanh thuộc loại bài toán một chiều khi mà các thành phần chuyển vị của các phần tử chỉ là hàm của một biến tọa độ x .

5.1. HỆ THANH DÀN.

Như đã biết dàn là một hệ gồm các thanh chỉ chịu kéo nén đúng tâm hay là một trường hợp cụ thể của thanh chỉ chịu biến dạng dọc trực. Vậy, trước tiên ta bàn đến thanh chịu biến dạng dọc trực.

1- Phần tử thanh chịu biến dạng dọc trực:

Xét một phần tử thanh có 2 điểm nút chịu biến dạng dọc trực, chịu tải trọng phân bố dọc trực $p(x)$ như hình 5.1.

Rõ ràng phần tử chỉ có 2 bậc tự do là 2 chuyển vị của 2 nút đầu và cuối.

Do đó chuyển vị dọc trực $u(x)$ của phần tử chỉ có thể là một xấp xỉ tuyến tính.

$$u(x) = a_1 + a_2 x$$

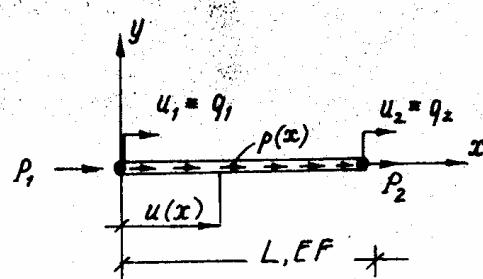
$$\text{Hay } u(x) = [N] \{q\}_e$$

$$\text{Trong đó: } \{q\}_e = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_e$$

Và như ở thí dụ chương 4 đã biết

$$\text{Ma trận các hàm dạng } [N] = \left[\left(1 - \frac{x}{L} \right) \frac{x}{L} \right]$$

Trong bài toán này, vectơ biến dạng $\{\epsilon\} = \{\epsilon_x\}$, vectơ ứng suất cũng chỉ còn $\{\sigma\} = \{\sigma_x\}$.



Hình 5.1.

Chương 5. Tính toán hệ thanh

Trong phương trình quan hệ chuyển vị biến dạng: $[\partial] = \left[\frac{d}{dx} \right]$ vì $\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$

Trong phương trình định luật Hook, ma trận $[D]$ chỉ còn: $[D] = [E]$ hay $\sigma_x = E \varepsilon_x$ (với E: môđun đàn hồi Young)

Vậy theo (4.42), ma trận tính biến dạng:

$$[B] = [\partial] [N] = \left[\frac{d}{dx} \right] \left[\left(1 - \frac{x}{L} \right) \frac{x}{L} \right]$$

Hay: $[B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$

Và ma trận cứng phần tử, theo (4.47).

$$\begin{aligned} [K]_e &= \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \\ &= \int_0^L \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} E \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} F dx = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Trong đó F: Diện tích mặt cắt ngang phần tử.

Vector tải phần tử $\{P\}_e$ được tính theo (4.48):

Do lực phân bố dọc trục p(x):

$$\{P\}_e^P = \int_0^L [N]^T \{p(x)\} dx = \int_0^L \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{L} \right) \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} p(x) dx \quad (5.2)$$

Trường hợp $p(x) = p_0 = \text{const.}$

$$\{P\}_e^P = p_0 \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} dx = \frac{p_0 L}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

Do nhiệt độ: $\{P\}_e^i = \int_{V_e} [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dV$

$$= \int_0^L \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} E \{\alpha T\} F dx = EF \alpha T \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

Trong đó T: Độ biến thiên nhiệt độ

Chương 5. Tính toán hệ thanh

Để có thể thấy rõ các bước đi và phân tích bài toán theo phương pháp PTHH chúng ta xét kỹ thí dụ dưới đây.

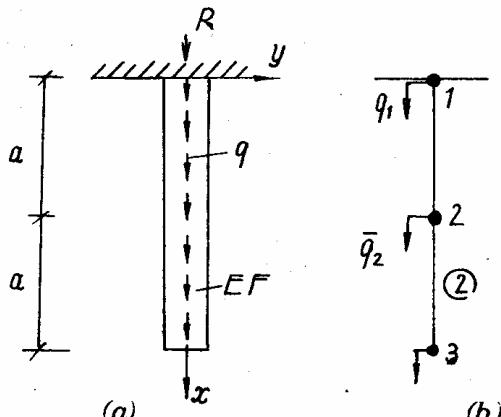
Thí dụ 1: Giải bài toán thanh đơn giản dưới đây (h. 5.2a) theo PPPTHH với sơ đồ 2 phần tử. Biết chiều dài thanh là $2a$. Độ cứng EF là không đổi. Thanh chịu tải trọng phân bố đều dọc trục, cường độ $q = \text{const}$

Các bước giải:

1. Thực hiện rời rạc hóa vật thể khảo sát bởi việc định rõ các nút, các phần tử. Rồi thực hiện đánh số nút, đánh số phần tử.

Trong bài toán thanh đơn giản này, ta chia thanh thành 2 phần tử (phần tử (1) và (2)) bởi hệ thống 3 điểm nút 1, 2, và 3. (Hình 5.2b)

Sau đó trên sơ đồ kết cấu đã được rời rạc hóa, thiết lập ma trận chỉ số [b]



Hình 5.2. a. Sơ đồ kết cấu
b. Sơ đồ kết cấu được rời rạc hóa.

Phần tử	Chi số cục bộ	Nút đầu (Nút i)	Nút cuối (Nút j)
(1)		1	2
(2)		2	3

Hay ma trận [b] là: $[b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

2. Thiết lập các ma trận độ cứng phần tử $[K]_e$ rồi thực hiện ghép nối các phần tử để xây dựng ma trận cứng tổng thể $\bar{[K]}$.

Nhận xét rằng do 2 phần tử có chiều dài và độ cứng như nhau nên dễ thấy là $[K]_1 = [K]_2$. Cụ thể theo (5.1)

$$[K]_1 = \frac{EF}{a} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ dx & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Chỉ số tổng thể của phần tử (1)}$$

$$[K]_2 = \frac{EF}{a} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ dx & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Chỉ số tổng thể của phần tử (2)}$$

Thực hiện ghép nối các phần tử;

Chương 5. Tính toán hệ thanh

$$\overline{[K]} = \frac{EF}{a} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & \\ 1+1 & -1 & \\ \hline dx & & 1 \end{bmatrix}$$

Chỉ số tổng thể
tổn kết cấu

$$\Rightarrow \overline{[K]} = \frac{EF}{a} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ \hline dx & & 1 \end{bmatrix}$$

3. Thiết lập các vectơ tải phần tử $\{P\}_e$ rồi thực hiện ghép nối các phần tử để xây dựng vectơ tải tổng thể $\{\bar{P}\}$

Để thấy trong bài toán này $\{P\}_1 = \{P\}_2$. Và theo (5.4)

$$\{P\}_1 = \frac{qa}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}; \quad \{P\}_2 = \frac{qa}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Chỉ số tổng thể

Chỉ số tổng thể

Thực hiện ghép nối, với chú ý là do tại các nút 2 và 3 không có tải trọng tập trung cho trước, còn tại nút 1 có phản lực R. Nên vectơ tải trọng nút $\{\bar{P}\}_n$ là:

$$\{\bar{P}\}_n = \begin{Bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Và khi đó vectơ tải tổng thể:

$$\{\bar{P}\} = \frac{qa}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1+1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{qa}{2} + R \\ qa \\ \frac{qa}{2} \end{Bmatrix}$$

Vậy ta có hệ phương trình $\overline{[K]}\{\bar{q}\} = \{\bar{P}\}$ như sau:

$$\frac{EF}{a} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & \\ \hline dx & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{qa}{2} + R \\ qa \\ \frac{qa}{2} \end{Bmatrix}$$

4. Áp đặt điều kiện biên: Rõ ràng theo sơ đồ kết cấu đã cho thì chuyển vị của nút 1 là bằng 0. Hay $\bar{q}_1 = 0$. Vậy hệ thống phương trình để giải sẽ nhận được bằng cách "ném na" là "xóa đi" các hàng và cột tương ứng $\bar{q}_1 = 0$, tức là "xóa" hàng 1, cột 1 của hệ phương trình trên.

Cuối cùng ta có: $\overline{[K^*]}\{\bar{q}^*\} = \{\bar{P}^*\}$ như sau:

$$\frac{EF}{a} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{Bmatrix} = \frac{qa}{2} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

5. Giải hệ phương trình này ta tìm được các chuyển vị nút \bar{q}_2 và \bar{q}_3 , cụ thể là

Chương 5. Tính toán hệ thanh

$$\{\bar{q}^*\} = \begin{Bmatrix} \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \end{Bmatrix} = \frac{qa^2}{2 EF} \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Và như vậy tất cả các chuyển vị nút là đã biết, cụ thể

$$\{\bar{q}\} = \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \end{Bmatrix} = \frac{qa^2}{2 EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Từ đó vectơ chuyển vị nút $\{q\}_e$ của mỗi phần tử cũng hoàn toàn xác định
cụ thể:

$$\{q\}_1 = \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{Bmatrix} = \frac{qa^2}{2 EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

$$\{q\}_2 = \begin{Bmatrix} \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \end{Bmatrix} = \frac{qa^2}{2 EF} \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Và biểu đồ chuyển vị của mỗi phần tử cũng hoàn toàn xác định như sau:

$$u_1(x) = [N] \{q\}_1 = N_1(x) \cdot q_1 + N_2(x) \cdot q_2$$

$$u_2(x) = [N] \{q\}_2 = N_1(x) \bar{q}_2 + N_2(x) \bar{q}_3$$

Kết quả cho trên hình **5.3a** và **5.3b**.

6. Xác định nội lực trong các phần tử: Do hàm chuyển vị là tuyến tính nên dễ thấy rằng biến dạng dọc trục $\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \text{hằng số}$ trên từng phần tử.

Do đó ứng suất $\sigma_x = E \varepsilon_x = \text{const}$ và, lực dọc $N_e = F \sigma_x = EF \varepsilon_x$ cũng là không đổi trên suốt chiều dài mỗi phần tử. Và

$$N_e = EF \varepsilon_x = EF [B] \{q\}_e$$

Cụ thể, lực dọc trong phần tử (1) và phần tử (2):

$$N_1 = EF [B] \{q\}_1 = EF \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{3qa^2}{2 EF} \end{Bmatrix} = \frac{3}{2} qa$$

$$N_2 = EF [B] \{q\}_2 = EF \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{3qa^2}{2 EF} \\ \frac{4qa^2}{2 EF} \end{Bmatrix} = \frac{qa}{2}$$

Kết quả này được thể hiện trên biểu đồ lực dọc (N) ở hình **5.3c**.

Để thấy rõ hơn bản chất của PPPTHH thông qua thí dụ này, ta thử tìm lời giải chính xác của bài toán.

Chương 5. Tính toán hệ thanh

Như trong Giáo trình Cơ kỹ thuật đã biết, nếu sử dụng phương trình cân bằng biểu diễn qua chuyển vị dọc trục $u(x)$ ta sẽ nhận được phương trình vi phân chủ đạo của bài toán thanh chịu biến dạng dọc trục, trong trường hợp tổng quát, có dạng:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(EF \frac{du}{dx} \right) + q(x) = 0 \\ \text{và các điều kiện biên} \end{cases}$$

trong đó $q(x)$ là cường độ tải trọng phân bố dọc thanh.

Với bài toán đang khảo sát: $EF = \text{const}$, $q(x) = q = \text{const}$, phương trình vi phân và các điều kiện biên của bài toán là:

$$EF \frac{d^2 u}{dx^2} + q = 0 \quad (0 < x < 2a) \quad (a)$$

Điều kiện biên: $u \Big|_{x=0} = 0$, (b)

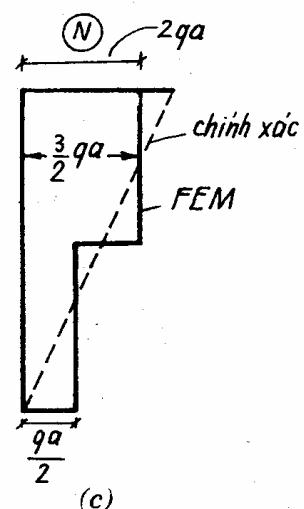
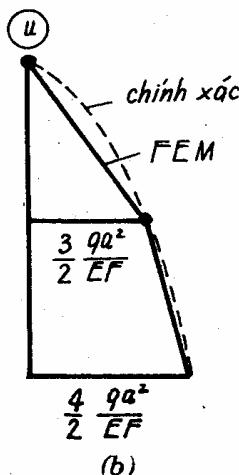
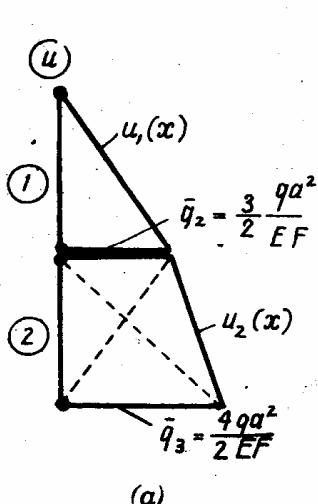
$$N \Big|_{x=2a} = \left(EF \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=2a} = 0$$

Sử dụng phương pháp tích phân trực tiếp phương trình vi phân (a) và sử dụng các điều kiện biên (b) để xác định các hằng số tích phân. Để dàng nhận được kết quả chính xác của bài toán là:

Hàm chuyển vị: $u(x) = \frac{q}{2 EF} (4ax - x^2)$ $(0 \leq x \leq 2a)$

Lực dọc $N = EF \frac{du}{dx} = qa \left(2 - \frac{x}{a} \right)$

Biểu đồ chuyển vị (u) được biểu diễn bằng đường chấm chấm trong hình 5.3b. Biểu đồ lực dọc (N) của lời giải chính xác được biểu diễn bằng đường chấm trong hình 5.3c.



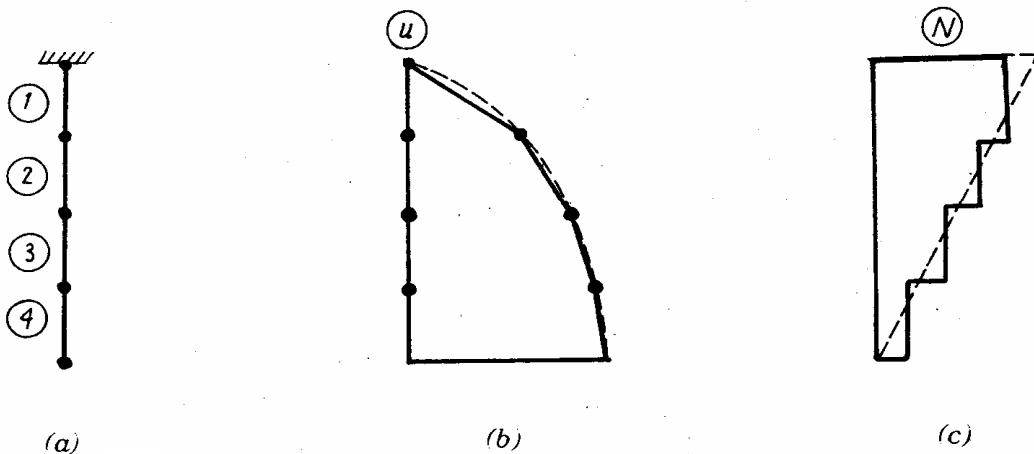
Hình 5.3. Biểu đồ chuyển vị (u) và lực dọc (N) (Nghiệm PPPTHH --- Nghiệm chính xác)

Chương 5. Tính toán hệ thanh

So sánh 2 kết quả nhận được từ PPPTH và từ lời giải chính xác của bài toán ta có thể thấy một số nhận xét sau:

- Giá trị chuyển vị tại các nút nhận được từ PPPTH là trùng với kết quả chính xác. Còn giá trị nội lực là gần đúng và chỉ là giá trị trung bình.

- Nếu tăng số nút lên (tức chia thanh thành nhiều phần tử hơn) biểu đồ chuyển vị sẽ là 1 đa giác hàm nội tiếp và tiệm cận đến đường cong của nghiệm chính xác (hình 5.4b). Còn biểu đồ nội lực N có dạng đường chữ chi giật bậc xung quanh đường thẳng của nghiệm chính xác (hình 5.4c). Hình vẽ 5.4 cho ta nghiệm của bài toán giải theo PPPTH với sơ đồ 4 phần tử (hình 5.4a).



Hình 5.4. Biểu đồ chuyển vị (u) và lực dọc (N) theo sơ đồ 4 phần tử
 (— Nghiệm PPPTH --- Nghiệm chính xác)

- Tuy nhiên, có thể thấy rằng giá trị nội lực được tính theo biểu thức

$$N_e = EF [B] \{q\}_e$$

chỉ là nội lực do chuyển vị nút $\{q\}_e$ gây ra.

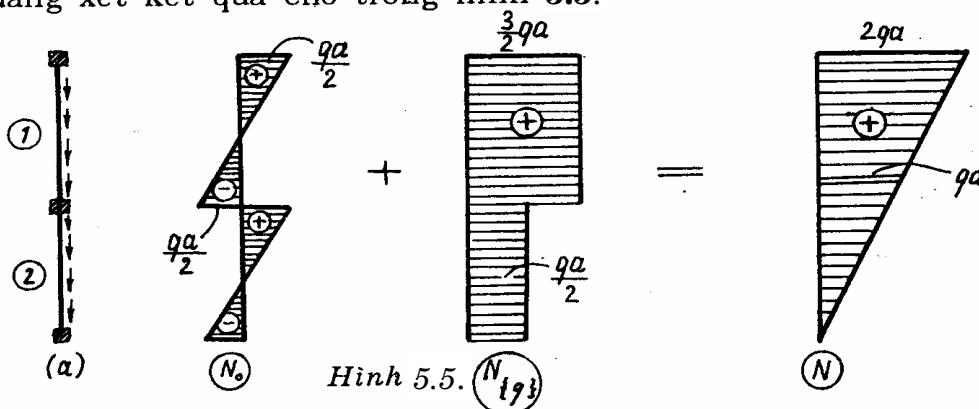
Để có được giá trị lực dọc chính xác ta cần kề thêm thành phần lực dọc do tải trọng phân bố trong phạm vi phần tử khi xem các nút là được gắn cứng lại (hình 5.5a) Hay:

$$N = N_{\{q\}} + N_o$$

Trong đó $N_{\{q\}}$: là lực dọc do chuyển vị nút $\{q\}_e$ gây ra

N_o : lực dọc do tải trọng tác dụng trong phạm vi phần tử gây ra khi xem các nút là bị gắn cứng.

Với bài toán đang xét kết quả cho trong hình 5.5.



Hình 5.5. $\{N\}_{\{q\}}$

Chương 5. Tính toán hệ thanh

2- Phần tử thanh trong dàn phẳng:

Trong dàn phẳng, khi tính theo PPPTHH, người ta xem mỗi mắt dàn là một đỉnh nút, và mỗi thanh dàn là một phần tử chịu biến dạng dọc trục. Rõ ràng nút i bất kỳ của dàn có 2 bậc tự do: là chuyển vị theo phương ngang và phương đứng của nó. Các bậc tự do này được đánh số lần lượt là $2i - 1$ và $2i$.

Xét phần tử thanh bất kỳ mà nút 1 và 2 của nó tương ứng nút i và j theo chỉ số tổng thể. Các nút này có các chuyển vị (q'_{2i-1}, q'_{2i}) và (q'_{2j-1}, q'_{2j}) và sẽ gây ra chuyển vị tại 2 nút theo phương trục thanh là q_1 và q_2 .

$$\text{Để thấy rằng} \begin{cases} q_1 = q'_{2i-1} l_{ij} + q'_{2i} m_{ij} \\ q_2 = q'_{2j-1} l_{ij} + q'_{2j} m_{ij} \end{cases}$$

trong đó: l_{ij} , m_{ij} là cos chỉ phương của trục phần tử (trục x) đối với hệ trục tổng thể xy

Hay, vectơ chuyển vị nút phần tử trong hệ tọa độ địa phương:

$$\{q\}_e \equiv \{u_1, u_2\}_e^T \equiv \{q_1, q_2\}_e^T$$

được biểu diễn qua vectơ chuyển vị nút phần tử trong hệ tọa độ tổng thể:

$$\{q'\}_e \equiv \{u'_i, v'_i, u'_j, v'_j\}_e^T \equiv \{q'_{2i-1}, q'_{2i}, q'_{2j-1}, q'_{2j}\}_e^T$$

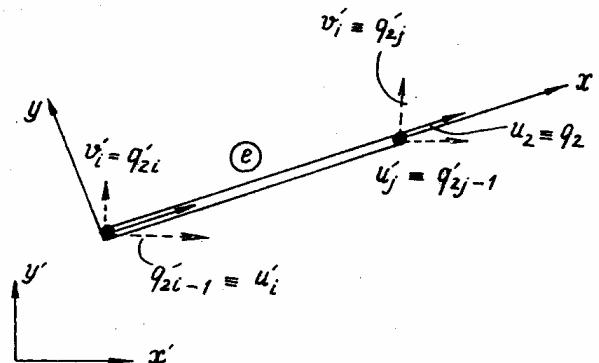
$$\text{như sau: } \begin{matrix} \{q\}_e & = & [T]_e & \{q'\}_e \\ (2 \times 1) & & (2 \times 4) & (4 \times 1) \end{matrix} \quad (5.5)$$

$$\text{Trong đó ma trận chuyển trực: } [T]_e = \begin{bmatrix} l_{ij} & m_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{ij} & m_{ij} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Vậy ma trận cứng phần tử trong hệ tọa độ tổng thể là: (theo công thức (4.57))

$$[K']_e = [T]_e^T [K]_e [T]_e = \begin{bmatrix} l_{ij} & 0 \\ m_{ij} & 0 \\ 0 & l_{ij} \\ 0 & m_{ij} \end{bmatrix} \times \frac{EF}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_{ij} & m_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{ij} & m_{ij} \end{bmatrix}$$

$$\text{Cuối cùng: } [K']_e = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & -l_{ij}^2 & -l_{ij}m_{ij} \\ m_{ij}^2 & -l_{ij}m_{ij} & -m_{ij}^2 & \\ & l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & \\ & m_{ij}^2 & & \end{bmatrix} \quad (5.7)$$



Hình 5.6.

Chương 5. Tính toán hệ thanh

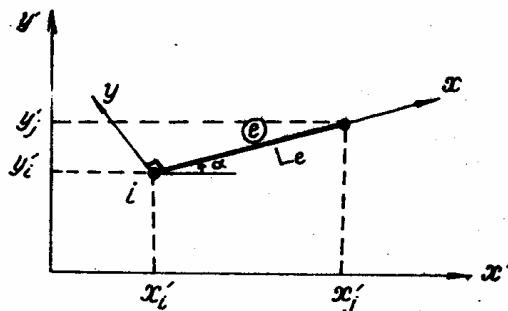
Chú ý: + l_{ij} , m_{ij} là cosin chỉ phương của trục phần tử (trục x) trong hệ tọa độ tổng thể và nó cũng là cosin của góc nghiêng giữa đường thẳng nối các nút i và j với các trục x' , y' và chúng được tính qua tọa độ các điểm nút trong hệ tọa độ tổng thể như sau:

$$l_{ij} = \cos(x, x') = \frac{x'_j - x_i}{L} \quad (5.8)$$

$$m_{ij} = \cos(x, y') = \frac{y'_j - y'_i}{L}$$

Ở đây (x'_i, y'_i) và (x'_j, y'_j) là tọa độ của nút i, j trong hệ tọa độ tổng thể $x'y'$. và L chiều dài phần tử ij và được tính bởi.

$$L = \sqrt{(x'_j - x'_i)^2 + (y'_j - y'_i)^2} \quad (5.9)$$



Hình 5.7

+ Cũng có thể để thấy rõ hơn ma trận $[T]_e$ nếu ta gọi α là góc nghiêng giữa trục phần tử (nối từ điểm đầu i tới điểm cuối phần tử là j) đối với trục ngang x' thì dễ thấy rằng: $l_{ij} = \cos \alpha$, $m_{ij} = \sin \alpha$

$$\text{Hay: } [T]_e = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

và do vậy công thức $[K']_e$ cũng có thể viết với sự sử dụng góc α này. Cụ thể

$$[K']_e = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ s^2 & -cs & -s^2 & \\ & c^2 & cs & \\ dx & & s^2 & \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

với $c = \cos \alpha$ và $s = \sin \alpha$

α : góc nghiêng giữa trục phần tử (đường nối ij) với trục x'

Nội lực trong thanh dàn:

$$\text{Vì } \epsilon_x = [B]\{q\}_e$$

$$\sigma_x = E \epsilon_x$$

Chương 5. Tính toán hệ thanh

nên lực dọc trong thanh dàn, tính theo $\{q\}_e$, được tính là:

$$N_e = \sigma_x F = EF [B] \{q\}_e$$

Còn trong hệ tọa độ tổng thể, ta có thể tính lực dọc theo vectơ chuyển vị nút $\{q'\}_e$ bằng cách thay $\{q\}_e = [T]_e \{q'\}_e$, ta được:

$$N_e = EF [B] [T]_e \{q'\}_e = [S']_e \{q'\}_e \quad (5.12)$$

Trong đó: Ma trận tính nội lực $[S']_e = EF [B] [T]_e$

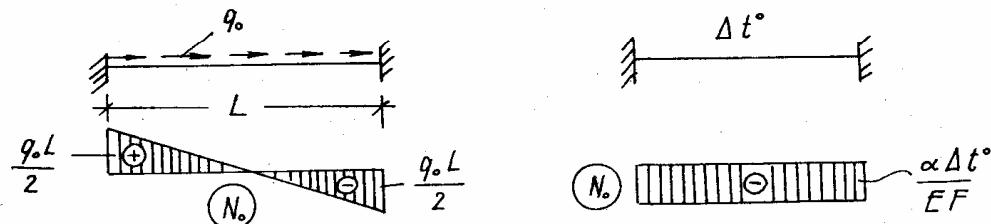
hay $[S']_e = EF \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_{ij} & m_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{ij} & m_{ij} \end{bmatrix}$

$$[S']_e = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} -l_{ij} & -m_{ij} & l_{ij} & m_{ij} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

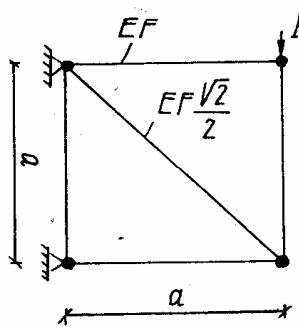
hoặc $[S']_e = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} -\cos \alpha & -\sin \alpha & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (5.14)$

Công thức (5.12) cho ta xác định lực dọc trong phần tử do chuyển vị nút $\{\bar{q}\}$ gây ra. Trường hợp trên chiều dài phần tử còn có tác dụng những lực dọc trực, hay chịu sự thay đổi nhiệt độ thì để có kết quả chính xác đối với nội lực nên kể thêm phần lực dọc do tải trọng hay do biến thiên nhiệt độ gây ra trên phần tử khi xem các nút là cố định.

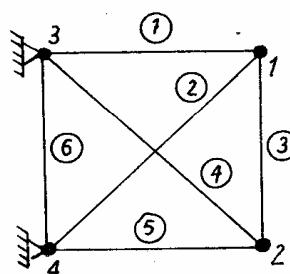
Cụ thể:



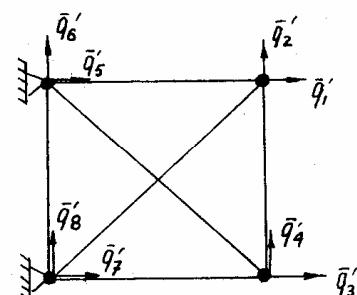
Thí dụ 2: Tìm chuyển vị tại các nút và nội lực các thanh của dàn cho trong hình 5.8. Biết các thanh đứng và ngang có diện tích mặt cắt ngang là F. Các thanh xiên có diện tích mặt cắt ngang là $\frac{\sqrt{2}}{2} F$



(a)



(b)



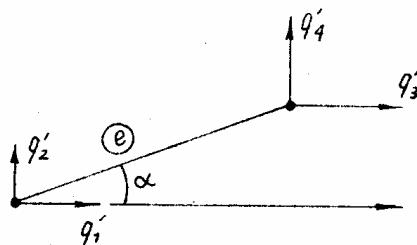
(c)

Hình 5.8. a. Sơ đồ kết cấu; b. Rời rạc hóa kết cấu: các nút và phần tử;
c. Các thành phần của vectơ chuyển vị nút tổng thể $\{q'\}$.

Chương 5. Tính toán hệ thanh

Giải:

1. *Rời rạc hóa kết cấu:* Đánh số nút, đánh số phần tử như hình 5.8b. Tại mỗi nút có 2 bậc tự do là 2 chuyển vị thành phần của nút theo 2 trục của hệ tọa độ tông thê. Các bậc tự do của hệ cho trên hình 5.8c. Thiết lập ma trận chỉ số [b].



Phần tử	Các bậc tự do của phần tử		Nút i		Nút j	
	1	2	3	4	5	6
(1)					5	6
(2)					7	8
(3)					1	2
(4)					5	6
(5)					7	8
(6)					5	6

Để tiện cho tính toán sau này, ta tính sẵn các đại cần tính đối với các phần tử trong bảng sau:

Phần tử	Nút i	Nút j	α	c^2	s^2	cs	I	F	EF/I
(1)	3	1	0°	1	0	0	a	F	EF/a
(2)	4	1	45°	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$a\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}F$	EF/a
(3)	1	2	-90°	0	1	0	a	F	EF/a
(4)	3	2	-45°	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	$a\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}F$	EF/a
(5)	4	2	0°	1	0	0	a	F	EF/a
(6)	3	4	-90°	0	1	0	a	F	EF/a

2. *Thiết lập các ma trận cứng phần tử:* Sử dụng công thức (5.7) và bảng tính sẵn ở trên ta có:

$$[K']_1 = [K']_5 = \frac{EF}{a} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ dx & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Chương 5. Tính toán hệ thanh

$$[K']_2 = \frac{EF}{4a} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & \\ dx & 1 & 1 & \\ & 1 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[K']_3 = [K']_6 = \frac{EF}{a} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \\ dx & 0 & 0 & \\ & 1 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$[K']_4 = \frac{EF}{4a} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \\ dx & 1 & -1 & \\ & 1 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Từ các ma trận độ cứng phần tử này, sử dụng ma trận chỉ số [b] thực hiện ghép nối phần tử, cuối cùng ta có ma trận cứng tổng thể $[K']$ có kích thước (8×8)

$$\overline{[K']} = \frac{EF}{4a} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & -4 & 0 & 0 & -1 & -1 & \\ 5 & -1 & 0 & -1 & 1 & -4 & & \\ 5 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & & \\ \text{đối xứng} & & 5 & -1 & 0 & 0 & & \\ & & & 5 & 0 & -4 & & \\ & & & & 5 & 1 & & \\ & & & & & 5 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

3. Xác định vectơ tải phần tử $\{P'\}_e$ và vectơ tải tổng thể $\{\bar{P}'\}_e$.

Để thấy là, do trên các thanh dàn không có tải trọng tác dụng nên.

$$\{P'\}_1 = \{P'\}_2 = \{P'\}_3 = \dots = \{P'\}_6 = \{0\}$$

Do vậy vectơ tải tổng thể sẽ chỉ là do vectơ tải trọng nút (tải trọng tập trung tác dụng tại các nút kể cả các phản lực chưa biết) tạo nên. Cụ thể là:

$$\{\bar{P}'\} = \{0\} + \{P'\}_n = \{P'\}_n$$

Chương 5. Tính toán hệ thanh

Hay:

$$\{\bar{P}'\} = \{P'\}_n = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ -P & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \\ H_3 & 5 \\ V_3 & 6 \\ H_4 & 7 \\ V_4 & 8 \end{Bmatrix}$$

trong đó H_i, V_i là phản lực theo phương ngang và phương đứng tại nút i. Cũng nhận xét rằng 4 thành phần đầu của vectơ tải tổng thể là xác định trong khi 4 thành phần sau là chưa biết. Đối ngẫu với điều này thì ở vectơ chuyển vị nút tổng thể $\{\bar{q}'\}$ có 4 thành phần đầu là 4 thành phần chuyển vị nút chưa biết và là ẩn số của bài toán còn 4 thành phần sau lại là các chuyển vị đã biết và bằng 0.

4. Áp đặt điều kiện biên và xây dựng hệ phương trình để giải $[\bar{K}^*]\{\bar{q}'^*\} = \{\bar{P}'^*\}$.

Như đã nói ở trên do 4 thành phần chuyển vị $q'_5 = q'_6 = q'_7 = q'_8 = 0$ nên bằng cách "xóa đi" các hàng và cột 5, 6, 7, 8 của ma trận $[\bar{K}]$ cũng như "xóa đi" các thành phần 5, 6, 7, và 8 của vectơ tải tổng thể $\{\bar{P}'\}$ ta nhận được hệ phương trình để giải $[\bar{K}^*]\{\bar{q}'^*\} = \{\bar{P}'^*\}$ như sau.

$$\frac{EF}{4a} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ & 5 & 0 & -4 \\ & dx & 5 & -1 \\ & & & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}'_1 \\ \bar{q}'_2 \\ \bar{q}'_3 \\ \bar{q}'_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Giải hệ phương trình này ta tìm được 4 chuyển vị chưa biết:

$$\{\bar{q}'^*\} = \begin{Bmatrix} \bar{q}'_1 \\ \bar{q}'_2 \\ \bar{q}'_3 \\ \bar{q}'_4 \end{Bmatrix} = \frac{Pa}{11 EF} \begin{Bmatrix} 6 \\ -30 \\ -5 \\ -25 \end{Bmatrix}$$

5. Tính lực dọc trong các thanh đan:

Sử dụng ma trận chỉ số [b] và $\{\bar{q}'^*\}$ vừa tìm được, ta xác định các vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q'\}_e$. Ví dụ:

$$\{q'\}_1 = \frac{Pa}{11 EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ -30 \end{Bmatrix}, \{q'\}_2 = \frac{Pa}{11 EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ -30 \end{Bmatrix}, \{q'\}_3 = \frac{Pa}{11 EF} \begin{Bmatrix} 6 \\ -30 \\ -5 \\ -25 \end{Bmatrix}$$

Chương 5. Tính toán hệ thanh

$$\{q'\}_4 = \frac{Pa}{11 EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ -25 \end{Bmatrix}, \{q'\}_5 = \frac{Pa}{11 EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ -25 \end{Bmatrix}, \{q'\}_6 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Sử dụng (5.12) và (5.14), ta tìm được lực dọc N của các phần tử. Ví dụ với phần tử (1): ($\cos \alpha = 1, \sin \alpha = 0$)

$$N_1 = [S']_1 \{q'\}_1 = \frac{EF}{a} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \frac{Pa}{11 EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ -30 \end{Bmatrix} = \frac{6}{11} P$$

Với phần tử (2): ($\cos \alpha = \sqrt{2}/2, \sin \alpha = \sqrt{2}/2$)

$$N_2 = [S']_2 \{q'\}_2 = \frac{EF}{a} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \times \frac{Pa}{11 EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ -30 \end{Bmatrix} = \frac{6\sqrt{2}}{11} P$$

Với phần tử (3): ($\cos \alpha = 0, \sin \alpha = -1$)

$$N_3 = [S']_3 \{q'\}_3 = \frac{EF}{a} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \frac{Pa}{11 EF} \begin{Bmatrix} 6 \\ -30 \\ -5 \\ -25 \end{Bmatrix} = -\frac{5}{11} P$$

Lực dọc các phần tử còn lại tìm tương tự.

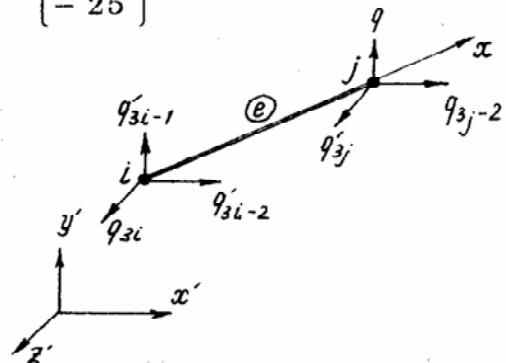
3- Dàn không gian:

Nếu xem mỗi mắt dàn là 1 điểm nút và 1 thanh dàn là một phần tử, thì dễ thấy rằng mỗi điểm nút có ba bậc tự do: đó là 3 chuyển vị thành phần theo 3 phương x' , y' , z' của hệ tọa độ kết cấu. Và vectơ chuyển vị nút phần tử trong hệ tọa độ kết cấu là: (Cụ thể với phần tử mà điểm đầu và cuối là nút i và j)

$$\begin{aligned} \{q'\}_{(e)} &\equiv \{u'_i, v'_i, w'_i, u'_j, v'_j, w'_j\}^T \\ &\quad (6 \times 1) \\ &= \{q'_{3i-2}, q'_{3i-1}, q'_{3i}, q'_{3j-2}, q'_{3j-1}, q'_{3j}\}^T \end{aligned}$$

Trong hệ tọa độ địa phương xyz (với x là trục phần tử, hay trục nối 2 nút i và j) vectơ chuyển vị nút phần tử vẫn là:

$$\{q\}_{(e)} \equiv \{u_i, u_j\}^T \quad (2 \times 1)$$



Hình 5.9. Phần tử dàn không gian

Chương 5. Tính toán hệ thanh

Trong đó u_i, u_j là chuyển vị của nút i và nút j theo phương x (phương nối i và j).

Vậy quan hệ giữa $\{q'\}_e$ và $\{q\}_e$ chính là:

$$\{q\}_e = [T]_e \{q'\}_e$$

trong đó ma trận biến đổi $[T]_e$ là:

$$[T]_e = \begin{bmatrix} l_{ij} & m_{ij} & n_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{ij} & m_{ij} & n_{ij} \end{bmatrix}_{(2 \times 6)}$$

với l_{ij}, m_{ij}, n_{ij} là các cosin chỉ phương của đường nối ij trong hệ tọa độ kết cấu $x'y'z'$ và được xác định qua tọa độ các đỉnh nút i, j bằng các công thức quen thuộc:

$$l_{ij} = \frac{x'_j - x'_i}{L}, \quad m_{ij} = \frac{y'_j - y'_i}{L}, \quad n_{ij} = \frac{z'_j - z'_i}{L}$$

$$\text{và } L = \sqrt{(x'_j - x'_i)^2 + (y'_j - y'_i)^2 + (z'_j - z'_i)^2}$$

Ma trận độ cứng phần tử trong hệ tọa độ địa phương $[K]_e$ là đã biết (công thức (5.1)) vậy ma trận độ cứng phần tử trong hệ tọa độ kết cấu là:

$$[K']_e = [T]_e^T [K]_e [T]_e \quad (6 \times 6) \quad (6 \times 2) \quad (2 \times 2) \quad (2 \times 6)$$

Cụ thể:

$$[K']_e = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & l_{ij}n_{ij} & -l_{ij}^2 & -l_{ij}m_{ij} & -l_{ij}n_{ij} \\ m_{ij}^2 & m_{ij}n_{ij} & -l_{ij}m_{ij} & -m_{ij}^2 & -m_{ij}n_{ij} & \\ n_{ij}^2 & -l_{ij}n_{ij} & -n_{ij}m_{ij} & -n_{ij}^2 & & \\ & l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & l_{ij}n_{ij} & & \\ & & m_{ij}^2 & m_{ij}n_{ij} & & \\ & & & & n_{ij}^2 & \end{bmatrix}$$

đối xứng

Trong đó,

E: modun đàn hồi Young của vật liệu

F: diện tích mặt cắt ngang thanh

L: chiều dài phần tử.

Chương 5. Tính toán hệ thanh

5.2. KHUNG PHẲNG

1. Phần tử đầm chịu uốn – Đầm liên tục.

Xét phần tử đầm chịu uốn có chiều dài L , mặt cắt ngang không đổi. Như đã trình bày trong thí dụ 2, chương 4: chuyển vị của mọi điểm theo phương vuông góc trực thanh $v(x)$ được chọn là đa thức xấp xỉ bậc 3.

$$v(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3.$$

$$\text{Hay } v(x) = [P(x)] = \{a\} \quad (*)$$

$$\text{với } [P(x)] = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix}$$

$$\text{và vectơ tham số: } \{a\} = \{a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4\}^T$$

Từ điều kiện đồng nhất chuyển vị nút là các giá trị của hàm $v(x)$ và đạo hàm bậc nhất của nó tại các điểm nút 1 và 2 của phần tử, ta có:

$$\{q\}_e = [A] \{a\}$$

trong đó $\{q\}_e$ là vectơ chuyển vị nút phần tử và:

$$\{q\}_e = \{v_1 \ \theta_1 \ v_2 \ \theta_2\}_e^T \equiv \{q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4\}_e^T$$

Còn

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix}$$

và tồn tại nghịch đảo: $[A]^{-1} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/L^2 & -2/L & 3/L^2 & -1/L \\ 2/L^3 & 1/L^2 & -2/L^3 & 1/L^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Từ đó: } \{a\} = [A]^{-1} \{q\}_e$$

Thay $\{a\}$ vào $(*)$ ta biểu diễn được hàm chuyển vị $v(x)$ theo vectơ chuyển vị nút $\{q\}_e$

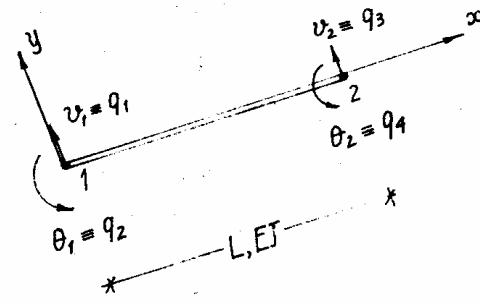
$$v(x) = [P(x)] [A]^{-1} \{q\}_e = [N] \ \{q\}_e \quad (5.15)$$

Với $[N]$: Ma trận các hàm dạng và $[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$

Trong đó:

$$N_1(x) = 1 - 3 \frac{x^2}{L^2} + 2 \frac{x^3}{L^3}$$

$$N_2(x) = x \left(1 - 2 \frac{x}{L} + \frac{x^2}{L^2} \right)$$



Hình 5.10. Phần tử đầm chịu uốn.

Chương 5. Tính toán hệ thanh

$$N_3(x) = 3 \frac{x^2}{L^2} - 2 \frac{x^3}{L^3}$$

$$N_4(x) = x \left(-\frac{x}{L} + \frac{x^2}{L^2} \right)$$

Như đã biết ở Giáo trình

Cơ kỹ thuật, khi đầm chịu uốn mặt cắt ngang của đầm còn là phẳng khi biến dạng và xoay đi góc $\theta = \frac{dv}{dx}$. Do đó chuyển vị dọc trục u và độ vông v có quan hệ (như hình 5.11).

$$u = -y \frac{dv}{dx}$$

trong đó y là khoảng cách từ điểm đang xét tới đường trung hòa.

Khi đó biến dạng dọc trục:

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} = -y \frac{d^2 v}{dx^2}$$

Sử dụng (5.15):

$$\epsilon_x = -y \frac{d^2 [N]}{dx^2} \quad \{q\}_e = [B]\{q\}_e$$

$$\text{Trong đó: } [B] = -y \frac{d^2}{dx^2} [N]$$

$$\text{Hay } [B] = -y \left[\left(-\frac{6}{L^2} + 12 \frac{x}{L^3} \right) \left(-\frac{4}{L} + 6 \frac{x}{L^2} \right) \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \left(-\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) \right] \quad (5.16)$$

Ứng suất tại mọi điểm của đầm chịu uốn.

$$\sigma_x = E \epsilon_x$$

Hay ở dạng ma trận $\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}$.

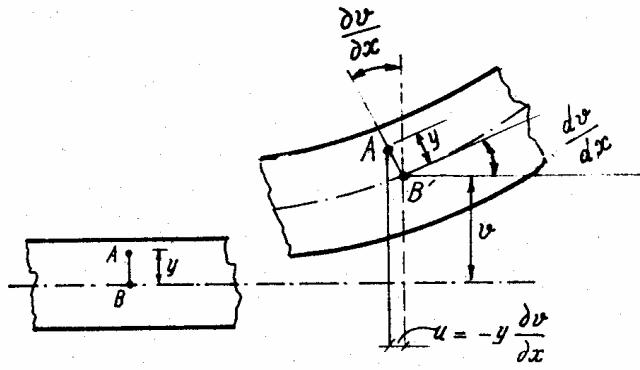
Ở đây ma trận $[D] = [E]$

(5.17)

Sử dụng công thức (5.16), ma trận độ cứng phần tử đầm chịu uốn được xác định như sau.

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV = E \int_L \int_F [B]^T [B] dF \cdot dx$$

Hay:



Hình 5.11. Biến dạng của phần tử đầm chịu uốn.

Chương 5. Tính toán hệ thanh

$$[K]_e = \frac{E J_z}{L_3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{đối xứng} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Ở đây $J_z = \int y^2 dF$ là mômen quán tính của mặt cắt ngang lấy với trục z. Với

vectơ tải phần tử $\{P\}_e$, trường hợp tổng quát, khi trên chiều dài phần tử có tải trọng phân bố $q(x)$, các lực tập trung Q_i và các mômen tập trung M_i tác dụng thì trên cơ sở công thức (5.17) hay từ sự cân bằng công của lực nút trên các chuyển vị nút tương ứng và tổng công của các ngoại lực (trên phần tử) trên các chuyển dời tương ứng, ta có thể tìm vectơ tải phần tử $\{P\}_e$ theo công thức sau:

$$\{P\}_e = \int_L [N]^T q(x) dx + \sum_{i=1}^{n_Q} [N(x_{Q_i})]^T Q_i + \sum_{i=1}^{n_M} \left[\frac{dN}{dx}(x_{M_i}) \right]^T M_i \quad (5.19)$$

Trong đó:

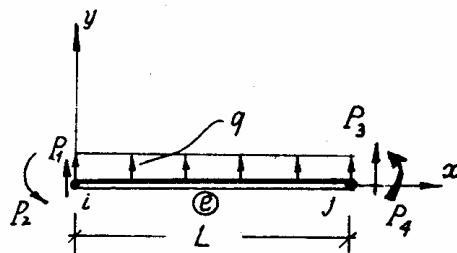
$q(x)$: cường độ lực phân bố trên chiều dài phần tử,

Q_i và x_{Q_i} : lực tập trung và hoành độ điểm đặt lực trên hệ trục địa phương,

M_i và x_{M_i} : Momen tập trung và hoành độ điểm đặt trên hệ trục phần tử,

n_Q và n_M : số lực tập trung và số momen tập trung trên chiều dài phần tử đang xét.

Hình 5.12.



Sử dụng (5.19) xác định vectơ tải phần tử cho một vài trường hợp cụ thể.

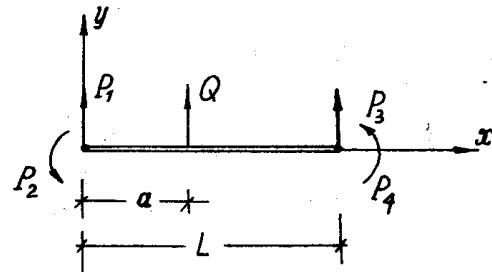
- Trường hợp tải trọng phân bố đều trên phần tử (Hình 5.12).

$$\{P\}_e = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix}_e = \int_L \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \\ x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} q dx = \begin{Bmatrix} \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (5.20)$$

Chương 5. Tính toán hệ thanh

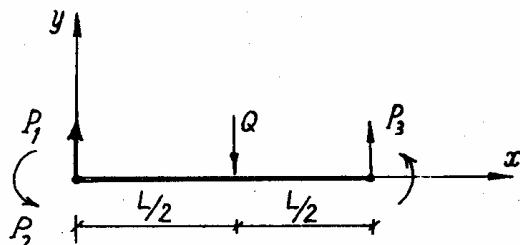
- Trường hợp trên phần tử có lực tập trung giá trị Q đặt cách nút đầu phần tử khoảng cách a ($x_Q = a$) (Hình 5.13).

$$\{P\}_e = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix}_e = [N(a)]^T Q = Q \quad \left[\begin{array}{l} 1 - \frac{3a^2}{L^2} + 2 \frac{a^3}{L^3} \\ a - \frac{2a^2}{L} + \frac{a^3}{L^2} \\ \frac{3a^2}{L^2} - \frac{2a^3}{L^3} \\ - \frac{a^2}{L} + \frac{a^3}{L^2} \end{array} \right]$$



Hình 5.13.

Trường hợp đặc biệt, khi Q đặt tại giữa nhịp phần tử ($x_Q = \frac{L}{2}$) (Hình 5.14).



Hình 5.14.

$$\{P\}_e = \left\{ \begin{array}{l} \frac{PL}{2} \\ \frac{PL^2}{8} \\ \frac{PL}{2} \\ - \frac{PL^2}{8} \end{array} \right\} \quad (5.21)$$

Để tìm mômen uốn nội lực trong phần tử đâm, như trong Sức bền vật liệu, với hệ trực tọa độ địa phương như trên thì dễ thấy rằng, trường hợp phần tử có tiết diện không đổi, ta đã có:

$$M = EJ \frac{d^2 v}{dx^2}$$

Vậy nếu tính theo vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$ thì:

$$M(x) = EJ \frac{d^2}{dx^2} [N] \{q\}_e = EJ [N''] \{q\}_e \quad (5.22)$$

$$\text{Ở đây } [N''] = \frac{d^2}{dx^2} [N] = [N''_1 \ N''_2 \ N''_3 \ N''_4]$$

Từ (5.22) dễ nhận thấy rằng, khi các hàm dạng $N_i(x)$ là các hàm nội suy Hermite bậc 3, thì $N''_i(x)$ là bậc nhất và do đó mômen uốn $M(x)$ là hàm tuyến tính trong phần tử.

Chương 5. Tính toán hệ thanh

Nếu gọi:

$$\{M\}_e = \begin{cases} M \text{ (tại nút 1)} \\ M \text{ (tại nút 2)} \end{cases}_e \quad \text{là vectơ mômen uốn tại các đầu nút phần tử thì}$$

$$\{M\}_e = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = EJ \begin{bmatrix} [N''(x=0)] \\ [N''(x=L)] \end{bmatrix} \{q\}_e$$

Hay: $\{M\}_e = [S]_e \{q\}_e$ (5.23)

$(2 \times 1) \quad (2 \times 4) \quad (4 \times 1)$

Ở đây $[S]_e$: ma trận tính mômen.

$$\text{và } [S]_e = EJ \begin{bmatrix} [N''(0)] \\ [N''(L)] \end{bmatrix} = \frac{EJ}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Cũng có thể nhận thấy rằng, tương tự như trong phương pháp chuyển vị của Giáo trình Cơ kết cấu, mômen uốn $M(x) = EJ [N'']$ $\{q\}_e$ là mômen do các chuyển vị nút gây ra. Để đầy đủ, trong trường hợp trên chiều dài phần tử có lực tác dụng, cần cộng thêm mômen M_o do tải trọng này gây ra trên phần tử khi xem tất cả các nút được gắn cứng.

Thí dụ: Giải đầm liên tục dưới đây theo PPPTHH (hình 5.15a)

Bài toán được giải theo trình tự sau:

1) *Rời rạc hóa kết cấu:* Đánh số nút: 1, 2, 3

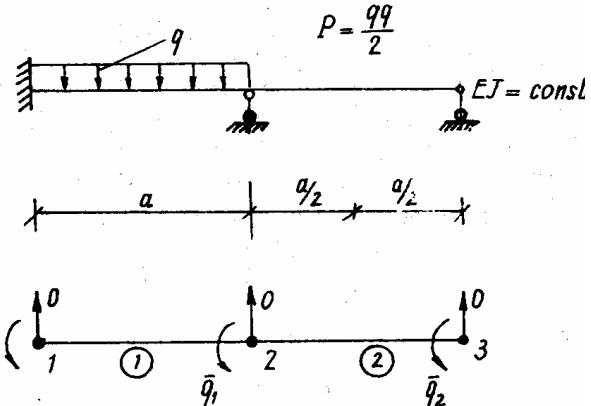
Đánh số phần tử: (1), (2)

Đánh số các bậc tự do của kết cấu:

Chú ý là bây giờ ta chỉ đánh số các bậc tự do chưa biết. Còn tất cả các bậc tự do bằng 0 đã biết sẽ đánh số 0. Với bài này thì rõ ràng chỉ có góc xoay tại nút 2 và 3 là chưa biết và là ẩn số. Và được đánh số 1, 2. (Việc này cũng được xem như tiến hành áp đặt điều kiện biên ngay từ đầu). Đó cũng chính là 2 thành phần của vectơ chuyển vị nút ẩn số $\{q^*\}$. Hay:

$$\{q^*\} = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{bmatrix}.$$

Thiết lập ma trận chỉ số [b].



Hình 5.15 a. Sơ đồ kết cấu và tải trọng;
b. Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do.

Phần tử	Chỉ số địa phương	Nút i		Nút j	
		1	2	3	4
(1)		0	0	0	1
(2)		0	1	0	2

Chương 5. Tính toán hệ thanh

2) Thiết lập ma trận độ cứng phần tử $[K]_e$ và từ đó "ghép nối phần tử" xây dựng luôn ma trận cứng tổng thể đã kể tới điều kiện biên $\overline{[K^*]}$

Để thấy rằng $[K]_1 = [K]_2$ và cụ thể là

$$[K]_1 = \frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 12 & 6a & -12 & 6a \\ 4a^2 & -6a & 2a^2 & \\ 12 & -6a & & \\ \text{đối xứng} & & 4a^2 & \end{bmatrix} \quad [K]_2 = \frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 12 & 6a & -12 & 6a \\ 4a^2 & -6a & 2a^2 & \\ 12 & -6a & & \\ \text{đối xứng} & & 4a^2 & \end{bmatrix}$$

Chú ý rằng do đã sử dụng các điều kiện biên nên khi "ghép nối phần tử" ta sẽ nhận được ma trận $\overline{[K^*]}$ có kích thước (2×2) . Ma trận $\overline{[K^*]}$ được "ghép" chỉ bởi các thành phần của $[K]_1$ và $[K]_2$ mà các thành phần này có cả 2 chỉ số tổng thể tương ứng là khác 0.

Ví dụ trong tất cả 16 thành phần của $[K]_1$ thì chỉ có thành phần k_{44}^1 có cả 2 chỉ số tổng thể là khác 0 và nó sẽ được "cộng gộp" thêm vào ô $(1 ; 1)$ của ma trận $\overline{[K^*]}$.

Còn thành phần k_{24}^2 của ma trận $[K]_2$ sẽ được "gộp thêm" vào ô $(1 ; 2)$ của ma trận $\overline{[K^*]}$.

Vậy:

$$\overline{[K^*]} = \frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4a^2 + 4a^2 & 2a^2 \\ dx & 4a^2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\text{Hay } \overline{[K^*]} = \frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 8a^2 & 2a^2 \\ 2a^2 & 4a^2 \end{bmatrix}$$

3) Tìm các vectơ tải phần tử $\{P\}_e$ rồi "ghép nối phần tử" và xây dựng $\{\bar{P}^*\}$

Sử dụng các công thức (5.20), (5.21) với chú ý chiều lực quy ước dương là cùng chiều dương các trục tọa độ địa phương. Ta có

Chương 5. Tính toán hệ thanh

$$\{P\}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{qa}{2} \\ -\frac{qa^2}{12} \\ -\frac{qa}{2} \\ \frac{qa^2}{12} \end{pmatrix}, \quad \{P\}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{qa}{4} \\ -\frac{qa^2}{16} \\ -\frac{qa}{4} \\ \frac{qa^2}{16} \end{pmatrix}$$

Và, cũng tương tự trên, với nhận xét là $\{\bar{P}^*\}_n = \{0\}$ vì tại nút không có các tải tập trung (mômen tập trung) tương ứng các bậc tự do q_1, q_2

$$\{\bar{P}^*\} = \begin{pmatrix} \frac{qa^2}{12} - \frac{qa^2}{16} \\ \frac{qa^2}{16} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{qa^2}{48} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4) Giải hệ phương trình hệ thống: $[\bar{K}^*]\{\bar{q}^*\} = \{\bar{P}^*\}$

$$\text{Hay } \frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 8a^2 & 2a^2 \\ 2a^2 & 4a^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{pmatrix} = \frac{qa^2}{48} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Kết quả là } \{\bar{q}^*\} = \begin{pmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{672} \frac{qa^3}{EJ} \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

5) Hoàn thiện hay tính nội lực: Biết $\{\bar{q}^*\}$, sử dụng ma trận [b], ta có các vectơ chuyển vị nút của các phần tử là:

$$\{q\}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\bar{q}_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{672} \frac{qa^3}{EJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \{q\}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{q}_1 \\ 0 \\ -\bar{q}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{672} \frac{qa^3}{EJ} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Vậy sử dụng (5.23) và (5.24), ta xác định được vectơ mômen uốn của các phần tử do chuyển vị nút gây ra.

$$\{M\}_1 = [S]_1 \quad \{q\}_1 = \frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} -6a & -4a^2 & 6a & -2a^2 \\ 6a & 2a^2 & -6a & 4a^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\bar{q}_1 \end{pmatrix} = \frac{qa^2}{672} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\{M\}_2 = [S]_2 \quad \{q\}_2 = \frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} -6a & -4a^2 & 6a & -2a^2 \\ 6a & 2a^2 & -6a & 4a^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{q}_1 \\ 0 \\ -\bar{q}_2 \end{pmatrix} = \frac{qa^2}{672} \begin{pmatrix} -18 \\ 42 \end{pmatrix}$$

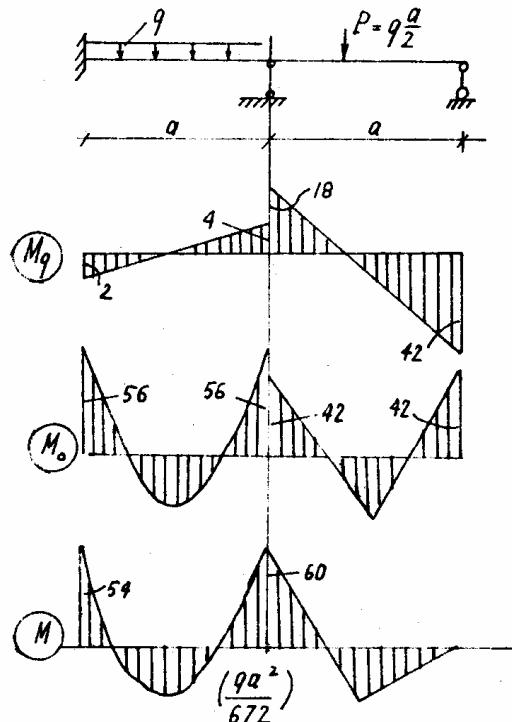
Chương 5. Tính toán hệ thanh

Từ $\{M\}_1$ và $\{M\}_2$ dễ dàng vẽ được biểu đồ (M_q)

Khi xem các nút là gắn cứng, ta cũng dễ dàng vẽ được biểu đồ (M_o) do tải trọng trên các phần tử gây ra.

Kết quả: $(M) = (M_q) + (M_o)$

Biểu đồ mômen uốn (M) cho trên hình 5.16.



Hình 5.16. Biểu đồ mômen uốn (nhân với hằng số $qa^2/672$).

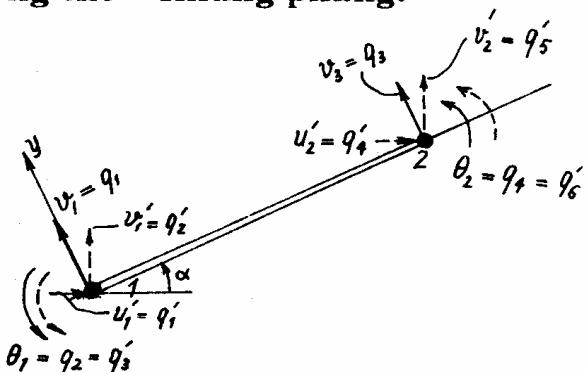
2- Phần tử đàm chịu uốn trong hệ tọa độ tổng thể - Khung phẳng.

Như ở trên đã biết: Trong hệ tọa độ địa phương xyz chuyển vị $v(x)$ của phần tử đàm chịu uốn được biểu diễn qua vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$ và

$$\begin{aligned} \{q\}_e &= \{v_1 \ \theta_1 \ v_2 \ \theta_2\}^T \\ (4 \times 1) \\ &\equiv \{q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4\}^T \end{aligned}$$

Trong hệ tọa độ tổng thể $x'y'z'$: các chuyển vị nút v_1 và v_2 có thể phân thành các thành phần theo 2 phương x' , y' .

Khi đó, nếu gọi vectơ chuyển vị nút phần tử trong hệ tọa độ tổng thể $x'y'z'$ là $\{q'\}_e$ và:



Hình 5.17. Phần tử đàm chịu uốn trong hệ tọa độ tổng thể.

Chương 5. Tính toán hệ thanh

$$\begin{aligned}\{q'\}_e &= \{u'_1 \ v'_1 \ \theta'_1 \ u'_2 \ v'_2 \ \theta'_2\}^T \\ (6 \times 1) \quad &\equiv \{q'_1 \ q'_2 \ q'_3 \ q'_4 \ q'_5 \ q'_6\}^T\end{aligned}$$

thì dễ thấy quan hệ giữa các thành phần của $\{q\}_e$ và $\{q'\}_e$ là:

$$\begin{cases} q_1 = l_y q'_1 + m_y q'_2 \\ q_2 = n_z q'_3 = q'_3 \\ q_3 = l_y q'_4 + m_y q'_5 \\ q_6 = n_z q'_6 \end{cases} \quad \text{Hay } \begin{matrix} \{q\}_e \\ (4 \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} [T]_e \\ (4 \times 6) \end{matrix} \begin{matrix} \{q'\}_e \\ (6 \times 1) \end{matrix}$$

Với ma trận biến đổi trục tọa độ $[T]_e = \begin{bmatrix} l_y & m_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_y & m_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (5.25)

trong đó l_y, m_y : cosin chỉ phương của trục y trong hệ tọa độ tổng thể.

Nếu gọi α là góc nghiêng giữa trục phần tử với trục phương ngang (trục x') thì có thể sử dụng $[T]_e$ ở dạng sau:

$$[T]_e = \begin{bmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Sử dụng các công thức (2.26), (3.18) và (3.26), ta có:

$$\begin{matrix} [K']_e \\ (6 \times 6) \end{matrix} = \begin{matrix} [T]_e^T \\ (6 \times 4) \end{matrix} \begin{matrix} [K]_e \\ (4 \times 4) \end{matrix} \begin{matrix} [T]_e \\ (4 \times 6) \end{matrix}$$

Ma trận cứng phần tử trong hệ tọa độ tổng thể là

$$[K]_e = \frac{EJ}{L^3} \begin{bmatrix} 12s^2 & -12cs & -6Ls & -12s^2 & 12cs & -6Ls \\ 12c^2 & 6Lc & 12cs & -12c^2 & 6Lc & 0 \\ 4L^2 & 6Ls & -6Lc & 2L^2 & 0 & 0 \\ 12s^2 & -12cs & 6Ls & 0 & 0 & 0 \\ dx & & & 12c^2 & -6Lc & 0 \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Trong đó $c = \cos\alpha = l_y$

$$s = \sin\alpha = m_y$$

L: chiều dài phần tử.

Mômen uốn trong phần tử đâm tính theo $\{q'\}_e$:

Như trên đã biết, mômen uốn tại 2 nút đầu cuối phần tử được tính theo $\{q\}_e$ theo (5.23):

Chương 5. Tính toán hệ thanh

$$\{M\}_e = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}_e = [S]_e \{q\}_e$$

vậy để tính theo $\{q'\}_e$ ta chỉ cần thay $\{q\}_e = [T]_e \{q'\}_e$ vào.

Hay: $\{M\}_e = [S]_e [T]_e \{q'\}_e$

Hay: $\{M\}_e = [S']_e \{q'\}_e$ (5.28)

Trong đó $[S']_e$: ma trận tính nội lực (mômen) phần tử theo vectơ chuyển vị nút trong hệ tọa độ kết cấu $\{q'\}_e$

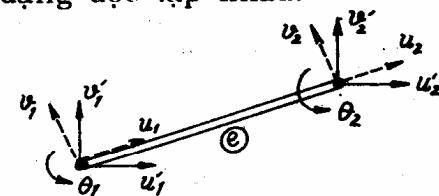
và: $[S']_e = [S]_e [T]_e$

$$[S']_e = \frac{EJ}{L^3} \begin{bmatrix} 6Ls & -6Lc & -4L^2 & -6Ls & 6Lc & -2L^2 \\ -6Ls & 6Lc & 2L^2 & 6Ls & -6Lc & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

3- Ma trận cứng của phần tử khung phẳng (phần tử chịu uốn + kéo (nén) đồng thời).

Mỗi phần tử khung phẳng có hai nút, mỗi nút có 3 bậc tự do (chuyển vị đứng, ngang và xoay). Các chuyển vị nút gây ra các biến dạng độc lập nhau:

- + Phần tử bị biến dạng dọc trục bởi $\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_e$
- + Phần tử bị uốn bởi $\{v_1, \theta_1, v_2, \theta_2\}_e$



Hình 5.18. Phần tử khung phẳng.

Do vậy công tác dụng của 2 trường hợp chịu biến dạng dọc trục và uốn ta có ma trận cứng phần tử của phần tử khung vừa chịu uốn + kéo (nén).

$$[K^e] = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} Ac^2 + Bs^2 & (A - B)cs & -B \frac{L}{2}s & -(Ac^2 + Bs^2) & -(A - B)cs & -\frac{BL}{2}s \\ (A - B)cs & As^2 + Bc^2 & \frac{BL}{2}c & -(A - B)cs & -(As^2 + Bc^2) & \frac{BL}{2}c \\ -B \frac{L}{2}s & \frac{BL}{2}c & 4J & \frac{BL}{2}s & -\frac{BL}{2}c & 2J \\ -(Ac^2 + Bs^2) & -(A - B)cs & \frac{BL}{2}s & (A - B)cs & \frac{BL}{2}s & \\ -(A - B)cs & -(As^2 + Bc^2) & -\frac{BL}{2}c & -\frac{BL}{2}c & 2J & \\ -\frac{BL}{2}s & \frac{BL}{2}c & 2J & 2J & -\frac{BL}{2}s & \\ \text{đối xứng} & & & & -\frac{BL}{2}s & 4J \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

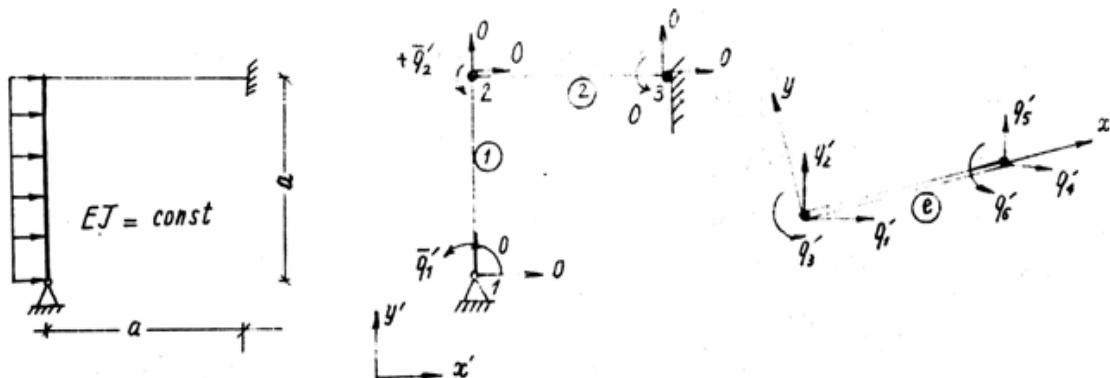
trong đó $c = \cos \alpha = l_y$ $s = \sin \alpha = m_y$,

$$B = \frac{12J}{L^2}$$

A: diện tích mặt cắt ngang phần tử.

Chương 5. Tính toán hệ thanh

Thí dụ: Giải khung sau theo phương pháp phần tử hữu hạn. Bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt đối với chuyển vị của hệ.



Hình 5.19. Bài toán khung phẳng.

Giải:

1) *Rời rạc hóa kết cấu:* Đánh số các điểm nút, 1, 2, 3. Đánh số phần tử: (1), (2). Các số liệu về phần tử được tính sẵn trong bảng dưới đây:

Phần tử	Nút i	Nút j	α	$c = \cos \alpha$	$s = \sin \alpha$	c^2	s^2	cs	$EJ L^2$
(1)	1	2	90°	0	1	0	1	0	EJ/a^3
(2)	2	3	0°	1	0	1	0	0	EJ/a^3

Đánh số các bậc tự do: Chú ý rằng, lê ra tại mỗi nút có 3 bậc tự do và toàn hệ có $3 \times 3 = 9$ bậc tự do. Nhưng do bỏ qua những ảnh hưởng của lực dọc, và do điều kiện biên động học tại các nút 1 và 3 nên có thể nói rằng trong 9 bậc tự do (chuyển vị nút) này thì có 7 chuyển vị đã biết và là bằng 0; chỉ còn 2 bậc tự do chưa biết: là 2 góc xoay tại nút 1 và 2. Và ta đánh số chúng là 1 và 2. Còn các chuyển vị thành phần khác ta đánh số 0. Vậy vectơ chuyển vị nút chưa biết là.

$$\{\bar{q}^*\} = \begin{bmatrix} \bar{q}'_1 \\ \bar{q}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Còn ma trận chỉ số [b] có thể thấy từ bảng dưới đây:

Phần tử	Chỉ số đ.ph	Nút i			Nút j		
		1	2	3	4	5	6
(1)		0	0	1	0	0	2
(2)		0	0	2	0	0	0

2) *Thiết lập ma trận cứng phần tử [K']_e:* Do bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc nên chỉ cần sử dụng (3.27) để xác định ma trận cứng phần tử trong hệ tọa độ tổng thể [K']_e

Chương 5. Tính toán hệ thanh

$$[\mathbf{K'}]_{(1)} \underset{(6 \times 6)}{=} \frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 12 & 0 & -6a & -12 & 0 & -6a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4a^2 & 6a & 0 & 2a^2 \\ & & & 12 & 0 & 6a \\ dx & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 4a^2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Chỉ số tổng thể} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

$$[\mathbf{K'}]_{(2)} \underset{(6 \times 6)}{=} \frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 6a & 0 & 12 & 6a & 0 \\ & 4a^2 & 0 & -6a & 2a^2 & 2 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 12 & -6a & 0 \\ & & & & & 4a^2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Chỉ số tổng thể} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

3) Ma trận cứng tổng thể $[\bar{\mathbf{K}}^*]$ (có kể đến điều kiện biên)

$$\bar{[\mathbf{K}^*]} \underset{(2 \times 2)}{=} \frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4a^2 & 2a^2 \\ dx & 4a^2 + 4a^2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Chỉ số tổng thể} \\ 1 \\ 2 \end{array} = \frac{EJ}{a} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

3) Thiết lập $\{\mathbf{P}'\}_e$: Theo biểu thức $\{\mathbf{P}'\}_e = [\mathbf{T}]_e^T \{\mathbf{P}\}_e$

$$\{\mathbf{P}'\}_e = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}'_1 \\ \mathbf{P}'_2 \\ \mathbf{P}'_3 \\ \mathbf{P}'_4 \\ \mathbf{P}'_5 \\ \mathbf{P}'_6 \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} -s & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{P}_4 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} -sP_1 \\ cP_1 \\ P_2 \\ -sP_3 \\ cP_3 \\ P_4 \end{Bmatrix}_e$$

Hay có thể thấy rằng P'_1 và P'_2 là hình chiếu của P_1 lên các trục tổng thể x' và y' . P'_4 và P'_5 là hình chiếu của P_3 lên các trục tổng thể x' và y' . Còn $P'_3 = P_2$ và $P'_6 = P_4$ (do trục z' cùng phương trục z)

Từ đó có thể trực tiếp từ sơ đồ tác dụng của $\{\mathbf{P}\}_e$ để suy ra $\{\mathbf{P}'\}_e$ trong bài

Chương 5. Tính toán hệ thanh

toán ví dụ này.

Cụ thể:

$$\{P\}_{(1)} = \begin{Bmatrix} -\frac{qa}{2} \\ -\frac{qa^2}{12} \\ -\frac{qa}{2} \\ \frac{qa^2}{12} \end{Bmatrix}_{(1)} \Rightarrow \{P'\}_{(1)} = \begin{Bmatrix} \frac{qa}{2} \\ -\frac{qa^2}{12} \\ \frac{qa}{2} \\ \frac{qa^2}{12} \end{Bmatrix}_{(1)}$$

Chỉ số tổng thể
0
0
1
0
0
2

Còn $\{P\}_{(2)} = \{0\}$ nên $\{P'\}_2 = \{0\}$ (do trên phần tử không có tải trọng tác dụng).

4) Thiết lập $\{\bar{P}'^*\}$ từ các $\{P'\}_{(e)}$:

$$\text{Để thấy: } \{\bar{P}'^*\} = \begin{Bmatrix} -\frac{qa^2}{12} \\ \frac{qa^2}{12} \end{Bmatrix}_{(1)} \quad \text{Chỉ số tổng thể} \quad \text{Hay} \quad \{\bar{P}'^*\} = \frac{qa^2}{12} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

5) Giải hệ phương trình hệ thống:

$$[\bar{K}'^*] \{\bar{q}'^*\} = \{\bar{P}'^*\} \Rightarrow \frac{EJ}{a} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q'_1 \\ q'_2 \end{Bmatrix} = \frac{qa^2}{12} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Giải ra: } \begin{Bmatrix} q'_1 \\ q'_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{7 \cdot 24} \cdot \frac{qa^3}{EJ} \begin{Bmatrix} -5 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

6) Hoàn thiện: Vẽ biểu đồ nội lực:

(+) Phần tử (1): có $c = 0, s = 1$: $\{M\}_{(1)} = [S']_{(1)} \{q'\}_{(1)}$

$$\{M\}_{(1)} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}_{(1)} = \frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 6a & 0 & -4a^2 & -6a & 0 & -2a^2 \\ -6a & 0 & 2a^2 & 6a & 0 & 4a^2 \end{bmatrix} \times \frac{qa^3}{7 \cdot 24 EJ} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{Bmatrix} = \frac{qa^2}{7 \cdot 12} \begin{Bmatrix} 7 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

(+) Phần tử (2): có $c = 1, s = 0$.

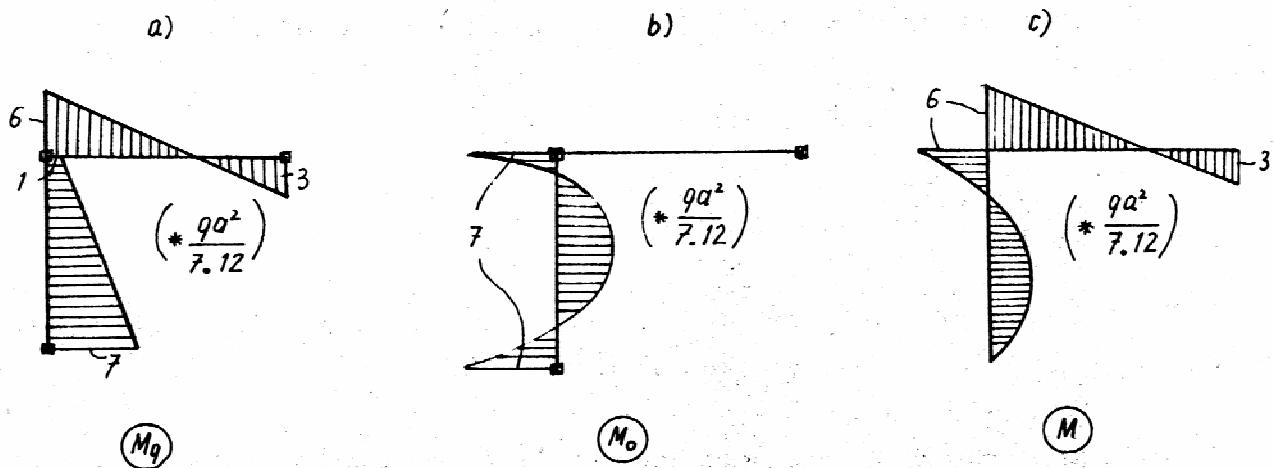
Chương 5. Tính toán hệ thanh

$$M_{(2)} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}_{(2)} = \frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6a & -4a^2 & 0 & 6a & -2a^2 \\ 0 & 6a & 2a^2 & 0 & -6a & 4a^2 \end{bmatrix} \times \frac{qa^3}{7 \cdot 24 EJ} \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{qa^2}{7 \cdot 12} \begin{Bmatrix} -6 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Biểu đồ momen uốn (M_q) được vẽ từ kết quả trên. (M_o) được vẽ khi xem các nút bị gắn cứng và các phần tử chịu tải trọng tác dụng trên chiều dài phần tử.

Biểu đồ kết quả: (M) = (M_q) + (M_o)

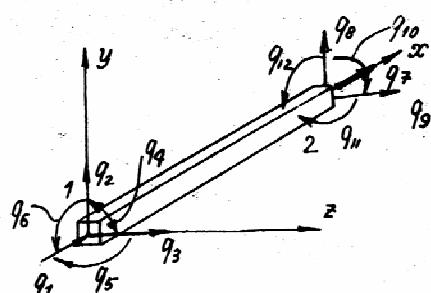
Các biểu đồ mômen (M_q), (M_o) và (M) được cho trong hình 5.20. Chú ý là giá trị các tung độ biểu đồ cần nhân với hệ số bằng $\frac{qa^2}{7.12}$



Hình. 5.20. Biểu đồ mômen uốn. a) Biểu đồ (M_q). b) Biểu đồ (M_o). c) Biểu đồ momen (M)

5.3. KHUNG KHÔNG GIAN.

Phần tử khung không gian là đầm thẳng có tiết diện không đối mà trên mặt cắt ngang của nó có thể tồn tại cả lực dọc, momen uốn trong 2 mặt phẳng quán tính chính và momen xoắn. Và tương ứng các bậc tự do chuyển vị đặc trưng cho trạng thái chuyển vị biến dạng của phần tử đầm 2 điểm nút được thấy như trong hình 5.21. Trong đó hệ trục tọa độ địa phương xyz gồm trục x là trục đầm, y và z là hai trục chính của mặt cắt ngang.



Hình. 5.21. Phần tử khung không gian và các bậc tự do.

Chương 5. Tính toán hệ thanh

Vectơ chuyển vị phần tử 2 điểm nút là:

$$\{q\}_{(e)} = \{q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8 \ q_9 \ q_{10} \ q_{11} \ q_{12}\}^T$$

Trong đó

q_1 và q_7 : các chuyển vị dọc trục đầm và chỉ gây ra biến dạng dọc trục thanh.

q_4 và q_{10} : các góc xoắn (quanh trục x) và chỉ liên quan đến biến dạng xoắn thanh.

q_2 và q_8 : chuyển vị thẳng theo phương trục y

q_6 và q_{12} : góc xoay trong mặt phẳng xy

q_3 và q_9 : chuyển vị thẳng theo phương trục z

q_5 và q_{11} : góc xoay trong mặt phẳng xz

chỉ gây ra biến dạng uốn trong mặt phẳng xy.

chỉ gây ra biến dạng uốn trong mặt phẳng xz

Như vậy 12 bậc tự do chuyển vị này chỉ gây ra 4 nhóm biến dạng độc lập nhau và có thể xét riêng rẽ. Nên ma trận cứng phần tử $[K]_{(e)}$ có kích thước (12×12) sẽ được thiết lập từ 4 ma trận con gồm 2 ma trận kích thước (2×2) và 2 ma trận (4×4) như sau:

a) Biến dạng dọc trục (do q_1 và q_7) Bài toán này đã được xét ở mục 1 bài 3.1 và ta đã có:

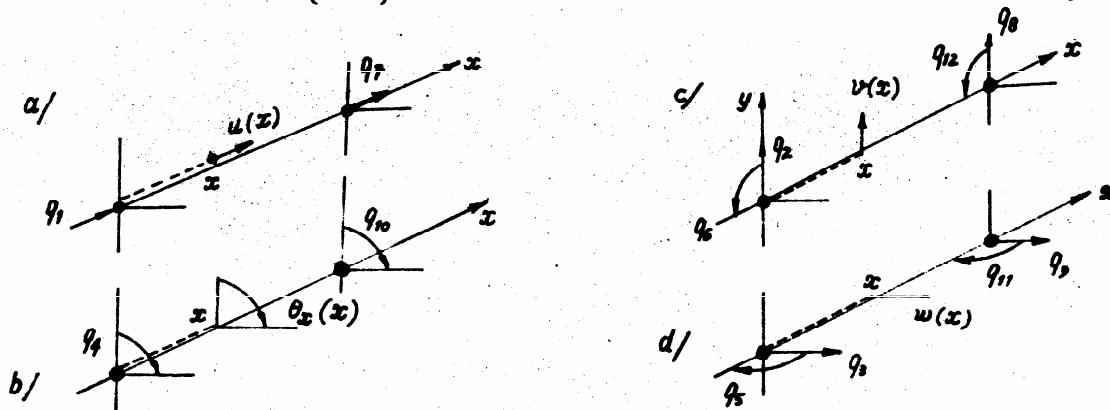
$$[K_a]_{(e)} = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_7 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

b) Biến dạng xoắn (do q_4 và q_{10}): Do chỉ có 2 bậc tự do nên ta giả thiết hàm góc xoắn $\theta_x(x)$ là hàm xấp xỉ bậc nhất là (hình 5.22b):

$$\theta_x(x) = a_1 + a_2 x \quad (5.32)$$

Và cũng theo nội dung của phép nội suy hàm góc xoắn này được nội suy theo các bậc tự do liên quan là q_4 và q_{10}

$$\theta_x(x) = [N] \begin{Bmatrix} q_4 \\ q_{10} \end{Bmatrix} = [N] \{q\}_{xoắn} \quad (5.33)$$



Hình 5.22.

Chương 5. Tính toán hệ thanh

$$\text{trong đó } [N] = \left[\left(1 - \frac{x}{l} \right) \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad (5.34)$$

Như Giáo trình Sức bền vật liệu trường hợp tiết diện thanh là tròn, thi đã biết:

Trên mặt cắt ngang chỉ tồn tại biến dạng góc $\gamma_{yz} = r \frac{d\theta_x}{dx}$ và ứng suất tiếp $\tau_{yz} = G \gamma_{yz}$ (Định luật Hooke). Vậy áp dụng các công thức trong chương 4 vào đây,

với $\{\varepsilon\} = \{\gamma_{yz}\}$, và $\{\sigma\} = [B] \{q\}_{xoắn}$

$$\text{với } [B] = \begin{pmatrix} -\frac{r}{l} & \frac{r}{l} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (r: \text{khoảng cách từ tâm đến điểm khảo sát})$$

$$\{\sigma\} = \{\tau_{yz}\} \text{ và } \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

với $[D] = [G]$ (G : modun đàn hồi trượt của vật liệu)

Cuối cùng ma trận cứng phần tử ứng với các bậc tự do $\{q\}_{xoắn}$ là:

$$[K_{xoắn}]_{(e)} = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV = 6 \int_0^l dx \iint_F r^2 dF \begin{pmatrix} -\frac{1}{l} \\ 1 \\ \frac{1}{l} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vậy: } [K_{xoắn}]_{(e)} = \frac{G J_x}{1} \begin{pmatrix} q_4 & q_{10} \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_4 \\ q_{10} \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

Ở đây J_x là momen quán tính độ cực của mặt cắt ngang.

Trường hợp mặt cắt ngang là chữ nhật kích thước $(a \times b)$ thì J_x được tính bằng $J_x = cab^3$. Trong đó c là hằng số được lấy theo bảng sau và phụ thuộc tỷ số a/b với $a \geq b$

a/b	1	1,5	2,0	3,0	5,0	10,0
c	0,141	0,196	0,229	0,263	0,291	0,312

c) Biến dạng uốn trong mặt phẳng xy (do $\{q\}_{xy} = \{q_2, q_6, q_8, q_{12}\}^T$ (hình 5.22d):

Như đã xét trong mục 1 bài 5.2, ta có:

$$[K_{xy}]_{(e)} = \frac{EJ_z}{l^3} \begin{pmatrix} q_2 & q_6 & q_8 & q_{12} \\ 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ \text{đối xứng} & 12 & -6l & \\ & & 4l^2 & q_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ q_6 \\ q_8 \\ q_{12} \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

d) Biến dạng uốn trong mặt phẳng xz (do $\{q\}_{xz} = \{q_3, q_5, q_9, q_{11}\}^T$) : Cũng tương tự như với biến dạng uốn trong mặt phẳng xy. Dễ thấy là (Hình 5.22c):

Chương 5. Tính toán hệ thanh

$$[K_{xz}]_{(e)} = \frac{EJ_y}{l^3} \begin{bmatrix} q_3 & q_5 & q_9 & q_{11} \\ 12 & 6l & -12 & 6l \\ 4l^2 & -6l & 2l^2 & \\ \text{đối xứng} & 12 & -6l & \\ & & 4l^2 & q_{11} \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

Vậy: Ma trận cứng phần tử được thiết lập từ 4 ma trận độ cứng (5.31) (5.35) (5.36) (5.37) có được từ việc xét độc lập các nhóm bậc tự do chuyển vị khác nhau. Cuối cùng ta có:

$$[K]_{(e)} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 & q_7 & q_8 & q_9 & q_{10} & q_{11} & q_{12} \\ EF/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -EF/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_z}{l^2} & \\ \frac{12EJ_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EJ_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & & \\ \frac{GJ_x}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_x}{l} & 0 & 0 & & & \\ \frac{4EJ_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{l} & 0 & & & & \\ \frac{4EJ_z}{l} & 0 & -\frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EJ_z}{l} & & & \\ \frac{EF}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \frac{12EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_z}{l^2} & & & & & \\ \frac{12EJ_y}{l^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & & & & & & & & \\ \frac{GJ_x}{l} & 0 & 0 & & & & & & & & & \\ \frac{4EJ_y}{l} & 0 & & & & & & & & & & \\ \frac{4EJ_z}{l} & & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

đối xứng

Chương 5. Tính toán hệ thanh

Đây là ma trận độ cứng của phần tử khung không gian trong hệ trục tọa độ địa phương xyz của phần tử. Tuy nhiên nói chung hệ trục tọa độ này là không trùng phương với hệ trục tọa độ tổng thể x'y'z'. Do đó trước khi "ghép nối phần tử" phải thực hiện phép chuyển trục tọa độ, hay nói cách khác cần tìm $[K'_e]$ là ma trận độ cứng phần tử trong hệ tọa độ tổng thể.

Theo công thức (4.57) :

$$[K'_e] = [T]_e^T [K]_e [T]_e$$

Trong đó $[T]_e$ là ma trận chuyển hệ trục tọa độ, là ma trận vuông, kích thước (12 × 12)

$$[T]_e = \begin{bmatrix} [n] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [n] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [n] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [n] \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Ở đây: Các ma trận con là các ma trận vuông (3×3). Cụ thể,

$$[0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[n] = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

trong đó l_x, m_x, n_x là cosin chỉ phương của trục x (trục phần tử và cũng là đường ij nối 2 điểm nút đầu và cuối phần tử),

l_y, m_y, n_y là cosin chỉ phương của trục y,

l_z, m_z, n_z là cosin chỉ phương của trục z lấy đối với các trục x', y', z' của hệ tọa độ tổng thể.

$[n]$ được gọi là ma trận biến đổi tọa độ. Nó xác định quan hệ giữa các tọa độ của một điểm bất kỳ theo các hệ trục tọa độ khác nhau. Trong trường hợp đang xét, ta có quan hệ giữa các tọa độ địa phương và các tọa độ tổng thể là:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [n] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

Chương 5. Tính toán hệ thanh

Xây dựng ma trận biến đổi tọa độ [n] theo tọa độ các điểm nút

Để thấy rằng, có thể tìm được nhanh chóng các cosin chỉ phương của trục \bar{x} theo tọa độ các nút đầu (x'_i, y'_i, z'_i) và nút cuối (x'_j, y'_j, z'_j) của phần tử trong hệ tọa độ tổng thể.

$$l_x = \frac{x'_j - x'_i}{l}, \quad m_x = \frac{y'_j - y'_i}{l}, \quad n_x = \frac{z'_j - z'_i}{l} \quad (5.42)$$

với l là chiều dài phần tử và

$$l = \sqrt{(x'_j - x'_i)^2 + (y'_j - y'_i)^2 + (z'_j - z'_i)^2}$$

Tuy nhiên để xác định thành phần còn lại của ma trận [n] là các cosin chỉ phương các trục y và đối với hệ trục tổng thể $x'y'z'$ thì ta phải lần lượt thực hiện theo hai giai đoạn như sau.

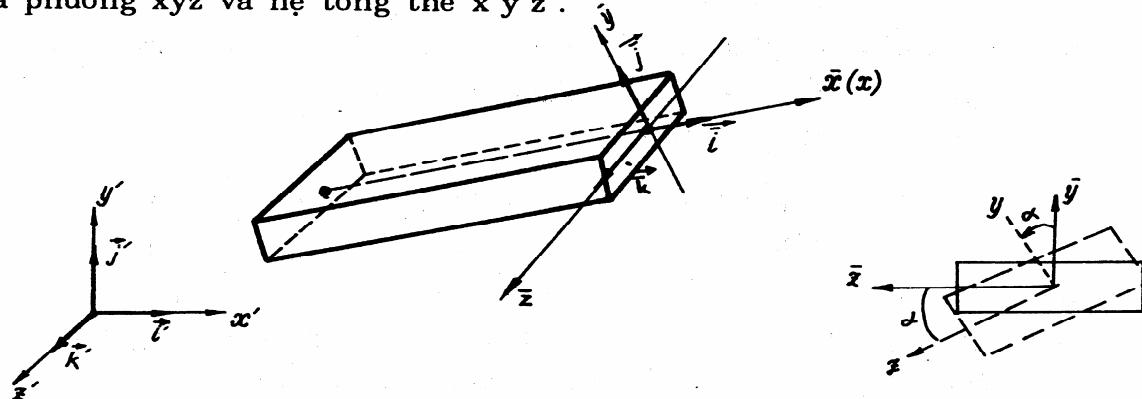
Ở giai đoạn đầu, ta sẽ xây dựng ma trận $[n_1]$ mô tả quan hệ giữa các tọa độ của hệ trục tổng thể $x'y'z'$ và các tọa độ của hệ trục trung gian $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$. Mà trong đó trục \bar{z} là song song với mặt phẳng tọa độ $x'z'$ (hình 5.23a), trục \bar{x} là trục phần tử. Khi đó.

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = [n_1] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

Trong giai đoạn sau, ta tìm ma trận $[n_2]$ biểu diễn quan hệ giữa các tọa độ của hệ trục trung gian $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ và hệ trục địa phương xyz của phần tử (có các trục y và z là các trục chính)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [n_2] \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Ở đây có thể tưởng tượng rằng hệ trục địa phương xyz nhận được bằng cách quay hệ trục trung gian $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ xung quanh trục \bar{x} một góc α nào đó (hình 5.23b). Như vậy sau 2 bước này ta tìm được ma trận $[n]$ xác định quan hệ giữa các tọa độ địa phương xyz và hệ tổng thể $x'y'z'$.



a. Trục $\bar{x} \equiv$ trục x , Trục $\bar{z} \parallel$ my xz (các trục chính y và z xem như trùng với y , z)

b. Trường hợp tổng quát, y và z không trùng với y và z .

Hình 5.23. Các hệ tọa độ tổng thể và địa phương và các vectơ đơn vị của chúng.

Chương 5. Tính toán hệ thanh

$$[n] = [n_2] [n_1] \quad (5.45)$$

Từ hình 3.23a, các cosin chỉ phương của trục \bar{x} cũng là cosin chỉ phương của trục x phần tử như đã xác định ở (3.42). Hay.

$$\begin{aligned} l_{\bar{x}} &= l_x = \frac{\mathbf{x}'_j - \mathbf{x}'_i}{1} \\ m_{\bar{x}} &= m_x = \frac{\mathbf{y}'_j - \mathbf{y}'_i}{1} \\ n_{\bar{x}} &= n_x = \frac{\mathbf{z}'_j - \mathbf{z}'_i}{1} \end{aligned} \quad (5.46)$$

Vì trục \bar{z} là song song mặt phẳng xz nên vectơ đơn vị \vec{k} là vuông góc với vectơ đơn vị \vec{j}' và cũng vuông góc với vectơ đơn vị \vec{l}' , từ đó chúng ta có:

$$\vec{k} = \frac{\vec{i} \times \vec{j}'}{||\vec{i} \times \vec{j}'||} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ l_x & m_x & n_x \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{d} (-\vec{i}' n_x + \vec{k}' l_x) \quad (5.47)$$

$$\text{Trong đó: } d = \sqrt{l_x^2 + n_x^2} \quad (5.48)$$

Vậy, từ (5.47) ta tìm được các cosin chỉ phương của trục \bar{z} đối với hệ trục tổng thể $x'y'z'$ là:

$$l_z = -\frac{n_x}{d}, \quad m_z = 0, \quad n_z = \frac{l_x}{d} \quad (5.49)$$

Để tìm các cosin chỉ phương của trục \bar{y} , chúng ta sử dụng điều kiện là trục \bar{y} (có vectơ đơn vị là \vec{j}') là vuông góc với trục x (\vec{i}') và trục z (\vec{k}'). Do đó ta có thể biểu diễn \vec{j}' như tích của 2 vectơ \vec{k}' và \vec{i}' như sau.

$$\vec{j}' = \vec{k}' \vec{i}' = \begin{bmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ l_z & m_z & n_z \\ l_x & m_x & n_x \end{bmatrix}$$

Sử dụng (5.46), (5.49) ta có:

$$\vec{j}' = \frac{1}{d} \left[\vec{i}' (-l_x m_x) - \vec{j}' (-n_x^2 - l_x^2) + \vec{k}' (-m_x n_x) \right]$$

Vậy các cosin chỉ phương của trục \bar{y} là:

$$\begin{aligned} l_y &= -\frac{l_x m_x}{d} \\ m_y &= \frac{n_x^2 + l_x^2}{d} \\ n_y &= -\frac{m_x n_x}{d} \end{aligned} \quad (5.50)$$

Chương 5. Tính toán hệ thanh

Và ma trận $[n_1]$ được xác định như dưới đây

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ -(l_x m_x)/d & (l_x^2 + n_x^2)/d & -(m_x n_x)/d \\ -n_x/d & 0 & l_x/d \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

trong đó l_x, m_x, n_x đã được xác định bởi (5.42) và d bởi (5.48).

Để tìm $[n_2]$ ta chỉ cần nhớ rằng khi các trục địa phương xyz của phần tử là bất kỳ thì phép xoay quanh trục x góc α sẽ cho ta biểu diễn quan hệ giữa 2 hệ trục xyz và hệ trục x y z như sau:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Hay, ta có:

$$[n]_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

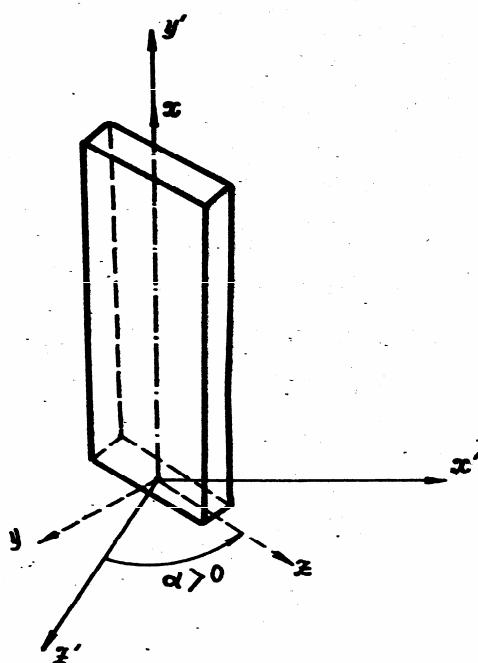
Vậy ma trận biến đổi tọa độ $[n]$ là đã được xác định, bằng cách sử dụng (5.51) và (5.52). Và

$$[n] = [n_1] [n_2]$$

Chú ý:

1. Nếu $\alpha = 0$ thì ma trận $[n_2]$ sẽ trở thành ma trận đơn vị.
2. Khi phần tử thanh đang xét có phương thẳng đứng, tức là khi trục x (hay \bar{x}) là trùng với trục tổng thể y' thì cosin chỉ phương của nó là

$$l_x = 0, m_x = 1, n_x = 0$$



Hình 5.24. Phần tử thẳng đứng và các hệ trục tọa độ.

Chương 5. Tính toán hệ thanh

thì giá trị của d trong (5.51) là bằng 0. Điều này làm nhiều thành phần trong ma trận $[n_1]$ là không xác định. Vậy việc xác định ma trận $[n]$ như trên là không thích hợp nữa.

Tuy nhiên, trường hợp này lại dễ dàng xác định được ma trận $[n]$. Nếu gọi α là góc giữa các trục z' và z và nằm trong mặt phẳng nằm ngang $x'z'$ (α là dương khi quay từ z' đến z là ngược chiều kim đồng hồ (Hình 5.24). Cũng dẫn giải như trên ta sẽ nhận được ma trận $[n]$ như sau:

$$[n] = \begin{bmatrix} 0 & m_x & 0 \\ -m_x \cos \alpha & 0 & m_x \sin \alpha \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

Ở đây $m_x = 1$ trong trường hợp này.