

Chương 4. Cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn

Chương 4

CƠ SỞ PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

- 4.1. Cơ học vật rắn biến dạng.**
- 4.2. Các phương pháp giải bài toán cơ học vật rắn biến dạng.**
- 4.3. Các nguyên lý năng lượng (nguyên lý biến phân).**
- 4.4. Khái niệm về phương pháp phần tử hữu hạn.**
- 4.5. Trình tự phân tích bài toán theo phương pháp phần tử hữu hạn.**
- 4.6. Hàm xấp xỉ. Đa thức xấp xỉ. Phép nội suy.**
- 4.7. Các phương trình cơ bản.**

Chương 4. Cơ sở phương pháp phân tử hữu hạn

4.1. CƠ HỌC VẬT RẮN BIẾN DẠNG

1. Các phương trình cân bằng: (Equation of internal equilibrium)

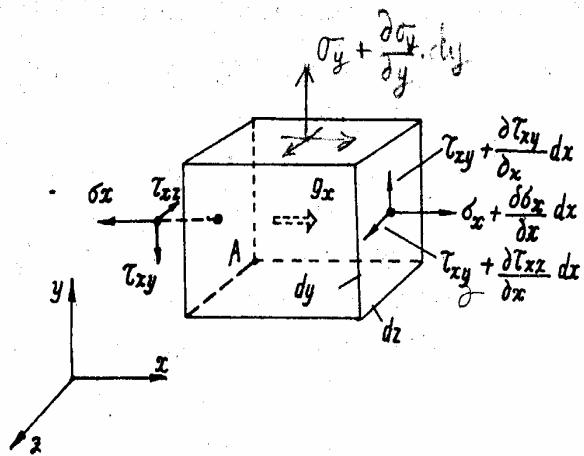
Dưới tác dụng của tải trọng ngoài, vật thể chịu lực (có thể tích V , bề mặt S và những liên kết cần thiết nào đó để bảo đảm khả năng chịu lực mà không bị biến hình) bị biến dạng và bên trong nó sẽ xuất hiện ứng suất.

Ứng suất tại các điểm khác nhau là khác nhau và được xác định bởi *trạng thái ứng suất* tại điểm đó. Như đã biết trong sức bền vật liệu, trạng thái ứng suất tại một điểm là tập hợp của tất cả các giá trị ứng suất tác dụng trên các mặt cắt qua điểm khảo sát. Và trạng thái ứng suất tại một điểm hoàn toàn xác định khi biết các ứng suất trên 3 mặt vuông góc nhau tại điểm đó. Hay cụ thể hơn, với một hệ tọa độ vuông góc thông thường xyz, thì trạng thái ứng suất tại một điểm hoàn toàn xác định khi biết tập hợp 9 thành phần ứng suất tác động trên 3 mặt phẳng vuông góc nhau và song song với các mặt phẳng tọa độ:

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz} \quad (4.1)$$

Nếu tách ra từ vật thể một phân tố vật thể thì rõ ràng phân tố này phải ở trạng thái cân bằng bởi các nội lực (ứng suất) và ngoại lực (lực khối) tác dụng lên nó. (Xem hình 4.1 với *chú ý rằng* để đơn giản chỉ vẽ các thành phần ứng suất tác dụng trên 2 mặt phẳng // mặt phẳng yz và lực khối chỉ về thành phần g_x song song trục x).

Bằng cách sử dụng các phương trình cân bằng tĩnh học thông thường, bỏ qua các vô cùng bé bậc cao, cuối cùng ta có:



Hình 4.1

Chương 4. Cơ sở phương pháp phân tử hữu hạn

Từ 3 phương trình tổng momen với 3 trục tọa độ x, y, z ta có các biểu thức của định luật đối ứng của ứng suất tiếp. Cụ thể là:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}, \tau_{zy} = \tau_{yz}, \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (4.2)$$

Các biểu thức này chỉ ra rằng: Trạng thái ứng suất tại một điểm có thể hoàn toàn xác định thay vì 9 mà bằng 6 thành phần ứng suất sau đây và tập hợp của chúng là vectơ ứng suất $\{\sigma\}$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T \quad (4.3)$$

Còn từ 3 phương trình hình chiếu theo 3 trục x, y, z sẽ cho 3 phương trình cân bằng sau:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + g_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + g_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + g_z = 0 \end{array} \right\} \quad (4.4)$$

trong đó: g_x, g_y, g_z là các lực khối thành phần, hay cụ thể hơn là các lực khối trên 1 đơn vị thể tích tác dụng dọc theo các phương x, y, z. Lực khối có thứ nguyên [Lực/(chiều dài)³] là 3 thành phần của vectơ lực khối $\{g\}$.

Các phương trình (4.4) được gọi là phương trình vi phân cân bằng, hay phương trình cân bằng nội.

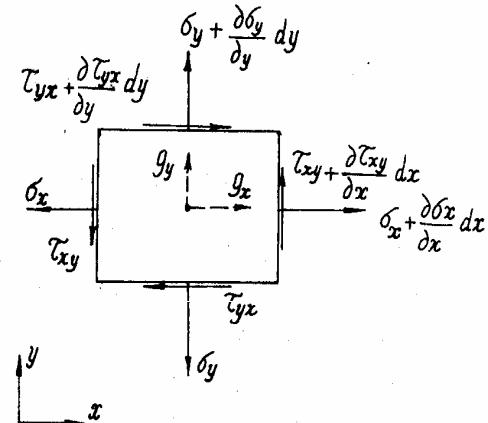
Trong bài toán 2 chiều (2-D): Các ứng suất chỉ là hàm số 2 biến số, ví dụ x, y. Trạng thái ứng suất tại một điểm lúc đó chỉ cần biểu diễn bởi ba thành phần ứng suất σ_x, σ_y và τ_{xy} . (hình 4.2)

Lúc đó các phương trình cân bằng nội chỉ còn hai phương trình sau:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + g_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + g_y = 0 \end{array} \right\} \quad (4.5)$$

Trong bài toán 1 chiều (1-D): Trạng thái ứng suất tại một điểm bất kỳ được đặc trưng bởi một thành phần ứng suất và là hàm của một biến số (ví dụ tọa độ x). Phương trình cân bằng chỉ còn là:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + g_x = 0 \quad (4.6)$$



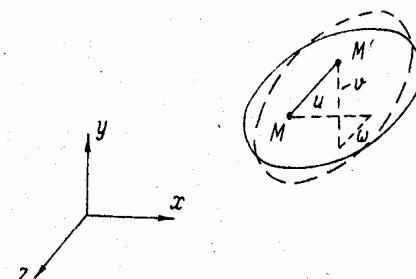
Hình 4.2

Chương 4. Cơ sở phương pháp phân tử hữu hạn

2. Quan hệ giữa biến dạng - chuyển vị:

Dưới tác dụng của tải trọng, vật thể chịu lực bị biến dạng, các điểm trong vật thể chuyển dịch đến vị trí mới trong không gian. Ta nói rằng các điểm có chuyển vị.

Xét điểm M bất kỳ có tọa độ (x, y, z) . Do biến dạng, điểm M chuyển tới vị trí M'. (hình 4.3).



Hình 4.3

Ta gọi $\overline{MM'}$ là chuyển vị toàn phần của điểm M.

Hình chiếu của chuyển vị toàn phần MM' lên 3 trục tọa độ là u, v, w là các chuyển vị thành phần. Và chúng là hàm số của tọa độ điểm.

Do vật thể bị biến dạng, các điểm có chuyển vị nên một đoạn thẳng nhỏ vô cùng có phương nào đó đi qua điểm khảo sát cũng sẽ bị biến dạng co ngắn hoặc dài ra, cũng như vậy các góc vuông tạo bởi hai đoạn thẳng thẳng góc nhau tại điểm khảo sát cũng sẽ không còn vuông nữa. Ta nói rằng tại điểm khảo sát có biến dạng dài và biến dạng góc. Nói chung, theo các phương khác nhau thì có biến dạng dài khác nhau và biến dạng góc của góc vuông hợp bởi hai phương bất kỳ thẳng góc nhau cũng khác nhau. Và cũng như TTUS, tập hợp của các biến dạng dài và góc theo các phương bất kỳ qua một điểm được gọi là trạng thái biến dạng. Và cũng có thể thấy, tương tự như TTUS, TTBD tại một điểm xác định bằng 6 thành phần biến dạng hay vectơ biến dạng $\{\epsilon\}$ và:

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T \quad (4.7)$$

gồm ba biến dạng dài theo ba phương trục tọa độ x, y, z và ba biến dạng góc trong ba mặt phẳng song song các mặt phẳng tọa độ.

Giữa các thành phần biến dạng và các thành phần chuyển vị có mối quan hệ với nhau. Để đơn giản ta xét bài toán phẳng (điều này không làm mất tính tổng quát của vấn đề). Xem hình 4.4

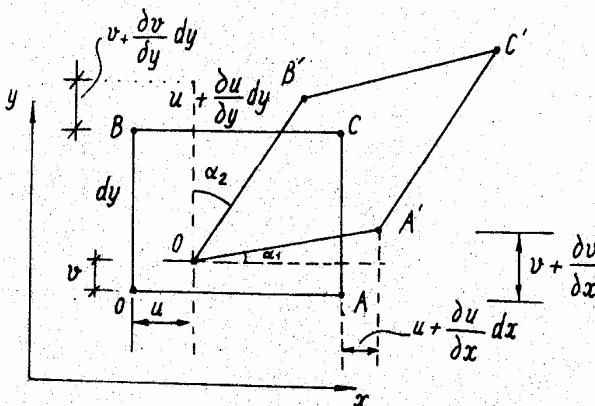
Xét phân tố chữ nhật OABC có các cạnh dx, dy song song các trục tọa độ.

Khi vật thể bị biến dạng, phân tử OABC cũng bị biến dạng, các điểm chuyển tới vị trí mới trong mặt phẳng và O'A'B'C'.

Phân tố OABC bị biến dạng:

Cụ thể là các cạnh phân tố bị biến dạng dài ra hoặc co ngắn lại, góc vuông OAB không còn vuông nữa.

Rõ hơn: cạnh phân tố bị biến dạng dài tương đối theo x, y.



Hình 4.4

Chương 4. Cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn

$$\epsilon_x = \frac{\text{Độ biến đổi chiều dài OA theo phương x}}{\text{Chiều dài ban đầu của OA}} = \frac{\left[dx + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) - u \right] - dx}{dx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x}$$

Tương tự: $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$

Độ giảm góc vuông được gọi là biến dạng góc trong mặt phẳng xy, kí hiệu γ_{xy} .

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \alpha_1 + \alpha_2 \approx \operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) - v}{\left[dx + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) - u \right]} + \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) - u}{\left[dy + \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) - v \right]} \\ &= \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{(1 + \epsilon_x) dx} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{(1 + \epsilon_y) dy} \end{aligned}$$

Vì ϵ_x và $\epsilon_y < < 1 \Rightarrow$ bỏ qua $\Rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$

Vậy có thể nói rằng:

Biến dạng dài tương đối theo một phương bất kỳ là bằng đạo hàm riêng của thành phần chuyển vị theo phương đó lấy đối với biến số cũng theo phương đó.

Biến dạng góc trong một mặt phẳng nào đó là bằng tổng đạo hàm riêng của các chuyển vị thành phần trong mặt phẳng này lấy theo các biến số của hướng thẳng góc với các chuyển vị thành phần.

Tổng quát, trong bài toán 3 chiều, ta có liên hệ giữa các biến dạng dài, và biến dạng góc đối với các chuyển vị thành phần như sau: (Các phương trình Cauchy).

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Hay ở dạng ma trận: $\{\epsilon\} = [\partial]\{u\}$ (4.9)

Hay cụ thể hơn:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

Chương 4. Cơ sở phương pháp phân tử hữu hạn

3. Các phương trình liên tục của biến dạng.

Các phương trình Cauchy (4.8) cho ta sự liên hệ 6 thành phần biến dạng với 3 thành phần chuyển vị. Vậy nếu biết 3 chuyển vị thì bằng cách đạo hàm ta sẽ được 6 thành phần biến dạng một cách duy nhất. Nhưng ngược lại: nếu biết 6 biến dạng thì để tìm 3 thành phần chuyển vị thì thông thường bằng cách tích phân 6 biến dạng thành phần theo các đạo hàm riêng. Như vậy sự chọn tùy ý 6 biến dạng là không được vì chúng sẽ không cho duy nhất 3 chuyển vị. Do vậy rõ ràng 6 biến dạng là không độc lập nhau và giữa chúng phải tồn tại sự liên hệ xác định nào đó. Đó chính là các phương trình liên tục. Ý nghĩa hình học là bảo đảm cho vật thể biến dạng không có vết gãy đứt.

Thật vậy, thử loại các chuyển vị trong (4.8).

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
 + \quad \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}
 \end{aligned}$$

Đây là liên hệ giữa các thành phần biến dạng dài và góc trong cùng một mặt phẳng.

Trong hệ cũng thiết lập được mối liên hệ giữa các biến dạng góc trong 3 mặt phẳng thẳng góc nhau với biến dạng dài. Tóm lại, ta có 6 phương trình liên tục:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \\
 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} \\
 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Chương 4. Cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn

Trong bài toán 2-D: Các phương trình (4.11) chỉ còn lại phương trình quan trọng nhất:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

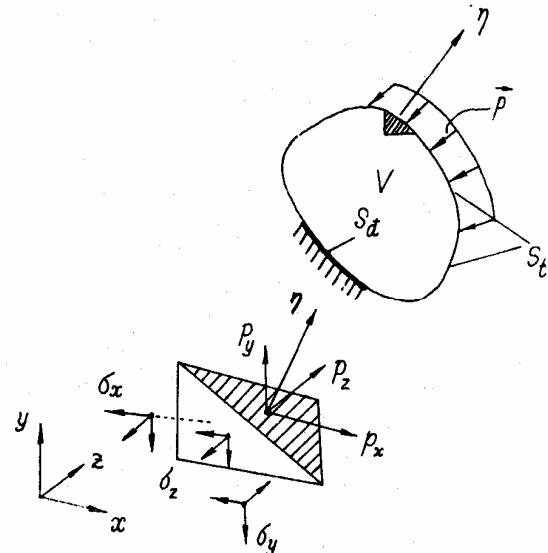
Trong bài toán 1-D: Các phương trình trên tự động thỏa mãn.

4. Điều kiện biên (Boundary conditions)

Các điều kiện biên có thể về chuyển vị hoặc ứng suất. Điều kiện biên liên quan đến chuyển vị (Điều kiện động học) thường là đòi hỏi về chuyển vị tại một điểm (hoặc một phần mặt biên) nào đó có một giá trị cho trước nào đó.

Điều kiện biên liên quan đến ứng suất (điều kiện biên tĩnh học) thì thể hiện sự cân bằng tĩnh học đòi hỏi giữa ngoại lực đặt lên biên và ứng suất ngay sát mặt biên (còn gọi là điều kiện bề mặt).

Ví dụ: Vật thể chịu lực có thể tích V , bề mặt S , vật thể liên kết chặt trên S_d và trên phần còn lại S_t có một phần chịu tải trọng p . (chú ý: $S = S_d + S_t$), hình 4.5.



Hình 4.5

Vậy: Điều kiện biên động học: $u = v = w = 0$ trên S_d

Điều kiện biên tĩnh học: Trên S_p có chịu $\{p\}$ tải trọng.

Tên $(S_t - S_p)$ không có tải trọng hay $\{p\} = 0$

Thường tải trọng ngoài (tải trọng bề mặt) cho bởi vectơ $\{p\} = \{p_x, p_y, p_z\}^T$ là gồm 3 thành phần hình chiếu lên 3 trục x, y, z.

Bằng cách khảo sát sự cân bằng của một phân tố tứ diện vô cùng nhỏ ngay sát biên mà mặt đáy chính là mặt biên thì ta có liên hệ giữa ứng suất (nội lực) và ngoại lực như sau:

$$\begin{cases} \delta_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = p_x \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n = p_y \\ \tau_{zx} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n = p_z \end{cases} \quad (4.11)$$

trong đó (l, m, n) là cosin chỉ phương của pháp tuyến ngoài η của mặt bên tại điểm khảo sát.

Phương trình (4.11) được gọi là điều kiện bề mặt. Nó cho ta mối quan hệ giữa tải trọng ngoài và nội lực. Và nó cũng là điều kiện biên tĩnh học.

Ví dụ: Xét một bản phẳng ngầm một đầu trái như hình 4.6, ta có các điều kiện biên sau:

Chương 4. Cơ sở phương pháp phân tử hữu hạn

biên động học:

Cạnh AB: các điểm không có chuyển vị u và v: hay $u = 0, v = 0$.
Mà phương trình cạnh AB trong hệ tọa độ như hình vẽ là: $x = 0$. Vậy điều kiện biên động học có thể là:

$$u(0, y) = v(0, y) = 0.$$

Ngoài ra còn có cả điều kiện biên thể hiện góc xoay bằng không.

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=0} = 0$$

Điều kiện biên tĩnh học trên phần biên còn lại:

Trên cạnh AD ($y = 0$) và trên cạnh CD ($x = l$) tải trọng không có: $p_x = p_y = 0$. Cụ thể trên cạnh AD ($y = 0$) có pháp tuyến ngoài $\eta_1(0, -1)$, vậy áp dụng (4.11) với bài toán phẳng ta có:

$$\begin{cases} 0 \cdot (\sigma_x)_{AD} - 1 \cdot (\tau_{xy})_{AD} = 0 \\ 0 \cdot (\tau_{xy})_{AD} - 1 \cdot (\sigma_y)_{AD} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\tau_{xy})_{AD} \equiv (\tau_{xy})_{y=0} = 0 \\ (\sigma_y)_{AD} \equiv (\sigma_y)_{y=0} = 0 \end{cases}$$

Tương tự, trên cạnh CD ($x = l$) có $\eta_2(1, 0)$ ta cũng có: $(\sigma_x)_{x=l} = (\tau_{xy})_{x=l} = 0$

Còn trên BC ($y = h$): có $\eta_3(0, 1)$, chịu tải trọng $p_y = -q$, sử dụng (4.11) ta có:

$$(\tau_{xy})_{BC} \equiv (\tau_{xy})_{y=h} = 0 ; (\sigma_y)_{BC} \equiv (\sigma_y)_{y=h} = -q$$

5. Các phương trình vật lý- Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng- Định luật Hooke

Như vậy ở các mục trên ta đã làm quen với hai yếu tố tĩnh học và động học độc lập nhau trong bài toán cơ. Hai yếu tố này được liên hệ với nhau bởi các định luật ứng xử thể hiện mối liên hệ giữa ứng suất và biến dạng. Và rõ ràng mối quan hệ này của các vật liệu khác nhau thì là khác nhau và chỉ có thể từ thực nghiệm mới xác định được.

Để đơn giản hóa trình bày chỉ xét giai đoạn làm việc đàn hồi của vật liệu và xem sự đàn hồi này là tuyến tính, tức quan hệ giữa ứng suất và biến dạng là tuyến tính. Khi đó, quan hệ này được cho bởi định luật Hooke, đã quen thuộc trong giáo trình Sức bền vật liệu.

Trong bài toán ba chiều với vật liệu đẳng hướng định luật Hooke là:

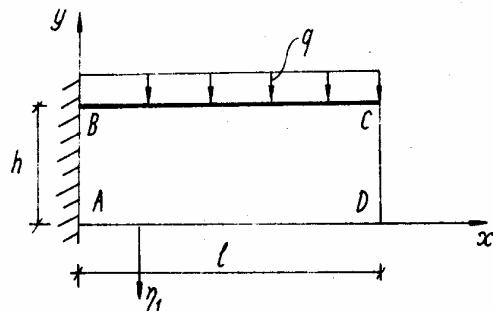
$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)], \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x)], \quad \gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz}$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)], \quad \gamma_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{zx}$$

Hay ở dạng ma trận; và kể thêm thành phần biến dạng ban đầu.

$$\{\epsilon\} = [C]\{\sigma\} + \{\epsilon_0\} \quad (4.12)$$



Hình 4.6

Chương 4. Cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn

Trong đó:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T \text{ là vectơ biến dạng}$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T : \text{vectơ ứng suất}$$

$$\{\varepsilon_0\} = \{\varepsilon_{ox}, \varepsilon_{oy}, \varepsilon_{oz}, \gamma_{oxy}, \gamma_{oyz}, \gamma_{ozx}\}^T \text{ là vectơ biến dạng ban đầu.}$$

[C] : ma trận các hệ số đàn hồi.

$$[C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

với E - modun đàn hồi Young của vật liệu. G là môđun đàn hồi trượt

ν - hệ số Poisson của vật liệu.

Chú ý rằng việc xác định ν bằng thực nghiệm khó hơn việc xác định môđun trượt G từ thí nghiệm xoắn. Nên thường tìm G từ thí nghiệm xoắn thành tròn trước rồi mới xác định ν từ quan hệ sau đây:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.14)$$

Với $\{\varepsilon_0\}$ là vectơ biến dạng ban đầu. Trường hợp do nhiệt độ thì:

$$\{\varepsilon_0\} = \alpha T \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}^T \quad (4.15)$$

trong đó α là hệ số dãn nở vì nhiệt của vật liệu, còn T là độ biến thiên của nhiệt độ.

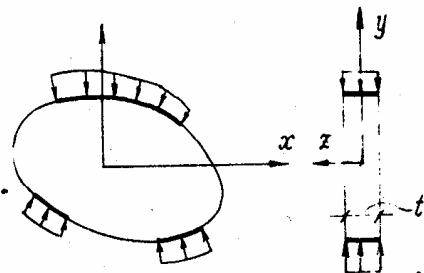
Đôi khi ta cũng cần đến các biểu thức biểu diễn ứng suất theo biến dạng, bằng cách nghịch đảo (1.12) ta có: $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}$

$$\text{hay } \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} - \frac{E\alpha T}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

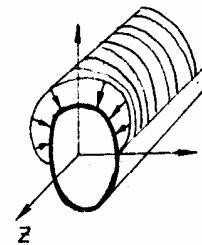
trong đó ma trận hệ số [D] là:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Chương 4. Cơ sở phương pháp phân tử hữu hạn



Hình 1.7



Hình 1.8

Bài toán 2 chiều – Bài toán phẳng: Trong một số bài toán cụ thể dưới đây khi các đại lượng chính của bài toán chỉ là hàm số của 2 tọa độ điểm (thường lấy là tọa độ x, y) thì ta có bài toán 2 chiều. Trong lý thuyết đàn hồi thường gặp hai dạng bài toán 2 chiều sau:

(a) *Bài toán ứng suất phẳng:* Khi vật thể có dạng tấm và tải trọng nằm trong mặt phẳng giữa tấm, phân bố đều theo bề dày tấm thì có thể xem rằng (Hình 4.7):

$$+ \sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \quad (\text{chọn trục } z \text{ vuông góc mặt phẳng tấm})$$

+ Các ứng suất không đổi theo bề dày tấm (tức là theo hướng z) hay ứng suất không phụ thuộc tọa độ z. (Dù rằng điều này sẽ vi phạm một vài điều kiện của tính liên tục nhưng chúng đủ chính xác đối với tất cả các bài toán thực tiễn khi tấm là mỏng)

Khi đó định luật Hooke sẽ là:

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\} + \{\varepsilon_0\}$$

trong đó:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{ox} \\ \varepsilon_{oy} \\ \gamma_{oxy} \end{Bmatrix} = \alpha T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{và } [C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

$$\text{Hay ở dạng ngược: } \{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) = [D]\{\varepsilon\} - \frac{E\alpha T}{1-\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{với } [D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

Biến dạng theo phương z là tồn tại và là:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) + \alpha T$$

(b) *Bài toán biến dạng phẳng:* Khi vật thể có dạng lăng trụ dài và có mặt cắt ngang là không đổi suốt chiều dài (hình 4.8), chịu tải trọng đều và vuông góc trục

Chương 4. Cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn

z dọc theo chiều dài, thì có thể dễ thấy rằng: tại mọi điểm ta có:

$$w = 0 \text{ và } \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Các đại lượng ứng suất biến dạng và chuyển vị chỉ phụ thuộc 2 biến x, y.

Và từ $\varepsilon_z = 0$ ta dễ thấy các công thức của định luật Hooke là:

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\} + \{\varepsilon_0\}$$

trong đó, $[C] = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\{\varepsilon_0\} = (1+\nu)\alpha T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\text{Hoặc ở dạng ngược. } \{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) = [D]\{\varepsilon\} - \frac{E\alpha T}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{với } [D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{và } \sigma_z \neq 0, \text{ cụ thể: } \sigma_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y) - E\alpha T$$

$$\text{còn } \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

• **Bài toán 1 chiều :** Do chỉ tồn tại một thành phần ứng suất, định luật Hooke là:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x + \alpha T$$

$$\text{Hoặc: } \sigma_x = E\varepsilon_x - E\alpha T \quad (\text{ở đây } [D] = E)$$

(1x1)

• **Quan hệ ứng suất – biến dạng của vật liệu không đẳng hướng.**

Trong thực tế kỹ thuật ngoài các loại vật liệu đẳng hướng (isotropic) người ta còn sử dụng các loại vật liệu không đẳng hướng (anisotropic) như bêtông cốt thép, gỗ, các loại vật liệu composit, ... Khi đó khác với vật liệu đẳng hướng, các tính chất của vật liệu không đẳng hướng tại một điểm theo các phương khác nhau là khác nhau. Định luật Hooke tổng quát mô tả quan hệ tuyến tính giữa biến dạng và ứng suất có dạng:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{26} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{61} & C_{62} & \dots & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{bmatrix}$$

Chương 4. Cơ sở phương pháp phân tử hữu hạn

Hay $\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\}$

Trong đó ma trận các hệ số đàn hồi $[C]$ là đối xứng và có 21 hằng số độc lập. Các chỉ số 1, 2 và 3 được dùng thay thế tương ứng các chỉ số x, y và z.

Với vật liệu trực hướng (orthotropic), số hằng số độc lập của ma trận $[C]$ rút xuống còn 9 và ma trận $[C]$ có dạng:

$$[C]_{*} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

trong đó các phần tử C_{ij} là:

$$C_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad C_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_2}, \quad C_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_3}$$

$$C_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad C_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_3}, \quad C_{33} = \frac{1}{E_3}$$

$$C_{44} = \frac{1}{G_{12}}, \quad C_{55} = \frac{1}{G_{23}}, \quad C_{66} = \frac{1}{G_{31}}$$

Với E_1, E_2, E_3 là môđun đàn hồi Young trong các mặt phẳng được xác định tương ứng bởi các trục 1, 2 hay 3 (hoặc x, y, z).

G_{12}, G_{23} và G_{31} là các môđun đàn hồi trượt trong các mặt phẳng 12, 23 và 31. Còn ν_{12}, ν_{23} và ν_{31} là các hệ số Poisson.

9 thành phần độc lập này là cần thiết để mô tả một vật liệu trực hướng trong trạng thái ứng suất phức tạp, ba chiều.

Trong trạng thái ứng suất phẳng, $\sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{13} = 0$ nên phương trình định luật Hooke ở trên có dạng:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

trong đó, 4 thành phần độc lập của ma trận $[C]$ là:

$$C_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad C_{22} = \frac{1}{E_2}$$

$$C_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}$$

Chương 4. Cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn

$$C_{44} = \frac{1}{G_{12}}$$

Ở dạng ngược, các phương trình định luật Hooke biểu diễn ứng suất qua biến dạng trong trường hợp bài toán ứng suất phẳng là: $\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}$

Hay
$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

trong đó:

$$D_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, D_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$D_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$D_{44} = 2G_{12}$$

6. Đặt bài toán.

Như vậy khi nghiên cứu một vật thể biến dạng có thể tích V biến dạng dưới tác dụng của lực khối $\{g\}$ trên thể tích V và lực mặt $\{p\}$ trên phần mặt biên S_t , cũng như các điều kiện biên động học trên phần biên S_d , ta thấy rằng tại mỗi điểm sẽ xuất hiện ứng suất $\{\sigma\}$, biến dạng $\{\epsilon\}$ và các điểm có chuyển vị $\{u\}$. Với mục tiêu của việc nghiên cứu là tìm được sự phân bố ứng suất, biến dạng và chuyển vị này sinh trong vật thể, có thể tóm tắt các ẩn hàm cần tìm trong bảng sau tùy thuộc bài toán là 3, 2 hay 1 chiều.

Đại lượng cần tìm	Bài toán 3-D	Bài toán 2-D	Bài toán 1-D
Chuyển vị $\{u\}$	u, v, w	u, v	u
Ứng suất $\{\sigma\}$	$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	σ_x
Biến dạng $\{\epsilon\}$	$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	$\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$	ϵ_x
Tổng số ẩn hàm	15	8	3

Các đại lượng cần tìm này về nguyên tắc “có thể” có được ở dạng giải tích bằng cách “tích phân trực tiếp” các phương trình cơ bản sau.

Loại phương trình	Số phương trình		
	Bài toán 3-D	Bài toán 2-D	Bài toán 1-D
Các phương trình cân bằng (nội)	3	2	1
Các phương trình biến dạng – chuyển vị	6	3	1
Các phương trình ứng suất – biến dạng (Hooke)	6	3	1
Tổng số phương trình	15	8	3

Và tất nhiên, nghiệm của bài toán cần thỏa mãn các điều kiện biên động học trên S_d và các điều kiện biên tĩnh học trên phần biên S_t .

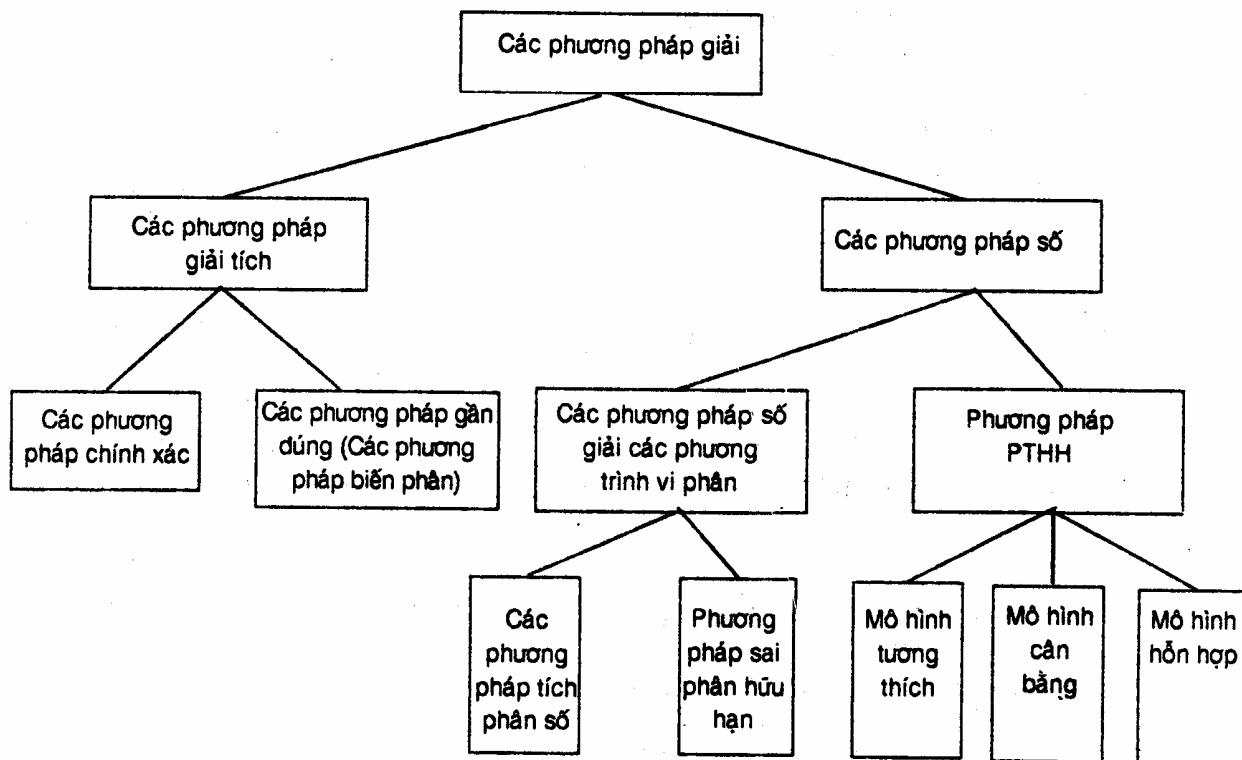
Chương 4. Cơ sở phương pháp phân tử hữu hạn

4.2. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN CƠ VẬT RẮN BIẾN DẠNG, BÀI TOÁN ĐÀN HỒI

Như phần trên đã thấy, việc giải bài toán cơ vật rắn biến dạng nói chung hay bài toán đàm hồi nói riêng thực chất là, trong trường hợp tổng quát – bài toán 3 chiều, việc tìm 15 ẩn hàm đặc trưng cho trạng thái ứng suất – biến dạng – chuyển vị của vật thể từ 15 phương trình vi phân thỏa mãn các điều kiện biên động và tĩnh học đã cho. Để thấy rằng công việc này không dễ dàng và dường như không thực hiện được trong trường hợp tổng quát do các khó khăn toán học. Do vậy đã có nhiều phương pháp phân tích, phương pháp giải khác nhau để có thể tìm được nghiệm của bài toán.

Việc bàn về các phương pháp giải bài toán cơ trong trường hợp tổng quát thực chất là không đơn giản và giáo trình này không có tham vọng bàn kỹ về vấn đề này. Tuy nhiên để thấy rõ được phương pháp PTHH sau này, cũng cần sơ bộ bàn tới các phương pháp tính trong cơ học (cũng như trong các bài toán trường ổn định nói chung (bài toán truyền nhiệt, bài toán dòng chảy, bài toán electrostatic, magnetostatic, ...).

Có thể thấy sơ bộ các phương pháp giải bài toán cơ vật rắn biến dạng hay bài toán cơ kết cấu theo sơ đồ dưới:



Ở sơ đồ này, có thể thấy rằng, nghiệm của bài toán cơ có thể được tìm thấy trong dạng giải tích hoặc có thể chỉ là các giá trị số của các đại lượng cần tìm tại một số hữu hạn các điểm đã xác định trong miền V của vật thể khảo sát bằng các phương pháp giải thích hợp khác nhau. Mà trong đó, chúng ta có thể nêu một số phương pháp cụ thể.

Chương 4. Cơ sở phương pháp phân tử hữu hạn

1. Phương pháp chính xác (hay phương pháp tích phân trực tiếp):

Là các phương pháp tích phân trực tiếp hệ thống các phương trình vi phân của bài toán và thỏa mãn các điều kiện biên mà bài toán đã có. Tuy nhiên trong bài toán đàm hồi thay vì phải tìm đồng thời 15 hàm ẩn, người ta có thể làm nhẹ bài toán bằng cách xem các đại lượng nào đó (hoặc chuyển vị, hoặc ứng suất) là các ẩn cơ bản cần tìm trước hết. Cụ thể, khi giải theo chuyển vị, người ta xem 3 chuyển vị u, v, w là 3 ẩn hàm cơ bản và cần tìm trước. Sau khi đã tìm được chuyển vị mới tìm biến dạng và ứng suất. Khi bài toán được giải theo ứng suất, thì trước hết người ta sẽ thiết lập hệ thống 6 phương trình vi phân để tìm 6 hàm ẩn là ứng suất.

Để đơn giản ta xét thí dụ bài toán đàm chịu uốn như hình 4.9.

Như đã biết trong sức bền vật liệu, phương trình vi phân chủ đạo của bài toán này theo chuyển vị $v(x)$ là:

$$EJ \frac{d^4v}{dx^4} - q = 0 \quad (\text{với } 0 < x < l) \quad (4.18)$$

Và điều kiện biên

$$\begin{cases} v(0) = v'(0) = 0 \\ v(l) = v'(l) = 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

Từ (4.18), ta có: $\frac{d^4v}{dx^4} = \frac{q}{EJ}$

Tích phân lên, cuối cùng ta được:

$$v(x) = \frac{q}{24} \left(\frac{x^4}{EJ} + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4 \right)$$

Các hằng số tích phân C_1, C_2, C_3, C_4 được xác định từ điều kiện biên (4.19) và là:

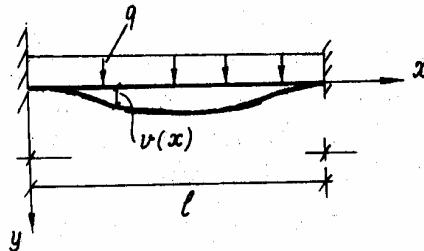
$$C_1 = -\frac{1}{12}, \quad C_2 = \frac{1}{24}, \quad C_3 = C_4 = 0$$

Vậy: Nghiệm của bài toán theo chuyển vị.

$$v(x) = \frac{q}{24EJ} (x^4 - 2lx^3 + l^2x^2) \quad (4.20)$$

Dựa vào quan hệ vi phân giữa momen uốn M và đạo hàm của $v(x)$ ta tìm được biểu thức momen uốn.

$$M(x) = -EJ \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{q}{12} (6x^2 - 6lx + l^2)$$



Hình 4.9

Chương 4. Cơ sở phương pháp phân tử hữu hạn

Độ vông lớn nhất tại giữa nhịp ($x = l/2$) dễ thấy là:

$$v_{\max} = v \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{ql^4}{384EJ}$$

2. Các phương pháp biến phân:

Nhìn chung, các phương trình vi phân chủ đạo của nhiều bài toán cơ và kỹ thuật có thể biểu diễn ở dạng tổng quát: (Bài toán trị biên – Boundary value problem)

$$\begin{cases} L(u) + g = 0 \text{ trong miền } V \\ C(u) = p \end{cases} \quad (4.21)$$

$$\begin{cases} C(u) = p \\ \text{trên biên } S \end{cases} \quad (4.22)$$

trong đó: L, C là các toán tử vi phân.

$u = u(x, y)$ là hàm của các biến độc lập (tọa độ điểm x, y) và là đại lượng cần tìm.

$\begin{cases} g = g(x, y) \\ p = p(x, y) \end{cases}$ là các hàm của biến độc lập và đã cho trước.

Khi đó một hàm $u = u(x, y)$ là nghiệm của bài toán nếu nó làm thỏa mãn phương trình (4.21) tại mọi điểm thuộc miền V và thỏa mãn (4.22) tại mọi điểm thuộc phần biên S .

Các phương pháp biến phân là các phương pháp gần đúng mà mục tiêu là nhằm tới việc tìm một nghiệm xấp xỉ gần đúng dựa trên một "tiêu chuẩn" nào đó được phát biểu trong dạng một biểu thức tích phân xác định lấy với toàn miền khảo sát V .

Các phương pháp biến phân thường gặp là: phương pháp biến phân Ritz, phương pháp Galerkin, phương pháp bình phương tối thiểu,

(a) Phương pháp Ritz:

Trong nhiều bài toán trị biên, người ta có thể chứng minh được sự tồn tại của một phiếm hàm I dạng.

$$I = \int_V F(x, y, u, u'_x, u''_{xx}, u'_y, u''_{yy}, \dots) dx dy \quad (4.23)$$

mà từ điều kiện dừng của phiếm hàm này sẽ cho phương trình vi phân (hoặc đạo hàm riêng) chủ đạo của bài toán. Nói cách khác.

Từ điều kiện $\delta I = 0$ sẽ dẫn ra được phương trình (1.21) : $L(u) + g = 0$

(Ví dụ: phiếm hàm thế năng toàn phần \prod của một hệ đàn hồi trong bài toán cơ kết cấu

Và từ điều kiện $\delta \prod = \delta(U - A) = 0$ sẽ dẫn ra được phương trình vi phân cân bằng. Ta sẽ bàn kỹ sau)

Khi đó, phương pháp Ritz nhằm vào mục tiêu tìm nghiệm xấp xỉ gần đúng trong dạng một tổ hợp tuyến tính các hàm xấp xỉ (approximation functions) như sau:

N

$$u(x, y) \approx u_N = \varphi_0(x, y) + \sum C_i \varphi_i(x, y) \quad (4.24)$$

Chương 4. Cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn

thuần nhất (essential boundary condition)

Trường hợp các điều kiện biên này là thuần nhất thì chọn $\varphi_0 = 0$

+ $\varphi_i(x,y)$ là các hàm thỏa mãn 3 điều kiện sau:

- φ_i phải đủ khả vi như đòi hỏi trong phiến hàm I.
- phải thỏa mãn các điều kiện biên cần thiết dạng thuần nhất.
- với N nào đó thì tập hợp $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ là độc lập tuyến tính và đầy đủ.

(Các yêu cầu này bảo đảm sự hội tụ của nghiệm Ritz (u_N) đến nghiệm chính xác)

+ C_i : là các tham số sẽ được xác định từ điều kiện dừng của phiến hàm I.
Cụ thể: Sau khi thay u_N vào $I(u)$ và thực hiện tích phân, thì I là hàm của các tham số C_i hay:

$$I = I(C_1, C_2 \dots C_n)$$

Điều kiện: $\delta I = 0$ sẽ trở thành

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial I}{\partial C_1} = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial C_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial I}{\partial C_N} = 0 \end{array} \right. \quad (4.25)$$

Kết quả, ta nhận được một hệ phương trình đại số. Giải hệ phương trình này, ra C_i ($i = 1, 2, \dots N$) và như vậy, tìm được nghiệm xấp xỉ.

$$u_N = \varphi_0 + \sum_{i=1}^N C_i \varphi_i$$

(b) Các phương pháp phần dư có trọng số (Weighted Residual Method)

• Vì không phải bài toán trị biên nào có phương trình vi phân chủ đạo như (4.21) cũng có thể tồn tại một phiến hàm để sử dụng phương pháp Ritz nên người ta đưa ra những phương pháp khác.

• Gọi: $R(u) = L(u) + g$ (4.26)

là hàm phần dư (residual function).

Hiển nhiên nếu u là nghiệm của bài toán thì $R(u) = 0$

Nhưng, cũng như trong phương pháp Ritz, nếu chọn một nghiệm gần đúng dạng (1.24)

$$u_N = \varphi_0 + \sum C_i \varphi_i \quad (4.27)$$

trong đó: φ_0 : chọn sao cho thỏa mãn tất cả các điều kiện biên khác không ($\varphi_0 = 0$ nếu các điều kiện biên là thuần nhất)

Chương 4. Cơ sở phương pháp phân tử hữu hạn

φ_i phải $\begin{cases} - \text{đủ khả vi như yêu cầu của toán tử vi phân } L \\ - \text{thỏa mãn các điều kiện biên dạng thuận nhất} \\ - \text{tập hợp } \{\varphi_i\}_{i=1}^N \text{ là độc lập tuyến tính và đầy đủ (complete)} \end{cases}$

thì rõ ràng $R(u_N) = L(u_N) + g \neq 0$

và $R(u_N) = R(x, y, C_1, C_2, \dots, C_N)$: tức là R là hàm của các biến số độc lập x, y và các tham số C_i ngay khi φ_0 và φ_i được chọn.

- Các tham số C_i được xác định sao cho tích phân phần dư có trọng số (weighted residual) trên toàn miền là bằng 0, tức là:

$$\int_V \psi_i R(u_N) dx dy = 0 \quad \text{với } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (4.28)$$

trong đó: $\psi_i = \psi_i(x, y)$ là các hàm trọng số (weighted function)

Hiển nhiên tập hợp $\{\psi\}_{i=1}^N$ là độc lập tuyến tính và đầy đủ và nói chung $\{\psi\} \neq \{\varphi\}$.

(Điều kiện (1.28) cũng có thể viết ở dạng khác, tổng quát hơn

$$w_{(u_N)} = \int_V \{\psi_i\}_i^T R(u_N) dx dy = \sum_{i=1}^N \int_V \psi_i R(u_N) dx dy = 0$$

Thay u_N từ (4.27) vào (4.28):

$$\begin{aligned} \int_V \psi_i R(u_N) dx dy &= \int_V \psi_i [L(u_N) + g] dx dy = \\ &= \int_V \left[\sum_{j=1}^N C_j \psi_i L(\varphi_j) + \psi_i (L(\varphi_0) + g) \right] dx dy \\ &= \sum_{j=1}^N C_j \left(\int_V \psi_i L(\varphi_j) dx dy \right) + \left[\left(\int_V \psi_i (L(\varphi_0) + g) dx dy \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Nếu đặt: } L_{ij} = \int_V \psi_i L(\varphi_j) dx dy, \quad g_i = \int_V \psi_i [L(\varphi_0) + g] dx dy$$

Kết quả ta nhận được một hệ phương trình đại số:

$$\sum_{j=1}^N L_{ij} C_j + g_i = 0 \quad (\text{với } i = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (4.29)$$

Hay ở dạng ma trận: $[L] \{C\} + \{g\} = \{0\}$

Giải hệ phương trình trên ta được các C_i ($i = 1, 2, \dots, N$).

Cuối cùng $u_N = \varphi_0 + \sum C_i \varphi_i$ xác định và là nghiệm gần đúng.

Chương 4. Cơ sở phương pháp phân tử hữu hạn

Với những cách chọn ψ_i khác nhau ta có các phương pháp dư có trọng khác nhau:

(+) *Phương pháp Galerkin*: là phương pháp dư có trọng khi ta lấy $\psi_i = \varphi_i$

Khi đó: nghiệm xấp xỉ dạng: $u_N = \varphi_0 + \sum_{i=1}^N C_i \varphi_i$ và các C_i được xác định từ điều kiện:

$$\int_V \varphi_i R(u_N) dx dy = 0 \quad (\text{với } i = 1, 2, 3, \dots, N)$$

và được tìm thấy từ hệ phương trình đại số.

$$\sum_{j=1}^N L_{ij} C_j + g_i = 0 \quad (\text{với } i = 1, 2, 3, \dots, N)$$

$$\text{trong đó } L_{ij} = \int_V \varphi_i L(\varphi_j) dx dy, \quad g_i = \int_V \varphi_i [L(\varphi_0) + g] dx dy \quad (4.30)$$

(c) *Phương pháp bình phương tối thiểu*:

Cũng như trên: tìm u_N dạng $u_N = \varphi_0 + \sum_{i=1}^N C_i \varphi_i$, nhưng các C_i được xác định từ điều kiện cực tiểu của tích phân phân dư $R(u_N)$ trên toàn miền V tức là từ điều kiện:

$$\frac{\partial}{\partial C_i} \int_V R^2(u_N) dx dy = 0 \quad (\text{với } i = 1, 2, 3, \dots, N)$$

$$\text{hay: } \int_V \frac{\partial R}{\partial C_i} R(u_N) dx dy = 0 \quad (\text{với } i = 1, 2, 3, \dots, N)$$

So với phương pháp Galerkin thì xem ra ở phương pháp này, các hàm trọng số

$$\psi_i = \frac{\partial R}{\partial C_i}$$

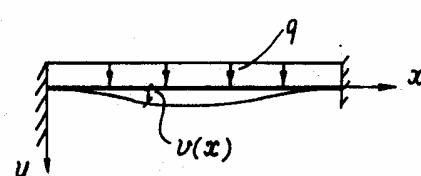
Thí dụ: Tìm hàm độ vông của đầm chịu uốn ở mục 1 theo phương pháp Galerkin (hình 4.10).

Từ phương trình vi phân chủ đạo đã có:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} - \frac{q}{EJ} = 0 \quad (0 < x < l) \quad (4.31)$$

với điều kiện biên (4.19)

Theo phương pháp Galerkin, ta sẽ tìm hàm độ vông $v(x)$ trong dạng gần đúng.



Hình 4.10

Chương 4. Cơ sở phương pháp phân tử hữu hạn

$$v_N(x) = v_0 + \sum_{i=1}^N C_i v_i$$

Ở đây, C_i ($i = 1, 2, 3 \dots N$) là các tham số.

Trong đó ta chọn trước: $v_0(x) = 0$

$$v_i(x) = 1 - \cos \frac{2\pi i}{l} x = 1 - \cos \alpha_i x$$

với $\alpha_i = \frac{2\pi i}{l}$ ($i = 1, 2, 3, \dots N$)

Rõ ràng các hàm v_i thỏa mãn điều kiện biên (4.19).

Trong bài toán này dễ thấy rằng các toán tử vi phân có dạng:

$$L = \frac{d^4}{dx^4} \quad \text{và} \quad g = -\frac{q}{EJ}$$

Còn hàm dư $R(v_N) = L(v_N) + g$

$$R(v_N) = \sum_{i=1}^N C_i \frac{d^4 v_i}{dx^4} - \frac{q}{EJ} \neq 0$$

Các tham số C_i được xác định từ điều kiện,

$$\int_1 v_i R(v_N) dx = 0 \quad (\text{với } i = 1, 2, 3 \dots N)$$

Hay ta có hệ phương trình đại số:

$$\sum_{j=1}^N L_{ij} C_j + g_i = 0 \quad (\text{với } i = 1, 2, 3 \dots N)$$

Áp dụng (4.30), ta xác định được các hệ số L_{ij} và số hạng tự do g_i

$$L_{ij} = \int_0^1 v_i L(v_j) dx = \int_0^1 v_i \frac{d^4 v_j}{dx^4} dx = - \int_0^1 (1 - \cos \alpha_i x) \alpha_j^4 \cos \alpha_j x dx$$

$$\text{Để thấy là: } L_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{với } i \neq j \\ \frac{l \alpha_i^4}{2} & \text{với } i = j \end{cases} \quad (\text{với } i = 1, 2, 3 \dots N)$$

$$g_i = \int_0^1 v_i [L(v_0) + g] dx = -\frac{q}{EJ} \int_0^1 (1 - \cos \alpha_i x) dx = -\frac{ql}{EJ} \quad (\text{với } i = 1, 2, 3 \dots N)$$

Thay vào hệ phương trình trên ta có hệ phương trình:

Chương 4. Cơ sở phương pháp phân tử hữu hạn

$$\frac{l\alpha_i^4}{2} C_i - \frac{q l}{EJ} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots N)$$

Hay từ đó dễ dàng tìm được C_i :

$$C_i = \frac{2q}{\alpha_i^4 EJ} = \frac{1}{8i^4 \Pi^4} \cdot \frac{ql^4}{EJ} \quad (i = 1, 2, \dots N)$$

Hàm độ vông $v(x)$ là:

$$v(x) \approx v_N(x) = \frac{ql^4}{EJ} \cdot \frac{1}{8\Pi^4} \sum_{i=1}^N \frac{1}{i^4} \left(1 - \cos \frac{2\Pi i}{l} x \right)$$

Nếu chỉ lấy một số hạng đầu tiên ($N = 1$) ta có hàm độ vông.

$$v(x) = \frac{ql^4}{EJ} \cdot \frac{1}{8\Pi^4} \left(1 - \cos \frac{2\Pi}{l} x \right)$$

Giá trị độ vông lớn nhất ở giữa đầm (tại $x = l/2$) là:

$$v_{max} = v \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{ql^4}{4EJ\Pi^4} = \frac{1}{389,6} \cdot \frac{ql^4}{EJ}$$

So sánh giá trị v_{max} nhận được từ phương pháp tích phân trực tiếp, ta thấy kết quả này khá chính xác (chênh 1,4% so với giá trị chính xác).

3. Phương pháp sai phân hữu hạn:

Là một trong các phương pháp số để giải các phương trình vi phân mà tư tưởng chủ đạo của phương pháp là biểu diễn gần đúng đạo hàm bằng phép sai phân để thay thế các phương trình vi phân bằng một hệ thống các phương trình sai phân. Kết quả là thay vì cần "tích phân" các phương trình vi phân, người ta chỉ cần giải hệ thống các phương trình đại số.

Muốn vậy trước hết cần tìm cách biểu diễn gần đúng các đạo hàm các cấp theo giá trị hàm tại một số điểm định trước như sau.

Giả sử, trong bài toán một chiều, $f = f(x)$ là một hàm đã cho, xác định trong khoảng $[a, b]$. Khai triển Taylor của nó tại lân cận điểm x nào đó là:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + \frac{df}{dx} \Big|_x \Delta x + \frac{d^2f}{dx^2} \Big|_x \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{d^3f}{dx^3} \Big|_x \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \frac{d^4f}{dx^4} \Big|_x \frac{(\Delta x)^4}{4!} \quad (a)$$

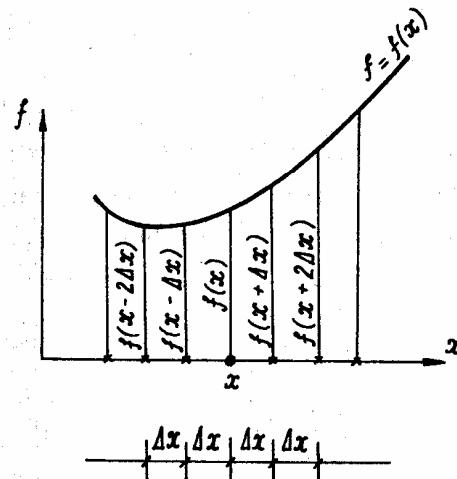
$$f(x - \Delta x) \approx f(x) - \frac{df}{dx} \Big|_x \Delta x + \frac{d^2f}{dx^2} \Big|_x \frac{(\Delta x)^2}{2!} - \frac{d^3f}{dx^3} \Big|_x \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \frac{d^4f}{dx^4} \Big|_x \frac{(\Delta x)^4}{4!} \quad (b)$$

Lấy (a) - (b) và chỉ xét 3 số hạng đầu, ta có:

$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) \approx 2 \frac{df}{dx} \Big|_x \cdot \Delta x$$

Chương 4. Cơ sở phương pháp phân tử hữu hạn

hay: $\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$ (c)



Hình 4.11

Lấy (a) + (b), ta có:

$$f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) = 2f(x) + \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_x \cdot \Delta x^2$$

hay: $\frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_x \approx \frac{f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) - 2f(x)}{\Delta x^2}$ (d)

Vậy (c) và (d) cho ta khả năng tính gần đúng đạo hàm cấp 1 và 2 theo giá trị của hàm tại những điểm lân cận. Hay cho ta khả năng thay thế phép tính đạo hàm bằng phép tính sai phân. Nay giờ, nếu xem phép sai phân (d) như một toán tử thì hoàn toàn có thể biểu diễn gần đúng được đạo hàm cấp 4 của f tại x bằng cách thay thế $\frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_x$ vào vị trí của f trong (d). Cụ thể là:

$$\frac{d^4 f}{dx^4} \Big|_x = \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right) \Big|_x = \frac{\left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right) \Big|_{x+\Delta x} + \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right) \Big|_{x-\Delta x} - 2 \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right) \Big|_x}{\Delta x^2}$$

Tiếp tục thay (d) vào, ta được:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 f}{dx^4} \Big|_x &= \frac{1}{\Delta x^2} \left\{ \left[\frac{f(x + 2\Delta x) + f(x) - 2f(x + \Delta x)}{\Delta x^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{f(x) + f(x - 2\Delta x) - 2f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \right] - 2 \left[\frac{f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) - 2f(x)}{\Delta x^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

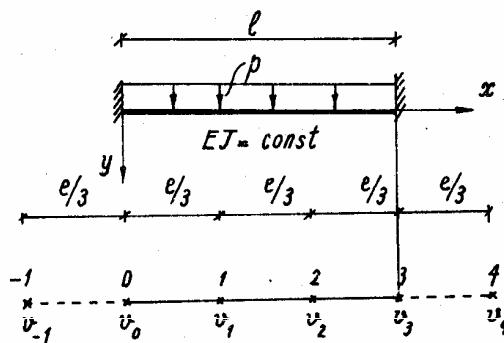
Vậy, sau khi thu gọn, ta có:

Chương 4. Cơ sở phương pháp phân tử hữu hạn

$$\frac{d^4 f}{dx^4} \Big|_x = \frac{1}{\Delta x^4} \left\{ 6f(x) - 4[f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x)] + f(x + 2\Delta x) + f(x - 2\Delta x) \right\} \quad (e)$$

Vậy nếu khoảng xác định $[a, b]$ được chia đều thành một số hữu hạn các đoạn nhỏ nhau Δx bởi các điểm chia cách đều nhau thì ta có một “lưới sai phân”. Các điểm chia được gọi là các “nút” của lưới sai phân (hình vẽ). Khi đó các biểu thức (c), (d), (e) cho phép biểu diễn gần đúng đạo hàm các cấp (tất nhiên hoàn toàn làm được như cách trên) tại một điểm nút của lưới sai phân theo giá trị của hàm tại các điểm nút xung quanh. Bằng cách biểu diễn các đạo hàm như vậy, ta có thể thay thế phương trình vi phân đã cho bằng một hệ các phương trình sai phân viết cho tất cả các điểm “nút trong” của lưới. Giải hệ phương trình đại số này ta tìm được giá trị của hàm cần tìm tại các điểm nút.

Ví dụ như với bài toán trên là: Tìm nghiệm của phương trình vi phân.



Hình 4.12

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{p}{EJ} \text{ với } 0 < x < l \quad (f)$$

$$\text{với các điều kiện biên: } v \Big|_{x=0} = v \Big|_{x=l} = 0 \quad (g)$$

$$\frac{dv}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{dv}{dx} \Big|_{x=l} = 0$$

+ Chia lưới sai phân như hình 1.12 ($\Delta x = 1/3$)

Các “nút trong”: 1; 2

Các “nút biên”: 0; 3

Các “nút ngoài”: -1; 4

Giá trị hàm v của các “nút biên” và “nút ngoài” sẽ tìm được dựa vào các điều kiện biên (g).

Giá trị hàm v của các “nút trong” sẽ có được từ việc giải hệ phương trình sai phân viết cho tất cả các nút trong.

Cụ thể: Viết phương trình sai phân tại các nút trong 1 và 2, bằng cách sử dụng (d):

Chương 4. Cơ sở phương pháp phân tử hữu hạn

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tại nút 1: } \frac{1}{\Delta x^4} (6v_1 - 4v_0 - 4v_2 + v_1 + v_3) = \frac{p}{EJ} \\ \text{Tại nút 2: } \frac{1}{\Delta x^4} (6v_2 - 4v_1 - 4v_3 + v_0 + v_4) = \frac{p}{EJ} \end{array} \right\} \quad (h)$$

(h) là hệ phương trình vi phân thay thế phương trình vi phân (f) đã cho:

$$\text{Từ điều kiện biên (g), có: } v_0 = v_3 = 0 \quad (i)$$

Để tìm giá trị v_{-1}, v_4 (các nút ngoài): sử dụng tiếp điều kiện biên về góc xoay, tức là sử dụng (c).

$$\text{Tại nút 0: } \frac{dv}{dx} \Big|_0 = \frac{v_1 - v_{-1}}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow v_{-1} = v_1$$

$$\text{Tại nút 3, tương tự có: } \frac{dv}{dx} \Big|_3 = \frac{v_4 - v_2}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow v_4 = v_2 \quad (k)$$

Thay v_0, v_3, v_{-1}, v_4 vào (h) ta nhận được :

$$\left\{ \begin{array}{l} 7v_1 - 4v_2 = \frac{p}{EJ} \cdot \Delta x^4 \\ -4v_1 + 7v_2 = \frac{p}{EJ} \cdot \Delta x^4 \end{array} \right.$$

$$\text{Giải hệ phương trình này ta được: } v_1 = v_2 = \frac{1}{3} \Delta x^4 \frac{p}{EJ} = \frac{1}{3} \frac{pl^4}{EJ} \quad (l)$$

Vậy (i), (k), (l) cho ta kết quả là chuyển vị tại các nút của lưới.

Muốn tìm nội lực, ví dụ momen uốn tại các nút lưới thì sử dụng (d):

$$\text{và biểu thức } M(x) = -EJ \frac{d^2v}{dx^2}$$

Momen uốn tại 1 điểm nút, ví dụ tại nút 0 sẽ là:

$$M_0 = -EJ \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)_0 = -EJ \left(\frac{v_1 + v_{-1} - 2v_0}{\Delta x^2} \right) = \frac{-EJ}{\Delta x^2} 2v_1 = -\frac{2}{27} pl^2$$

(chênh 11% so với kết quả chính xác)

So sánh với kết quả phương pháp chính xác (tích phân trực tiếp).

Chương 4. Cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn

4.3. CÁC NGUYÊN LÝ NĂNG LUỢNG (CÁC NGUYÊN LÝ BIẾN PHÂN)

1. Nguyên lý thế năng toàn phần dừng hay nguyên lý biến phân về chuyển vị.

Thế năng toàn phần của một hệ đàn hồi Π được xác định là:

$$\Pi = U - A$$

trong đó: U - thế năng biến dạng của vật thể đàn hồi tích lũy trong quá trình biến dạng.

A- công của ngoại lực sinh ra trên các chuyển dời của ngoại lực do vật thể bị biến dạng.

Nội dung nguyên lý: Trong tất cả các trường chuyển vị (trạng thái chuyển vị) khả dĩ động (tức thỏa mãn các điều kiện tương thích và điều kiện biên động học) thì trường chuyển vị thực (tức trường chuyển vị tương ứng với sự cân bằng của vật thể) sẽ làm cho thế năng toàn phần Π đạt giá trị dừng.

Hay, khi vật thể cân bằng thì thế năng toàn phần Π đạt giá trị dừng.

Tức là: Nếu Π được biểu diễn theo chuyển vị $\{u\} = \{u, v, w\}^T$ thì vật thể cân bằng khi

$$\delta\Pi(\{u\}) = \delta U(\{u\}) - \delta A(\{u\}) = 0$$

Cụ thể hơn, như trong giáo trình sức bền vật liệu đã biết:

Thế năng biến dạng đàn hồi U được tính bởi công thức:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dv \quad \text{hay} \quad U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV$$

$$\text{Trường hợp có biến dạng ban đầu: } U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [D]\{\varepsilon\} dV - \int_V \{\varepsilon\}^T [D]\{\varepsilon_0\} dV$$

Còn công A của ngoại lực (gồm lực khói $\{g\}$, lực mặt $\{p\}$) trên các chuyển dời $\{u\}$ là

$$A = \int_V \{u\}^T \{g\} dV + \int_{S_t} \{u\}^T \{p\} dS$$

Và thế năng toàn phần Π viết ở dạng ma trận là:

$$\Pi(\{u\}) = U - A = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [D](\{\varepsilon\} - 2\{\varepsilon_0\}) dv - \int_V \{u\}^T \{g\} dv - \int_{S_t} \{u\}^T \cdot \{p\} dS$$

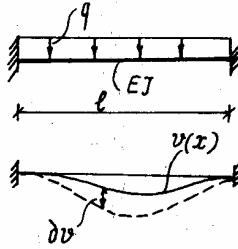
Theo nguyên lý này trường chuyển vị $\{u\}$ thỏa mãn các điều kiện biên và làm Π đạt giá trị dừng sẽ chính là trường chuyển vị thực và làm thỏa mãn các phương trình cân bằng.

Nếu dùng nguyên lý này để xây dựng phương trình phần tử hữu hạn, thì ta giả thiết một dạng đơn giản của chuyển vị trong mỗi phần tử và từ điều kiện dừng của phiếm hàm Π ta sẽ nhận được một hệ phương trình (xấp xỉ) cân bằng trong khi các điều kiện liên tục đã được thỏa mãn.

Chương 4. Cơ sở phương pháp phân tử hữu hạn

Hay có thể nói rằng nguyên lý này cho các phương trình cân bằng.

Thí dụ: Vẫn xét đàm chịu tải trọng phân bố đều (hình 4.13). Ta sẽ chứng minh rằng nguyên lý Lagrange sẽ cho phương trình cân bằng được viết theo chuyển vị.



Hình 4.13

Theo SBVL và cơ học kết cấu, đã biết thế năng biến dạng U của đàm chịu uốn là:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EJ} dx \quad \text{và} \quad M = -EJ \frac{d^2v}{dx^2} \quad \text{Vậy: } U = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2v}{dx} \right)^2 dx$$

$$A = \int_0^l qv dx$$

$$\text{Ta có, thế năng toàn phần } \Pi = U - A = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2v}{dx} \right)^2 dx - \int_0^l qv dx$$

Theo nguyên lý thế năng toàn phần dừng: $v(x)$ sẽ là thực nếu $\delta\Pi = \delta U - \delta A = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Mà: } \delta U &= \frac{EJ}{2} \int_0^l 2 \frac{d^2v}{dx^2} \cdot \delta \frac{d^2v}{dx^2} dx = EJ \int_0^l \frac{d^2v}{dx^2} \cdot \frac{d^2\delta v}{dx^2} dx \\ &= EJ \left[\frac{d^2v}{dx^2} \cdot \frac{d\delta v}{dx} \Big|_0^1 - \int_0^l \frac{d\delta v}{dx} \cdot \frac{d^3v}{dx^3} dx \right] \\ &= EJ \left[\frac{d^2v}{dx^2} \cdot \frac{d\delta v}{dx} \Big|_0^1 - \frac{d^3v}{dx^3} \cdot \delta v \Big|_0^1 + \int_0^l \frac{d^4v}{dx^4} \cdot \delta v dx \right] \end{aligned}$$

$$\text{và } \delta A = \int_0^l q\delta v dx$$

$$\text{Hay: } \delta\Pi = \int_0^l \left(EJ \frac{d^4v}{dx^4} - q \right) \delta v dx + \left[EJ \frac{d^2v}{dx^2} \cdot \frac{d\delta v}{dx} \Big|_0^1 - EJ \frac{d^3v}{dx^3} \cdot \delta v \Big|_0^1 \right]$$

Tuy nhiên theo điều kiện biên bài toán, chuyển vị góc xoay tại $x = 0$ và $x = l$ là đã cho trước và bằng 0 nên ta cũng có.

$$\delta v = \frac{d\delta v}{dx} = 0 \quad \text{tại } x = 0 \text{ và } x = l$$

Chương 4. Cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn

Vậy: $\delta\Pi = \int_0^l \left(EJ \frac{d^4v}{dx^4} - q \right) \delta v dx = 0$

Để thỏa mãn với mọi $\delta v \neq 0$, ta có: $EJ \frac{d^4v}{dx^4} - q = 0$

Đây chính là phương trình cân bằng của đàm chịu uốn được viết theo chuyển vị.

- Áp dụng nguyên lý, tìm nghiệm giải tích gần đúng (phương pháp Rayleigh). Nội dung phương pháp Rayleigh: Chọn nghiệm gần đúng trong dạng nào đó thỏa mãn điều kiện biên để giải bài toán đàm chịu uốn như hình 4.14.

Ví dụ: Chọn $v(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5x^4$ (a)

(với $0 \leq x \leq l$)

$v(x)$ trước hết cần là khả dĩ động, tức thỏa mãn các điều kiện biên và liên tục như sau:

$$v \Big|_{x=0} = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$\frac{dv}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} v \Big|_{x=l} = 0 \rightarrow C_3l^2 + C_4l^3 + C_5l^4 = 0 \\ \frac{dv}{dx} \Big|_{x=l} = 0 \rightarrow 2C_3l + 3C_4l^2 + 4C_5l^3 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} C_3 = C_5l^2 \\ C_4 = -2C_5l \end{array} \quad (b)$$

Thay (b) vào (a) ta được: $v(x) = C_5(x^4 - 2lx^3 + l^2x^2)$

Vậy: $\frac{d^2v}{dx^2} = C_5(12x^2 - 12lx + 2l^2) = 2C_5(6x^2 - 6x + l^2)$

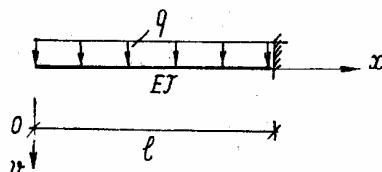
Tính $\Pi = U - A = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^l qv dx$

$$= \frac{EJ}{2} \int_0^l 4C_5^2(6x^2 - 6x + l^2)^2 dx - q \int_0^l C_5(x^4 - 2lx^3 + l^2x^2) dx$$

Thực hiện tích phân, với chú ý là C_5 là một tham số, ta nhận được biểu thức thế năng là hàm của thông số C_5 như sau:

$$\Pi(C_5) = \frac{2}{5} EJl^5 C_5^2 - \frac{1}{30} ql^5 C_5$$

Từ điều kiện



Hình 4.14

Chương 4. Cơ sở phương pháp phân tử hữu hạn

$$\delta \Pi = 0 \sim \frac{\partial \Pi}{\partial C_5} = 0$$

Ta nhận được phương trình đại số sau:

$$\frac{4}{5} E\pi^5 C_5 - \frac{1}{30} ql^5 = 0 \rightarrow C_5 = \frac{1}{24} \frac{q}{EJ}$$

$$\text{Vậy } v(x) = \frac{1}{24} \frac{q}{EJ} (x^4 - 2lx^3 + l^2x^2)$$

(Trùng với kết quả chính xác nhận được từ phương pháp tích phân trực tiếp đã có ở trên)

- *Phương pháp Ritz - Rayleigh:* Theo phương pháp này hàm chuyển vị $v(x)$ được biểu diễn gần đúng như tổ hợp tuyến tính của các hàm $v_i(x)$ thỏa mãn điều kiện biên động học của bài toán.

$$v(x) = \sum_{i=1}^n C_i v_i(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x) + \dots + C_n v_n(x).$$

trong đó: $v_i(x)$ là các hàm khả dĩ động, tức liên tục và thỏa mãn điều kiện biên động học của bài toán và được chọn trước.

C_i là các tham số sẽ được xác định từ điều kiện cực trị của thế năng toàn phần Π . Sau khi thay $v(x)$ vào biểu thức thế năng toàn phần Π ta được một Π chỉ phụ thuộc các tham số C_i nghĩa là $\Pi(C_1, C_2, \dots, C_n)$.

Từ điều kiện cực trị của Π : $\delta \Pi = 0 \rightarrow$ ta có một hệ n phương trình

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial C_1} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial C_2} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial C_n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Giải hệ phương trình ta được các } C_i \Rightarrow \text{vậy } v(x) \text{ là xác định}$$

Thí dụ: Trở lại bài toán đầm chịu uốn ở bài 1.2. Nay tìm nghiệm gần đúng theo phương pháp Ritz.

$$\text{Xem gần đúng } v(x) = \sum_{i=1}^n C_i \left(1 - \cos \frac{2i\Pi}{l} x \right)$$

trong đó: C_i là các tham số.

Các hàm chọn trước: $v_i = \left(1 - \cos \frac{2i\Pi}{l} x \right)$ rõ ràng thỏa mãn điều kiện biên:

$$\begin{cases} v_i = 0 & \text{tại } x = 0 \text{ và } x = l \\ \frac{dv_i}{dx} = 0 & \text{tại } x = 0 \text{ và } x = l \end{cases}$$

v_i là liên tục và khả vi trên đoạn $0 < x < l$

Chương 4. Cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn

Tính sẵn: $v_i(x) = (1 - \cos \alpha_i x)$ với $\alpha_i = \frac{2i\pi}{l}$

$$\frac{dv_i}{dx} = \alpha_i \sin \alpha_i x$$

Vậy: $\frac{d^2v_i}{dx^2} = \alpha_i^2 \cos \alpha_i x$ $\frac{d^2v}{dx^2} = \sum_{i=1}^n C_i \alpha_i^2 \cos \alpha_i x$

Tính $\Pi = U - A = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^l q v dx$

$$= \frac{EJ}{2} \int_0^l (\sum C_i \alpha_i^2 \cos \alpha_i x)^2 dx - q \int_0^l (\sum C_i (1 - \cos \alpha_i x)) dx =$$

Chỉ cần nhớ rằng $\int_0^l \cos \alpha_i x \cdot \cos \alpha_j x dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \neq j \\ \frac{l}{2} & \text{nếu } i = j \end{cases}$

Ta có: $\Pi = \frac{EJ}{2} \sum C_i^2 \alpha_i^4 \cdot \frac{1}{2} - q \sum C_i l = \frac{EJl}{4} \sum C_i^2 \alpha_i^4 - ql \sum C_i = \Pi(C_1, C_2, C_n)$

Theo nguyên lý Lagrange, $v(x)$ là thực, tức thỏa mãn điều kiện cân bằng khi và chỉ khi $\delta \Pi = 0$

Hay: $\delta \Pi = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial C_i} = 0$ (với $i = 1, 2, \dots, n$)

Vậy ta có: $\frac{EJl}{2} C_i \alpha_i^4 - ql = 0$ (với $i = 1, 2, \dots, n$)

Vậy $C_i = \frac{2q}{EJ \alpha_i^4} = \frac{2q}{EJ \frac{2^4 \cdot i^4 \cdot \pi^4}{l^4}} = \frac{ql^4}{EJ \cdot 8i^4 \pi^4}$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

Và $v(x) = \frac{ql^4}{8EJ\pi^4} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^4} \left(1 - \cos \frac{2i\pi}{l} x \right)$

Kết quả giống như khi áp dụng phương pháp Galerkin ở mục trên.

2) Nguyên lý cực tiểu của năng lượng bù toàn phần, (nguyên lý biến phân của ứng suất).

Năng lượng bù toàn phần của 1 vật thể đàn hồi Π^* được định nghĩa là:

$$\Pi^* = U^* - A^*$$

Trong đó:

Chương 4. Cơ sở phương pháp phân tử hữu hạn

U^* là năng lượng bù của biến dạng
- là phần diện tích gạch ngang ở hình 1.15.

Trường hợp đàn hồi tuyến tính.

$$U^* = U = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dv \quad (\text{là phiếm hàm})$$

của $\{\sigma\}$) hay nếu có biến dạng ban đầu $\{\varepsilon_0\}$:

$$U^* = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \left([C]\{\sigma\} + 2\{\varepsilon_0\} \right) dv$$

A^* : công bù của ngoại lực.

$$A^* = \int_{S_d} \{p\}^T \{u\} dS \text{ trong đó } S_d \text{ là phần biên đã biết chuyển vị } \{u\}$$

$$\text{và } \Pi^*(\sigma) = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T ([C]\{\sigma\} + 2\{\varepsilon_0\}) - \int_{S_d} \{p\}^T \{u\} dS$$

Nội dung nguyên lý cực trị của năng lượng bù toàn phần: Trong tất cả các trường ứng suất khả dĩ tĩnh (tức thỏa mãn các điều kiện cân bằng và điều kiện biên tĩnh học trên S_t) thì trường ứng suất thực (tương ứng thỏa mãn điều kiện tương thích) sẽ làm năng lượng bù toàn phần Π^* đạt giá trị dừng.

$$\delta\Pi^*(\{\sigma\}) = \sigma U^*(\{\sigma\}) - \sigma A^*(\{\sigma\}) = 0$$

Thí dụ: Xác định nội lực dầm như các bài toán trên.

Gọi phản lực và mômen phản lực tại A là V_A và M_A chưa biết. Nhưng rõ ràng hệ nội lực do nó và tải trọng q gây ra trong dầm là cân bằng thì có nghĩa là khả dĩ tĩnh.

Và khi đó ta có biểu thức nội lực: (Hình 4.16)

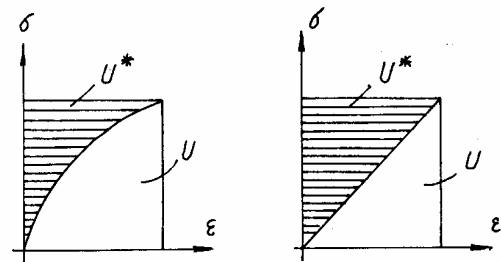
$$M(x) = V_A x - M_A - \frac{qx^2}{2}$$

Nhưng rõ ràng việc bỏ đi liên kết A sẽ không bảo đảm điều kiện tương thích (hay động học). Muốn bảo đảm điều kiện này (ví dụ: góc xoay và chuyển vị tại A là bằng không).

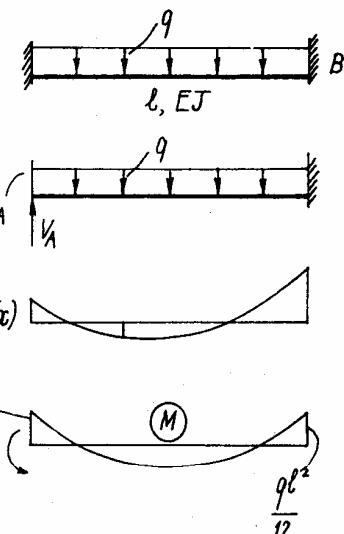
Nhưng nếu ta tìm được V_A và M_A sao cho Π^* cực trị thì đó là nghiệm và thỏa mãn điều kiện tương thích (liên tục) về biến dạng.

$$\Pi^* = U^* - A^*$$

Công bù của ngoại lực trên phần biên đã biết chuyển vị là A^*



Hình 4.15



Hình 4.16

Chương 4. Cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn

$$A^* = V_A \cdot 0 + M_A \cdot 0 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy: } \Pi^* = U^* &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2(x)}{EJ} dx = \frac{1}{2EJ} \int_0^l \left(V_{Ax} - M_A - \frac{qx^2}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2EJ} \left[\frac{V_A^2 l^3}{3} + M_A^2 l + \frac{q^2 l^5}{20} - V_A M_A l^2 - \frac{V_A q l^4}{4} + M_A \frac{q l^3}{3} \right]. \end{aligned}$$

Theo nguyên lý này:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi^*}{\partial V_A} = \frac{1}{2EJ} \left[\frac{2V_A l^3}{3} - M_A l^2 - \frac{ql^4}{4} \right] = 0 \\ \frac{\partial \Pi^*}{\partial M_A} = \frac{1}{2EJ} \left[2M_A l - V_A l^2 + \frac{ql^3}{3} \right] = 0 \end{cases}$$

Từ đó ta được:

$$\begin{cases} M_A = \frac{1}{12} ql^2 \\ V_A = \frac{ql}{2} \end{cases}$$

Nhận xét: Có thể viết lại 2 phương trình trên:

$$\begin{cases} \frac{l^3}{3EJ} V_A - \frac{l^2}{EJ} M_A - \frac{ql^4}{4EJ} = 0 \\ -\frac{l^2}{EJ} V_A + \frac{1}{EJ} M_A + \frac{ql^3}{3EJ} = 0 \end{cases}$$

hay $\begin{cases} \delta_{11} V_A + \delta_{12} M_A - \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21} V_A + \delta_{22} M_A - \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$

Đây chính là hệ phương trình chính tắc của phương pháp lực đã biết trong Giáo trình Cơ học kết cấu. Và 2 phương trình này là điều kiện tương thích của biến dạng, cụ thể, là điều kiện chuyển vị và góc xoay tại A phải bằng 0.

Chương 4. Cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn

4.4. Khái niệm về phương pháp phần tử hữu hạn.

Phương pháp phần tử hữu hạn (PP PTHH) là một phương pháp số đặc biệt có hiệu quả để tìm dạng gần đúng của một hàm chưa biết trong miền xác định V của nó. Tuy nhiên PP PTHH không tìm dạng xấp xỉ của hàm cần tìm trên toàn miền V mà chỉ trong từng miền con V_e (phần tử) thuộc miền xác định V . Do đó phương pháp này rất thích hợp với hàng loạt bài toán vật lý và kỹ thuật trong đó hàm cần tìm được xác định trên những miền phức tạp gồm nhiều vùng nhỏ có đặc tích hình học, vật lý khác nhau, chịu những điều kiện biên khác nhau. Phương pháp ra đời từ trực quan phân tích kết cấu, rồi được phát biểu một cách chắt chẽ và tổng quát như một phương pháp biến phân hay phương pháp dư có trọng số nhưng được xấp xỉ trên mỗi phần tử.

Trong PP PTHH miền V được chia thành một số hữu hạn các miền con, gọi là *phần tử*. Các phần tử này được nối kết với nhau tại *các điểm định trước* trên biên phần tử, gọi là *nút*. Trong phạm vi mỗi phần tử đại lượng cần tìm được lấy xấp xỉ trong dạng một hàm đơn giản được gọi là các *hàm xấp xỉ* (approximation function). Và các hàm xấp xỉ này được biểu diễn qua các giá trị của hàm (và có khi cả các giá trị của đạo hàm của nó) tại các điểm nút trên phần tử. Các giá trị này được gọi là *các bậc tự do của phần tử* và được xem là ẩn số cần tìm của bài toán.

Với bài toán cơ vật rắn biến dạng và cơ kết cấu *tùy theo ý nghĩa vật lý của hàm xấp xỉ*, người ta có thể phân tích bài toán theo ba loại mô hình sau:

1. Trong mô hình tương thích:

Người ta xem chuyển vị là đại lượng cần tìm trước và hàm xấp xỉ biểu diễn gần đúng dạng phân bố của chuyển vị trong phần tử. Các ẩn số được xác định từ hệ phương trình thiết lập trên cơ sở nguyên lý thế năng toàn phần dừng, hay nguyên lý biến phân Lagrange.

Chương 4. Cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn

2. Theo mô hình cân bằng:

Hàm xấp xỉ biểu diễn gần đúng dạng phân bố của ứng suất hay nội lực trong phần tử. Các ẩn số được xác định từ hệ phương trình thiết lập trên cơ sở nguyên lý năng lượng hệ toàn phần dừng hay nguyên lý biến phân về ứng suất (nguyên lý Castigliano).

3. Theo mô hình hỗn hợp:

Coi các đại lượng chuyển vị ứng suất là 2 yếu tố độc lập. Các hàm xấp xỉ biểu diễn gần đúng dạng phân bố của cả chuyển vị lẫn ứng suất trong phần tử. Các ẩn số được xác định từ hệ phương trình thiết lập trên cơ sở nguyên lý biến phân Reisner.

Sau khi tìm được các ẩn số bằng việc giải một hệ phương trình đại số vừa nhận được thì cũng có nghĩa là ta tìm được các xấp xỉ biểu diễn đại lượng cần tìm trong tất cả các phần tử. Và từ đó cũng tìm được các đại lượng còn lại.

Trong 3 mô hình trên, mô hình tương thích được sử dụng rộng rãi hơn cả. Và giáo trình này cũng chỉ trình bày PP PTHH theo mô hình tương thích.

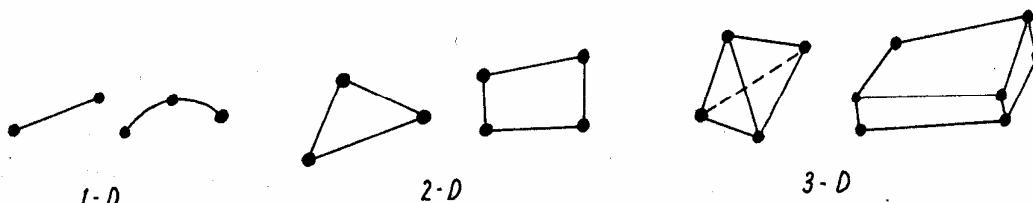
4.5. Trình tự phân tích bài toán theo phương pháp PTHH.

Bước 1: Rời rạc hóa miền khảo sát.

Trong bước này, miền khảo sát V được chia thành các miền con V_e hay thành các phần tử có dạng hình học thích hợp.

Với bài toán cụ thể số phần tử, hình dạng hình học của phần tử cũng như kích thước các phần tử phải được xác định rõ. Số điểm nút mỗi phần tử không lấy được 1 cách tùy tiện mà tùy thuộc vào hàm xấp xỉ định chọn.

Các phần tử thường có dạng hình học đơn giản. (Hình 4.17)



Hình 4.17 Dạng hình học đơn giản của các phần tử

Bước 2: Chọn hàm xấp xỉ thích hợp.

Vì đại lượng cần tìm là chưa biết, nên ta giả thiết dạng xấp xỉ của nó sao cho đơn giản đối với tính toán bằng máy tính nhưng phải thỏa mãn các tiêu chuẩn hội tụ (sẽ nói sau). Và thường chọn ở dạng đa thức.

Rồi biểu diễn hàm xấp xỉ theo tập hợp giá trị và có thể cả các đạo hàm của nó tại các nút của phần tử $\{q\}$.

Bước 3: Xây dựng phương trình phần tử, hay thiết lập ma trận độ cứng phần tử $[K]_e$ và vectơ tải phần tử $\{P\}_e$

Có nhiều cách thiết lập: trực tiếp, hoặc sử dụng nguyên lý biến phân, hoặc các phương pháp biến phân,...

Chương 4. Cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn

Kết quả nhận được có thể biểu diễn một cách hình thức như một phương trình phần tử: $[K]_e \{q\}_e = \{P\}_e$

Bước 4: Ghép nối các phần tử trên cơ sở mô hình tương thức mà kết quả là hệ thống phương trình.

$$[\bar{K}] \{\bar{q}\} = \{\bar{P}\}$$

Trong đó, có thể gọi:

$[K]$: ma trận độ cứng tổng thể (hay ma trận hệ số toàn miền)

$\{\bar{q}\}$: vectơ tập hợp các giá trị đại lượng cần tìm tại các nút (còn gọi là vectơ chuyển vị nút tổng thể)

$\{\bar{P}\}$: vectơ các số hạng tự do tổng thể (hay vectơ tải tổng thể)

Rồi sử dụng điều kiện biên của bài toán, mà kết quả là nhận được hệ phương trình sau:

$$[\bar{K}^*] \{\bar{q}^*\} = \{\bar{P}^*\}$$

Đây chính là *phương trình hệ thống* hay còn gọi là *hệ phương trình để giải*.

Bước 5: Giải *hệ phương trình đại số*.

$$[\bar{K}^*] \{\bar{q}^*\} = \{\bar{P}^*\}$$

Với bài toán tuyến tính việc giải *hệ phương trình đại số* là không khó khăn. Kết quả là tìm được các chuyển vị của các nút.

Nhưng với bài toán phi tuyến thì nghiệm sẽ đạt được sau 1 chuỗi các bước lặp mà sau mỗi bước ma trận cứng $[K]$ thay đổi (trong bài toán phi tuyến vật lý) hay vectơ lực nút $\{P\}$ thay đổi (trong bài toán phi tuyến hình học).

Bước 6: Hoàn thiện:

Từ kết quả ở trên, tiếp tục tìm ứng suất, chuyển vị hay biến dạng của tất cả các phần tử.

4.6. Hàm xấp xỉ – đa thức xấp xỉ – phép nội suy

1- Hàm xấp xỉ:

Một trong những tư tưởng cơ bản của PPPTHH là xấp xỉ hóa đại lượng cần tìm trong mỗi miền con – phần tử V_e . Điều này cho phép ta khả năng thay thế việc tìm nghiệm vốn phức tạp trên toàn miền V bằng việc tìm nghiệm trong phạm vi mỗi phần tử ở dạng hàm xấp xỉ đơn giản. Và vì vậy bước quan trọng đầu tiên cần nói đến là việc chọn hàm đơn giản mô tả gần đúng đại lượng cần tìm trong phạm vi mỗi phần tử. Hàm đơn giản này thường chọn ở dạng đa thức vì những lý do sau:

+ Đa thức khi được xem như một tổ hợp tuyến tính của các đơn thức thì tập hợp các đơn thức thỏa mãn yêu cầu độc lập tuyến tính như yêu cầu của Ritz, Galerkin

+ Hàm xấp xỉ dạng đa thức thường dễ tính toán, dễ thiết lập công thức khi xây dựng các phương trình của PPPTHH và tính toán bằng máy tính. Đặc biệt vì dễ đạo hàm, tích phân.

+ Có khả năng tăng độ chính xác bằng cách tăng số bậc của đa thức xấp xỉ (về mặt lý thuyết thì đa thức bậc vô cùng sẽ cho nghiệm chính xác). Tuy nhiên

Chương 4. Cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn

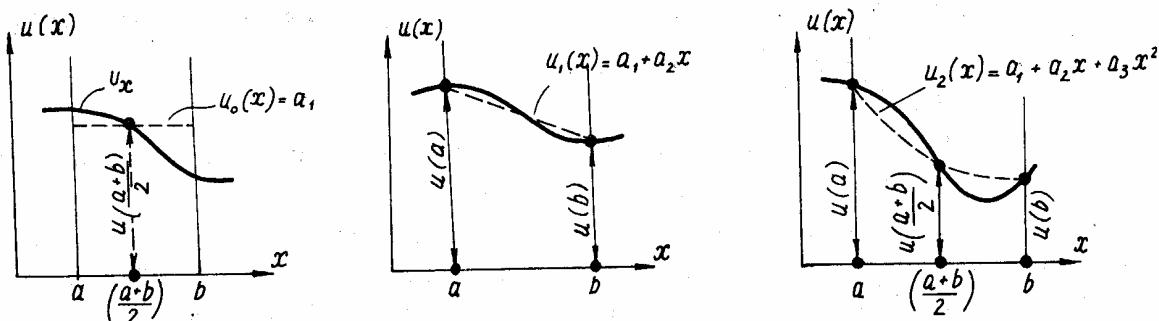
Trong thực tế ta cũng chỉ lấy các đa thức xấp xỉ bậc thấp mà thôi. Chú ý là các hàm xấp xỉ dạng hàm lượng giác cũng có tính chất và ưu điểm như trên nhưng ít dùng.

2. Phép nội suy:

Tuy nhiên, trong phương pháp PTHH các hệ số của hàm xấp xỉ dạng đa thức được biểu diễn qua chính các giá trị của nó (hoặc cả giá trị các đạo hàm) tại một điểm nút được định trước trên phần tử.

Nói cách khác là hàm xấp xỉ được nội suy theo các giá trị (hoặc cả các đạo hàm) của nó tại các nút phần tử. Kết quả là, trong phạm vi mỗi phần tử đại lượng cần tìm là hàm bất kỳ sẽ được xấp xỉ hóa bằng một đa thức nội suy qua các giá trị (hoặc cả các đạo hàm) của chính nó tại các điểm nút của phần tử.

Ví dụ: (Hình 4.18)



Nội suy (xấp xỉ) hằng số

$$(u)_x \approx u_0 = u \left(\frac{a+b}{2} \right)$$

Nội suy tuyến tính

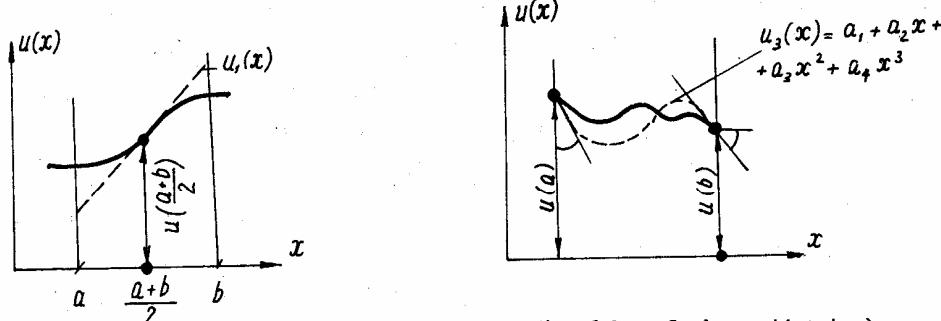
$$u(x) \approx u_1(x) = \frac{bu(a) - au(b)}{b-a} + \frac{u(b) - u(a)}{b-a} x$$

Nội suy bậc 2.

Trong các ví dụ trên các hàm bất kỳ được biểu diễn xấp xỉ bằng các đa thức bậc 0, bậc 1, bậc 2 theo giá trị (chỉ theo giá trị) của hàm tại các điểm định trước (điểm nút). Phép xấp xỉ này được gọi là phép nội suy Lagrange.

Nội suy Hecmit: Khác với phép nội suy Lagrange, nội suy Hecmit là phép xấp xỉ theo giá trị và cả đạo hàm từ bậc 1 đến bậc nào đó tại các điểm cơ sở.

Ví dụ: Hình 4.19



Hình 4.19

Xấp xỉ bậc 3 theo giá trị và
đạo hàm cấp 1 tại 2 điểm cơ sở.

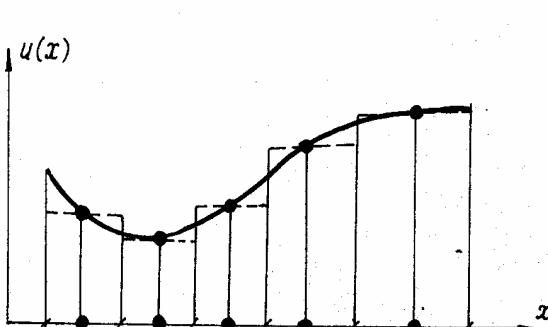
Bằng việc xấp xỉ hóa đại lượng cần tìm trong phạm vi mỗi phần tử thì trên toàn miền V khảo sát, đại lượng cần tìm cũng được biểu diễn gần đúng theo giá trị

Chương 4. Cơ sở phương pháp phân tử hữu hạn

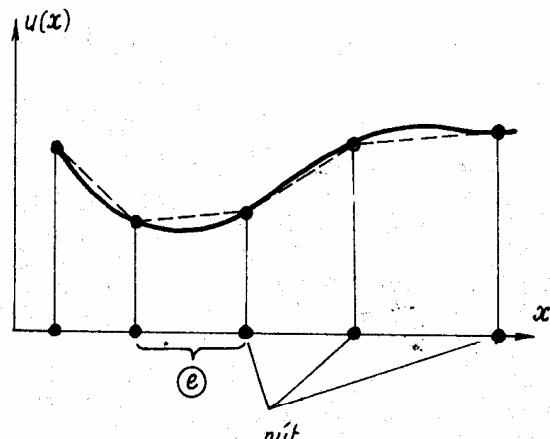
(và có thể cả đạo hàm đến cấp nào đó) của chính nó tại các điểm nút.

Và rõ ràng nếu lưới phần tử càng mịn thì kết quả nhận được càng tiến đến sự mô tả chính xác của nghiệm cần tìm.

Thí dụ: Với nội suy Lagrange (hình 4.20)



Hình 4.20



nút

3- Dạng đa thức xấp xỉ:

Như đã nói ở trên, hàm xấp xỉ được chọn dưới dạng đa thức đơn giản. Có thể như sau:

$$\text{Bài toán 1 - D: } u(x) = a_1 + a_2 x \quad (\text{xấp xỉ tuyến tính})$$

$$u(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 \quad (\text{xấp xỉ bậc 2})$$

$$u(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \quad (\text{xấp xỉ bậc 3})$$

hay nếu lấy $u(x)$ là một xấp xỉ bậc n thì

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x^{i-1}$$

$$\text{Hay: } u(x) = [1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^n] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{Bmatrix}$$

$$\text{Hay: } u(x) = [P(x)] \{a\}$$

Trong đó: $[P(x)]$ - Gọi là ma trận các đơn thức.

{a}- Vectơ các tọa độ tổng quát hay vectơ các tham số.

$$\text{Ở bài toán 2 - D: ví dụ: } u(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 y^2 + a_6 xy.$$

$$= [1 \ x \ y \ x^2 \ y^2 \ xy] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix}$$

$$u(x,y) = [P(x,y)] \{a\}$$

Chương 4. Cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn

Ở bài toán 3-D: $u(x,y,z) = [P(x,y,z)] \{a\}$ (4.32)

trong đó $[P(x,y,z)]$ ví dụ trong trường hợp xấp xỉ là tuyến tính:

$$[P(x,y,z)] = [1 \ x \ y \ z]$$

Trường hợp u là trường vectơ, và xấp xỉ là tuyến tính:

$$\begin{aligned} \{\underline{u}\}_e &= \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{12} \end{Bmatrix} \\ \text{tức là, } \{\underline{u}\}_e &= \begin{Bmatrix} a_1 + a_2x + a_3y + a_4z \\ a_5 + a_6x + a_7y + a_8z \\ a_9 + a_{10}x + a_{11}y + a_{12}z \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

4. Chọn bậc của đa thức xấp xỉ (hay của hàm xấp xỉ)

Khi chọn bậc của đa thức xấp xỉ cần xét tới các yêu cầu sau:

a. Các đa thức xấp xỉ phải thỏa mãn điều kiện hội tụ:

Đây là một yêu cầu quan trọng vì PPPTHH là một phương pháp số và do đó phải bảo đảm được rằng khi kích thước phần tử giảm đi thì kết quả sẽ hội tụ đến nghiệm chính xác. Muốn vậy đa thức xấp xỉ u_e phải thỏa mãn 3 điều kiện sau:

+ Liên tục trong phần tử (V_e). Điều này hiển nhiên thỏa mãn khi xấp xỉ là đa thức

+ Bảo đảm tồn tại trong phần tử trạng thái đơn vị (hằng số) và các đạo hàm riêng của nó đến bậc cao nhất mà phiếm hàm I (u) đòi hỏi.

Vì như ta đã biết, PPPTHH có thể được xem như một phương pháp xấp xỉ khi cực tiểu hóa một phiếm hàm dạng.

$$I(u) = \int_V F(x, u, u', u'', \dots u^{(r)}) dx$$

+ Trên biên phần tử, u và các đạo hàm của nó đến cấp $(r - 1)$ là liên tục.

Ví dụ: Khi u là chuyển vị thì phải bảo đảm khả năng phần tử dịch chuyển cứng và muốn bảo đảm trạng thái đơn vị của đại lượng khảo sát thì chỉ cần không được bỏ qua số hạng tự do a_1 trong đa thức xấp xỉ, hay không được bỏ qua thành phần 1 trong $[P(x,y,z)]$.

Với cơ vật rắn biến dạng và kết cấu các yêu cầu này có thể được hiểu như yêu cầu liên tục của biến dạng, nói cách khác là phần tử biến dạng không có sự đứt, gãy. Như với đầm, tấm, vỏ đòi hỏi cả chuyển vị và đạo hàm cấp 1 của chuyển vị là liên tục. Nếu đa thức xấp xỉ thỏa mãn tất cả 3 điều kiện này, thì nghiệm xấp xỉ sẽ hội tụ tới nghiệm chính xác khi sử dụng lưới phần tử mịn hơn. Tuy nhiên để thấy được điều này khi mịn hóa lưới phần tử cũng cần tuân theo các qui tắc sau:

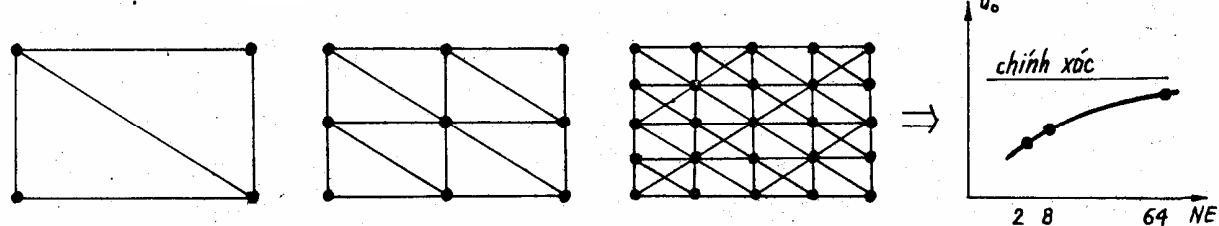
+ Lưới sau được mịn hơn trên cơ sở lưới trước, các điểm nút lưới trước cũng có mặt trong tập hợp các nút lưới sau.

Chương 4. Cơ sở phương pháp phân tử hữu hạn

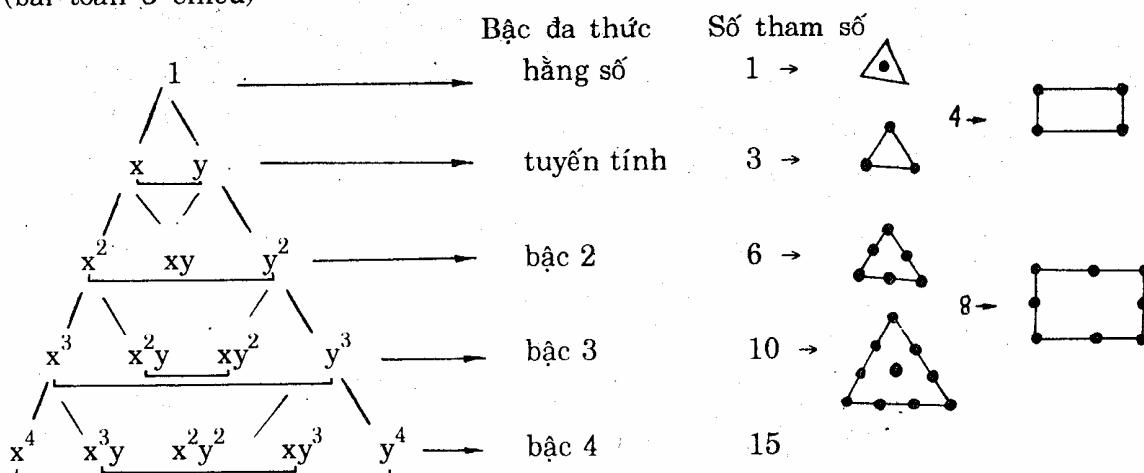
+ Các phần tử có kích thước nhỏ hơn trước nhưng dạng hình học vẫn phải như dạng cũ.

+ Dạng đa thức xấp xỉ là không đổi trong quá trình mịn hóa lưới phần tử.

Ví dụ: Hình 4.21

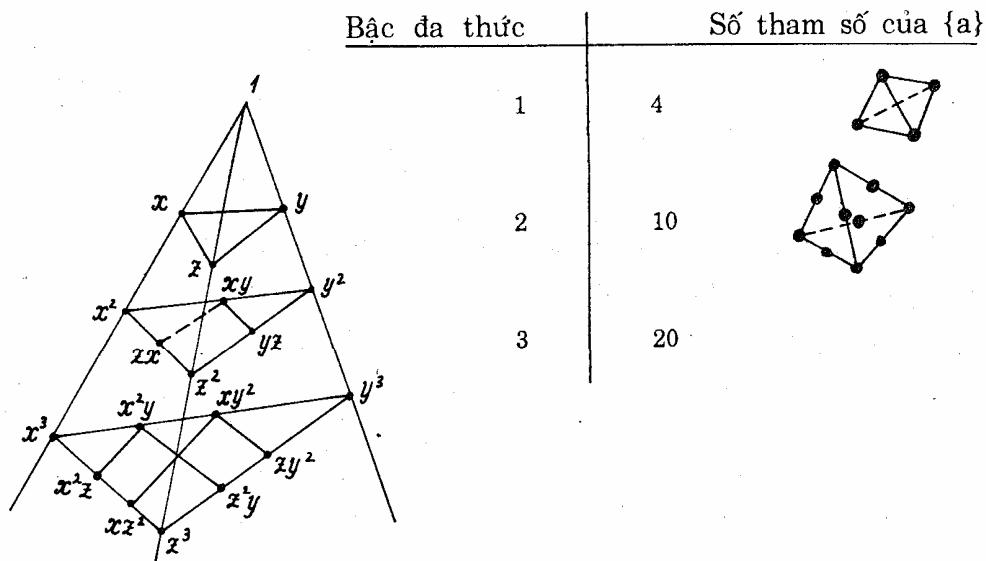


b. Các đa thức xấp xỉ được chọn sao cho không làm mất tính đẳng hướng hình học. Có như vậy các xấp xỉ mới độc lập với hệ tọa độ của phần tử. Muốn vậy dạng các đa thức được chọn từ tam giác Pascal (cho bài toán 2 chiều) hay từ tháp Pascal (bài toán 3 chiều)



Tam giác Pascal

Các phần tử 2-D



Tháp Pascal

Các phần tử 3-D

Chương 4. Cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn

c. Số các phần tử của $\{a\}$ tức số tham số của đa thức xấp xỉ phải bằng số bậc tự do của phần tử $\{q\}_e$. Yêu cầu này cho khả năng nội suy đa thức xấp xỉ theo giá trị đại lượng cần tìm tại các điểm nút.

5. Biểu diễn đa thức xấp xỉ theo vectơ các bậc tự do của phần tử. Ma trận các hàm dạng.

Bậc tự do của một nút (nodal degree of freedom) là giá trị (và có thể cần cả giá trị đạo hàm) của hàm (hay đa thức) xấp xỉ tại nút.

Tập hợp tất cả các bậc tự do của các nút trên phần tử được gọi là *vectơ các bậc tự do của phần tử*, ký hiệu: $\{q\}_e$. Hay trong cơ vật rắn thường gọi là *vectơ chuyển vị nút phần tử*. Và các bậc tự do này (hay các chuyển vị nút) là ẩn số của bài toán khi phân tích theo PPPTHH.

Ví dụ, trong bài toán phẳng của đàn hồi, khi dùng phần tử tam giác 3 điểm nút thì mỗi nút phần tử có 2 bậc tự do. Đó là 2 chuyển vị thành phần u và v theo 2 phương x,y của mỗi nút. Vậy tập hợp các chuyển vị của 3 nút là *vectơ chuyển vị nút phần tử*

$$\begin{aligned}\{q\}_e &= \{u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k\}_e^T \\ &\equiv \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}_e^T\end{aligned}$$

Tóm lại: Nếu phần tử e có r nút và mỗi nút có s bậc tự do thì vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$ có số thành phần $n_e = s \times r$.

Trong PPPTHH, các đa thức xấp xỉ được biểu diễn theo vectơ các bậc tự do phần tử $\{q\}_e$, hay người ta nói rằng các đa thức này được *nội suy* theo $\{q\}_e$. Điều này là một trong những tư tưởng cơ bản của phương pháp. Mà thực chất là ta phải bảo đảm các giá trị của đa thức xấp xỉ (hay cả các đạo hàm của nó) tại các điểm nút thuộc phần tử phải đồng nhất bằng các bậc tự do của phần tử.

Tức là: Phải bảo đảm:

$$\left. \begin{array}{l} u \text{ (tại nút 1)} \\ u \text{ (tại nút 2)} \\ \dots \\ u \text{ (tại nút r)} \end{array} \right\} \equiv \{q\}_e$$

Điều này dễ thực hiện được, bằng cách, thay tọa độ các nút vào các đa thức xấp xỉ, rồi thực hiện đồng nhất(4.32). Cụ thể:

$$\left. \begin{array}{l} u \text{ (tại nút 1)} \\ u \text{ (tại nút 2)} \\ \dots \\ u \text{ (tại nút r)} \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} u(x_1, y_1, z_1) \\ u(x_2, y_2, z_2) \\ \dots \\ u(x_r, y_r, z_r) \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{l} [P(x_1, y_1, z_1)] \\ [P(x_2, y_2, z_2)] \\ \dots \\ [P(x_r, y_r, z_r)] \end{array} \right] \{a\} = [A] \{q\} \equiv \{q\}_e \quad (4.33)$$

Trong đó: $[A]$ là ma trận vuông ($n_e \times n_e$) và chỉ chứa tọa độ các điểm nút phần tử.

Từ đó suy ra:

Chương 4. Cơ sở phương pháp phân tử hữu hạn

$$\{a\} = [A]^{-1} \{q\}_e \quad (4.34)$$

Thay $\{a\}$ từ (4.34) vào (4.32) ta có:

$$\{u(x,y,z)\} = [P(x,y,z)] \{a\} = \{P(x,y,z)\} [A]^{-1} \{q\}_e$$

$$\text{Hay: } \{u(x,y,z)\}_e = [N] \{q\}_e \quad (4.35)$$

$$\text{Trong đó: } [N] = [P(x,y,z)] [A]^{-1} \quad (4.36)$$

và được gọi là *ma trận các hàm nội suy*, hay *ma trận các hàm dạng*.

Còn qua (4.35), ta nói rằng ta đã biểu diễn (hay nội suy) đa thức xấp xỉ theo vectơ các bậc tự do của phần tử (hay theo vectơ chuyển vị nút phần tử) $\{q\}_e$.

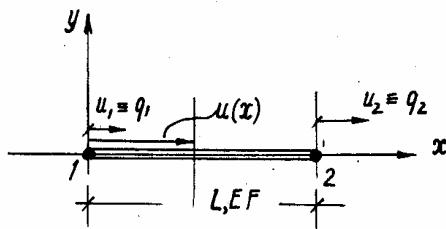
Trong bài toán cơ vật rắn hay trong cơ kết cấu có thể dễ thấy rằng các hàm thành phần trong ma trận các hàm dạng $[N]$ phản ảnh dạng phân bố của chuyển vị trong phần tử ứng với các chuyển vị nút bằng đơn vị.

Ví dụ 1: Tìm ma trận hàm dạng của phần tử thanh lăng trụ chịu kéo - nén dọc trực. (Hình 4.22).

Đây là bài toán 1-D. Mọi điểm chỉ tồn tại chuyển vị và biến dạng dọc trực; cụ thể là $u(x)$ và ε_x . Chú ý rằng trong phiếm hàm thế năng Π sẽ chưa chứa đạo hàm bậc nhất của chuyển vị vì

$$U = \frac{1}{2} \int_L \frac{N^2}{EJ} dx = \frac{1}{2} \int_L EJ \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx$$

Hình 4.22 Phần tử thanh chịu biến dạng dọc trực



Nên đa thức xấp xỉ $u(x)$ chỉ đòi hỏi tồn tại đạo hàm bậc nhất, hay có thể lấy $u(x)$ là hàm xấp xỉ tuyến tính:

$$u(x) = a_1 + a_2 x \quad (0 \leq x \leq L)$$

$$= [1 \quad x] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = [P(x)] \{a\}.$$

Do $\{a\}$ chỉ có 2 tham số nên vectơ chuyển vị nút $\{q\}_e$ của phần tử cũng chỉ có 2 bậc tự do; đó là 2 chuyển vị dọc trực x của 2 điểm nút đầu và cuối của phần tử. Hay; Vectơ chuyển vị nút phần tử là như sau:

$$\{q\}_e = \{q_1, q_2\}_e^T \equiv \{u_1, u_2\}_e^T$$

Điều này cũng phù hợp với yêu cầu bảo đảm tương thích về biến dạng của bài toán kết cấu đang xét.

Thực hiện đồng nhất (4.33):

$$\begin{Bmatrix} u(\text{tại nút 1}) \\ u(\text{tại nút 2}) \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} u(x=0) \\ u(x=L) \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_1 + a_2 L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e$$

Chương 4. Cơ sở phương pháp phân tử hữu hạn

Vậy: $[A] = \begin{bmatrix} [P(x_1)] \\ [P(x_2)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix}$

Dễ thấy: $[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$

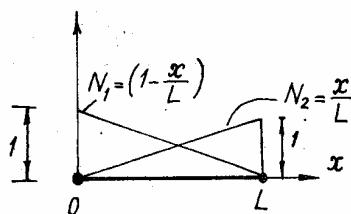
Và theo (4.36), ta có ma trận các hàm dạng

$$\begin{aligned} [N]_e &= [P(x)] \quad [A]^{-1} = [1 \quad x] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} = \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} \right] \\ (1 \times 2) &\quad (1 \times 2) \quad (2 \times 2) \\ &= [N_1(x) \quad N_2(x)] \end{aligned} \quad (4.37)$$

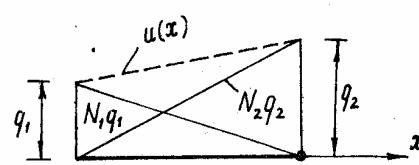
Cuối cùng đã có thể biểu diễn đa thức xấp xỉ chuyển vị dọc trực theo các chuyển vị nút phần tử:

$$u(x) = [N] \{q\}_e = \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} \right] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e$$

Hay $u(x) = \sum_{i=1}^2 N_i(x) q_i = \left(1 - \frac{x}{L}\right) q_1 + \frac{x}{L} q_2$



Biểu đồ N_1, N_2



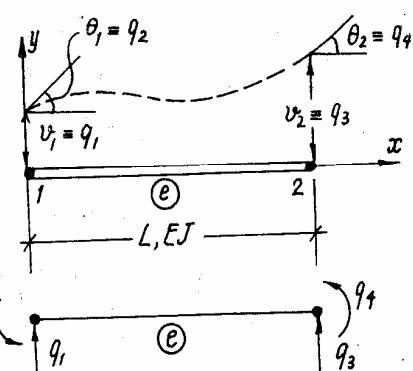
Biểu đồ của $u(x)$.

Các hàm $N_i(x)$ trong (4.37) còn có tên là các hàm nội suy Lagrange bậc 1 có đồ thị như trên.

Ví dụ 2: Chọn đa thức xấp xỉ và ma trận hàm dạng phân tử dầm 2 điểm nút chịu uốn. (Hình 4.23)

Bỏ qua biến dạng dọc trực, dễ thấy rằng khi phân tử dầm chịu uốn, trạng thái chuyển vị của điểm bất kỳ có tọa độ x được đặc trưng bởi chuyển vị $v(x)$ theo phương vuông góc trực dầm.

Để bảo đảm sự tương thích về biến dạng giữa phân tử đang xét và các phân tử kè bên, rõ ràng tại biên



Hình 4.23 Phân tử dầm

Chương 4. Cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn

phần tử (tại 2 nút) cần bảo đảm sự liên tục với các phần tử kề bên về chuyển vị

$$v \text{ và góc xoay } \theta = \frac{dv}{dx}$$

Vậy số bậc tự do của phần tử là bốn. Đó là các chuyển vị và góc xoay tại 2 nút

$$\{q\}_e = \{v_1, \theta_1, v_2, \theta_2\}_e^T$$

$$= \{q_1, q_2, q_3, q_4\}_e^T \quad (a)$$

Để nội suy hàm xấp xỉ $v(x)$, vectơ tham số (vectơ các tọa độ tổng quát) $\{q\}_e$ cũng phải có 4 tham số. Do đó $v(x)$ phải là một đa thức bậc ba, và có dạng:

$$v(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$$

Và do vậy, góc xoay $\theta(x)$ của một mặt cắt ngang bất kỳ là:

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$$

Thực hiện đồng nhất (a):

$$q_1 \equiv v_1 = v \Big|_{x=0} = a_1$$

$$q_2 \equiv \theta_2 = \frac{dv}{dx} \Big|_{x=0} = a_2$$

$$q_3 \equiv v_2 = v \Big|_{x=L} = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + a_4 L^3$$

$$q_4 \equiv \theta_2 = \frac{dv}{dx} \Big|_{x=L} = a_2 + 2a_3 L + 3a_4 L^2$$

Ở dạng ma trận:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad \text{hay} \quad \{q\}_e = [A] \{a\}$$

Với:

Chương 4. Cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \text{ có nghịch đảo } [A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/L^2 & -2/L & 3/L^2 & -1/L \\ 2/L^3 & 1/L^2 & -2/L^3 & 1/L^2 \end{bmatrix}$$

Sử dụng (4.36), ta có ma trận hàm dạng

$$[N] = [P(x)] [A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/L^2 & -2/L & 3/L^2 & -1/L \\ 2/L^3 & 1/L^2 & -2/L^3 & 1/L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}$$

trong đó: $N_1 = 1 - 3 \frac{x^2}{L^2} + 2 \frac{x^3}{L^3}$

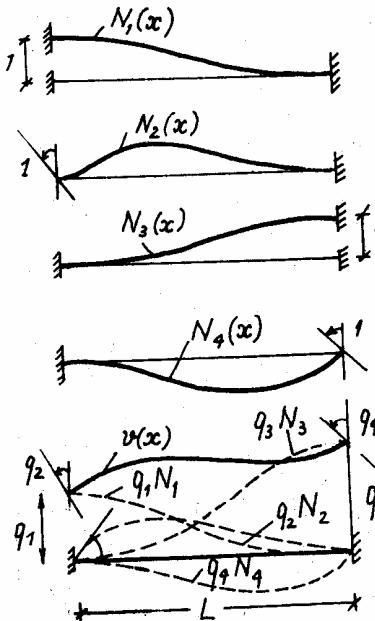
$$N_2 = x - 2 \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (4.38)$$

$$N_3 = 3 \frac{x^2}{L^2} - 2 \frac{x^3}{L^3}$$

$$N_4 = - \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

Và như vậy hàm chuyển vị $v(x)$ của phần tử đầm chịu uốn là

$$v(x) = [N] \{q\}_e = \sum_{i=1}^4 N_i q_i \quad (4.39)$$



Hình 4.24 Đồ thị các hàm dạng và xấp xỉ của độ uốn

Chương 4. Cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn

Đồ thị biểu diễn các hàm $N_i(x)$ và $v(x)$ như tổ hợp tuyến tính của các hàm N_i ở hình 4.24.

Các hàm N_i trong (4.38) còn có tên là các hàm nội suy Hermite bậc 3.

4.7. Các phương trình cơ bản.

Bài này nhằm cụ thể hơn vào bài toán cơ vật rắn, bài toán kết cấu được giải theo PPPTHH với mô hình tương thích.

1- Chuyển vị, biến dạng và ứng suất trong phần tử- Ma trận độ cứng phần tử và vectơ tải phần tử

Khi giải bài toán theo mô hình tương thích (còn gọi là phương pháp chuyển vị) đại lượng cơ bản cần tìm trước tiên là chuyển vị. Chuyển vị được xấp xỉ hóa và nội suy theo vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$. Sau khi tìm được ma trận các hàm dạng, chúng ta biểu diễn được trường chuyển vị theo các chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$.

$$\{u\}_e = [N]\{q\}_e \quad (4.40)$$

Từ đó, theo các phương trình liên hệ giữa chuyển vị và biến dạng (các phương trình Cauchy), biến dạng của một điểm trong phần tử sẽ là:

$$\{\varepsilon\}_e = [\partial]\{u\}_e = [\partial][N]\{q\}_e = [B]\{q\}_e \quad (4.41)$$

$$\text{Trong đó } [B] = [\partial][N] \quad (4.42)$$

và $[B]$ được gọi là: Ma trận tính biến dạng

Ứng suất tại một điểm thuộc phần tử, trong trường hợp vật liệu tuân theo định luật Hooke sẽ là:

$$\{\sigma\}_e = [D](\{\varepsilon\}_e - \{\varepsilon^0\}_e) + \{\sigma^0\}_e \quad (4.43)$$

trong đó $\{\varepsilon^0\}_e$ và $\{\sigma^0\}_e$ lần lượt là biến dạng và ứng suất ban đầu của phần tử.

Sử dụng (4.41); ta có:

$$\{\sigma\}_e = [D][B]\{q\}_e - [D]\{\varepsilon^0\}_e + \{\sigma^0\}_e$$

$$\text{Hay } \{\sigma\}_e = [T]\{q\}_e - [D]\{\varepsilon^0\}_e + \{\sigma^0\}_e \quad (4.44)$$

$$\text{trong đó } [T] = [D][B] \text{ gọi là ma trận tính ứng suất phần tử.} \quad (4.45)$$

(4.40), (4.41) và (4.44) cho ta biểu diễn chuyển vị, biến dạng và ứng suất trong phần tử theo vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$

Thể năng toàn phần của phần tử:

$$\prod_e (\{u\}_e) = \int_{V_e} \frac{1}{2} \{\varepsilon\}_e^T \{\sigma\}_e dV - \int_{V_e} \{g\}_e^T \{u\}_e dV - \int_{S_e} \{p\}_e^T \{u\}_e dS$$

Dùng (4.40), (4.41) và (4.44):

$$\prod_e (\{q\}_e) = \int_{V_e} \frac{1}{2} \{q\}_e^T ([B]^T [D] [B]) \{q\}_e dV -$$

Chương 4. Cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn

$$\left(\int_{V_e} \{g\}_e^T \{u\}_e dV + \int_{S_e} \{p\}_e^T \{u\}_e dS + \int_{V_e} \frac{1}{2} \{\varepsilon^\circ\}_e^T [D] [B] dV - \int_{V_e} \frac{1}{2} \{\sigma^\circ\}_e^T [B] dV \right) \{q\}_e$$

Hay $\prod_e (\{q\}_e) = \frac{1}{2} \{q\}_e^T [K]_e \{q\}_e - \{q\}_e^T \{P\}_e$ (4.46)

Trong đó: $[K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV$ Ma trận cứng phần tử (4.47)

$$\{P\}_e = \int_{V_e} [N]^T \{g\}_e dV + \int_{S_e} [N]^T \{p\}_e dS + \int_{V_e} \frac{1}{2} [B]^T [D] \{\varepsilon^\circ\}_e dV - \int_{V_e} \frac{1}{2} [B]^T \{\sigma^\circ\}_e dV$$

$\{P\}_e$ được gọi là vectơ tải phần tử. (4.48)

Dễ thấy rằng vì $[D]$ là ma trận đối xứng nên tích $[B]^T [D] [B]$ cũng đối xứng và do đó $[K]_e$ là ma trận đối xứng.

2- Ghép nối các phần tử – ma trận cứng và vectơ tải tổng thể.

Giả sử vật thể (miền V) được chia thành NE phần tử (miền con V_e) bởi R điểm nút. Nếu mỗi nút có s bậc tự do thì số bậc tự do của cả hệ là $n = R \times s$.

Gọi $\{\bar{q}\}$ là vectơ chuyển vị nút tổng thể (hay vectơ chuyển vị nút kết cấu)

Nó sẽ là tập hợp của tất cả các bậc tự do của tất cả các nút của hệ và gồm n thành phần.

Giả sử mỗi phần tử có r nút, thì số bậc tự do của mỗi phần tử là $n_e = r \times s$. Và vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$ gồm tất cả các bậc tự do của r nút của phần tử, tức là gồm n_e thành phần.

Rõ ràng, theo mô hình tương thích, các thành phần này của $\{q\}_e$ là nằm trong số các thành phần của $\{\bar{q}\}$. Và do đó sự liên hệ giữa 2 vectơ này có thể được biểu diễn như sau:

$$\{q\}_e = [L]_e \quad \{\bar{q}\} \quad (4.49)$$

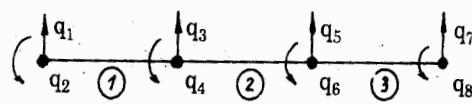
$$(n_e \times 1) \quad (n_e \times n) \quad (n \times 1)$$

Trong đó $[L]_e$ là ma trận định vị của phần tử, có kích thước $(n_e \times n)$.

Ma trận này cho thấy hình ảnh sắp xếp các thành phần của vectơ $\{q\}_e$ trong $\{\bar{q}\}$.

Ví dụ: Dầm với bốn điểm nút như hình 4.25 có vectơ chuyển vị nút tổng thể $\{\bar{q}\}$ là:

$$\{\bar{q}\} = \{q_1, q_2, q_3, q_4, \dots, q_8\}^T$$



Hình 4.25 Các bậc tự do của dầm có bốn nút

Chương 4. Cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn

$$\{q\}_1 = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = [L]_1 \{\bar{q}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_8 \end{pmatrix}$$

$$\{q\}_2 = \begin{pmatrix} q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{pmatrix} = [L]_2 \{\bar{q}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_8 \end{pmatrix}$$

$$\{q\}_3 = \begin{pmatrix} q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{pmatrix} = [L]_3 \{\bar{q}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_8 \end{pmatrix}$$

Ở bài (4.35) ta đã có công thức xác định thế năng toàn phần Π_e của một phần tử. Vậy thế năng toàn phần của toàn hệ là, sử dụng (2.15) và (2.18)

$$\Pi = \sum_{e=1}^{NE} \Pi_e = \sum_{e=1}^{NE} \left[\frac{1}{2} \{\bar{q}\}^T [L]_e^T [K]_e [L]_e \{\bar{q}\} - \{P\}_e^T [L]_e \{\bar{q}\} \right]$$

Biểu thức này biểu diễn thế năng toàn phần Π của hệ theo vectơ chuyển vị nút tổng thể $\{\bar{q}\}$. Áp dụng nguyên lý thế năng toàn phần dừng (nguyên lý Lagrange) ta sẽ có điều kiện cân bằng của toàn hệ tại các điểm nút.

Cụ thể:

$$\delta \Pi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial q_n} = 0 \end{cases} \quad \text{hay ở dạng ma trận:} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \{\bar{q}\}} = \{0\}$$

$$\text{Và ta có: } \frac{\partial \Pi}{\partial \{\bar{q}\}} = \left(\sum_{e=1}^{NE} [L]_e^T [K]_e [L]_e \right) \{\bar{q}\} - \sum_{e=1}^{NE} [L]_e^T \{P\}_e = \{0\}$$

Hay, ta nhận được hệ phương trình:

$$[K]\{\bar{q}\} - \{\bar{P}\} = \{0\} \quad (4.50)$$

Trong đó: $[K] = \sum_{e=1}^{NE} [L]_e^T [K]_e [L]_e$ là ma trận *cứng tổng thể* (kết cấu) (4.51)

Chương 4. Cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn

$$\sum_{e=1}^{NE} \{ \bar{P} \}_e^T \{ P \}_e \text{ là vectơ tải tổng thể (kết cấu)} \quad (4.52)$$

Chú ý:

1. Về mặt cơ học, hệ phương trình.

$$[\bar{K}] \{ q \} - \{ \bar{P} \} = \{ 0 \}$$

biểu diễn điều kiện cân bằng của vật thể tại các điểm nút. Phần tử \bar{K}_{ij} của ma trận cứng tổng thể $[\bar{K}]$ biểu thị lực sinh ra ở nút i do chuyển dịch đơn vị ở nút j khi tất cả các nút bị gán cứng.

Còn các thành phần \bar{P}_i của vectơ tải tổng thể $\{ \bar{P} \}$ là ngoại lực tác động lên các phần tử (tính đến cả biến dạng và ứng suất ban đầu) được quy đổi về tương ứng với bậc tự do thứ i.

Trường hợp hệ thanh, còn phải kể thêm vào $\{ \bar{P} \}$, các ngoại lực tập trung tác động lên các nút theo các bậc tự do tương ứng mà tập hợp các thành phần này là vectơ tải trọng nút $\{ \bar{P} \}_n$.

2. Khi thiết lập phương trình trên ta chưa đưa vào các điều kiện biên động học, vật thể xem như tự do, ma trận $[\bar{K}]$ là suy biến (không tồn tại nghịch đảo $[\bar{K}]^{-1}$). Do vậy ta phải đưa vào các điều kiện biên động học để, như cách nói trong cơ kết cấu, hệ là bất biến hình. Sau khi áp đặt điều kiện biên động học, phương trình (4.50) trở thành:

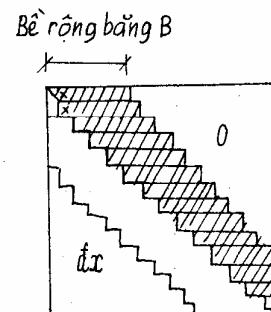
$$[\bar{K}^*] \{ \bar{q}^* \} = \{ \bar{P}^* \} \quad (4.53)$$

3. Việc sử dụng ma trận định vị phần tử $[L]_e$ trong (2.20) và (2.21) để tính ma trận cứng kết cấu $[\bar{K}]$ và vectơ tải kết cấu $\{ \bar{P} \}$ thực chất là sắp xếp các phần tử của ma trận cứng phần tử $[K]_e$ và của vectơ tải phần tử $\{ P \}_e$ vào vị trí của nó trong ma trận cứng tổng thể $[\bar{K}]$ và vectơ tải tổng thể $\{ \bar{P} \}$. Tuy nhiên trong thực hành người ta sử dụng ma trận liên hệ Boolean (hay ma trận chỉ số) tiện hơn nhiều trong quá trình ghép nối các phần tử để có được $[\bar{K}]$ và $\{ \bar{P} \}$.

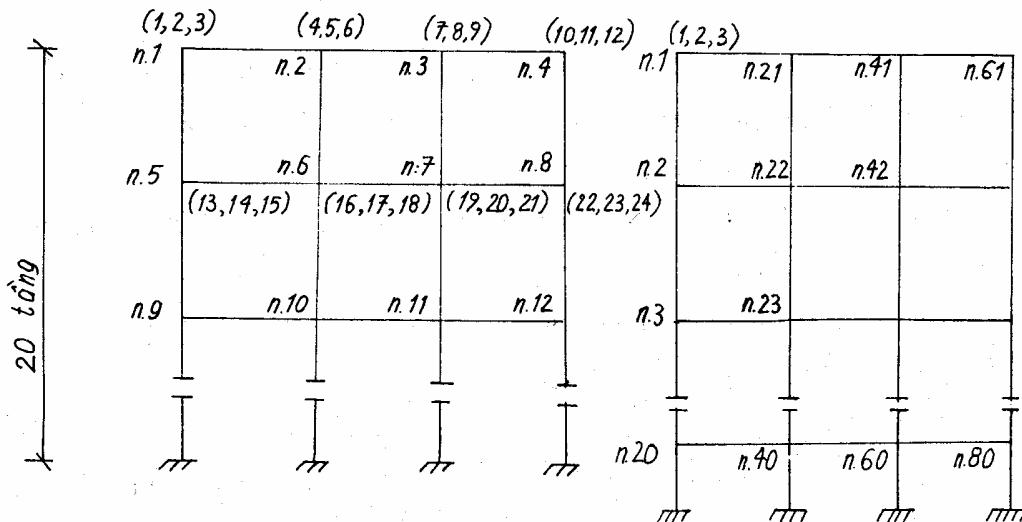
- 4. + Do $[K]_e$ đối xứng nên ma trận cứng tổng thể $[\bar{K}]$ cũng là ma trận đối xứng.
 - + Ngoài ra $[\bar{K}]$ có dạng băng.
 - + Bề rộng băng tùy thuộc cách đánh số nút (hay cách đánh số bậc tự do)

Ví dụ: Xét một khung phẳng nhà 20 tầng, 3 nhịp (h.vé). Nếu không kể tới 4 nút đỡ ngầm cứng ở dưới thì hệ gồm 80 nút, mỗi nút có 3 chuyển vị (bậc tự do) chưa biết \rightarrow số ẩn của hệ là: $80 \times 3 = 240$, ma trận $[\bar{K}^*]$ gồm $240^2 = 57.600$ thành phần.

Tuy nhiên, theo ý nghĩa cơ học của \bar{K}_{ij} , rõ ràng $\bar{K}_{ij} \neq 0$ chỉ nếu i và j là các bậc tự do thuộc cùng 1 nút hoặc 2 nút kề sát nhau. Còn lại



Chương 4. Cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn



(a) Cách đánh số nút theo chiều ngắn: $B = 15$
là bằng 0.

Ví dụ: $\bar{K}_{1,15} \neq 0$ nhưng $\bar{K}_{1,7} = \bar{K}_{1,16} = 0$

Từ đó có thể tính chiều rộng băng B (thực ra phải gọi là nửa chiều rộng băng)

$$B = (D + 1) \times s \quad (4.54)$$

Trong đó: D là sự sai khác lớn nhất của mã số 2 nút kề sát nhau

s : số bậc tự do của một nút.

Với cách đánh số nút theo chiều ngắn (hình (a)): $B = (4 + 1) \times 3 = 15$

Với cách đánh số nút theo chiều dài (hình (b)): $B = (20 + 1) \times 3 = 60$

Vậy trong thí dụ này, cách đánh số theo chiều ngắn sẽ cho bề rộng băng B nhỏ nhất. Và điều này có lợi cho việc lưu trữ ma trận hệ số và việc giải hệ phương trình đại số.

3- Phép chuyển trực tọa độ.

Như ở các phần trên ta thấy rằng các đại lượng chuyển vị, biến dạng, và ứng suất và cả ma trận hàm dạng $[N]$, ma trận cứng phần tử $[K]_e$, vectơ tải phần tử $\{P\}_e$ là được xây dựng trong hệ tọa độ thích hợp của mỗi phần tử. Hệ này thường chọn sao cho việc thiết lập các công thức cần có là đơn giản và hệ tọa độ này được gọi là *hệ tọa độ địa phương* (local coordinate system). Khi một hệ tọa độ địa phương được sử dụng thì phương của các bậc tự do của phần tử cũng phải được lấy theo hệ tọa độ này.

Tuy nhiên, trong thực tế, thường gặp các kết cấu mà các phần tử khác nhau thì có các hệ tọa độ địa phương khác nhau và do đó các bậc tự do của phần tử cũng khác nhau về phương.

Do vậy cần thiết có *hệ tọa độ chung cho toàn hệ* và gọi là *hệ tọa độ tổng thể* (hay *hệ tọa độ chung* hay *hệ tọa độ kết cấu* - global coordinate system). Việc chọn hệ tọa độ này là tùy ý tuy nhiên trong thực tế thường lấy nó như hệ trục để vẽ và biểu diễn hệ.

Chương 4. Cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn

Nếu gọi hệ tọa độ địa phương là xyz và hệ tọa độ chung tổng thể là $x'y'z'$

Gọi $\{q\}_e$, $\{P\}_e$ và $[K]_e$ lần lượt là vectơ chuyển vị nút phần tử, vectơ tải và ma trận cứng phần tử trong hệ tọa độ địa phương xyz

Còn $\{q'\}_e$, $\{P'\}_e$ và $[K']_e$ là vectơ chuyển vị nút, vectơ tải và ma trận cứng phần tử trong hệ tọa độ tổng thể $x'y'z'$

Ta có thể thiết lập mối quan hệ biểu diễn $\{q\}_e$ và $\{P\}_e$ theo $\{q'\}_e$ và $\{P'\}_e$

$$\{q\}_e = [T]_e \{q'\}_e \quad (4.55)$$

$$\{P\}_e = [T]_e \{P'\}_e \quad (4.56)$$

với $[T]_e$ gọi là *ma trận biến đổi* (transformation matrix) các thành phần chuyển vị nút từ hệ tọa độ tổng thể $x'y'z'$ về hệ tọa độ địa phương xyz .

Khi đó, thế năng toàn phần Π_e của phần tử đang là:

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \{q\}_e^T [K]_e \{q\}_e - \{P\}_e^T \{q\}_e$$

sẽ trở thành, dùng (2.24)

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \{q'\}_e^T [T]_e^T [K]_e [T]_e \{q'\}_e - \{P'\}_e^T [T]_e \{q'\}_e$$

$$\text{Hay } \Pi_e = \frac{1}{2} \{q'\}_e^T [K']_e \{q'\}_e - \{P'\}_e^T \{q'\}_e$$

$$\text{Trong đó: } [K']_e = [T]_e^T [K]_e [T]_e \quad (4.57)$$

$$\{P'\}_e = [T]_e^T \{P\}_e \quad (4.58)$$

Nhận xét: Bằng cách so sánh (4.56) và (4.58) dễ dàng thấy rằng

$$[T]_e^T [T]_e = [I] \quad ([I] \text{ là ma trận đơn vị})$$

Và khi $[T]_e$ là ma trận vuông thì từ đây suy ra:

$$[T]_e^T = [T]_e^{-1} \text{ hay } [T]_e \text{ là ma trận trực giao}$$

Sau khi xoay trục, biểu thức thế năng toàn phần của toàn hệ sẽ được biểu diễn theo vectơ chuyển vị nút tổng thể $\{q'\}$ chứa tất cả các bậc tự do (các chuyển vị thành phần) của tất cả các nút thuộc hệ trong hệ tọa độ tổng quát $x'y'z'$. (Nói cách khác việc ghép nối các phần tử hoàn toàn thực hiện được tương tự như đã nói trên). Rồi áp dụng nguyên lý thế năng toàn phần dừng cho toàn hệ, ta thiết lập được phương trình cho toàn hệ:

$$[\bar{K}']\{\bar{q}'\} = \{\bar{P}'\} \quad (4.59)$$

NE

Trong đó: $\bar{K}' = \sum_{e=1}^{NE} [K']_e$: Ma trận cứng tổng thể trong hệ tọa độ tổng thể $x'y'z'$

NE

$\bar{P}' = \sum_e \{P'\}_e + \{\bar{P}'\}_n$: vectơ tải tổng thể trong hệ tọa độ tổng thể $x'y'z'$

$\{\bar{q}'\}$: vectơ chuyển vị nút tổng thể trong hệ tọa độ tổng thể.

Chương 4. Cơ sở phương pháp phân tử hữu hạn

Ở đây số hạng thứ hai $\{\bar{P}'\}_n$ trong biểu thức xác định $\{\bar{P}'\}$ là vectơ tải trọng tập trung đặt tại các nút tác dụng theo các phương tương ứng của các thành phần trong vectơ chuyển vị nút kết cấu $\{q'\}$ và thường được gọi là vectơ tải trọng nút (nodal load vector)

4 - Ghép nối phần tử hay sử dụng ma trận chỉ số để xây dựng ma trận cứng và vectơ tải tổng thể.

Trong PPPTHH người ta sử dụng 2 hệ thống chỉ số để đánh số cho các bậc tự do của các nút. Đó là:

1. *Hệ thống chỉ số tổng thể*: Có được bằng cách đánh số các bậc tự do của toàn kết cấu. Hệ thống chỉ số tổng thể để chỉ thứ tự các bậc tự do trong tập hợp tất cả các bậc tự do của toàn hệ, tức thứ tự của bậc tự do đang xét trong $\{q\}$ (hoặc $\{q'\}$). Hệ thống này được đánh thứ tự từ 1, 2, 3... $n = R \times s$.

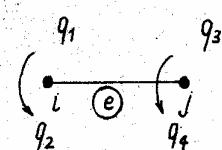
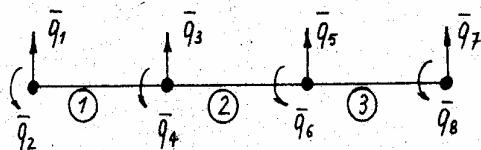
2. *Hệ thống chỉ số phần tử*: để chỉ thứ tự các bậc tự do trong phần tử hay thứ tự của các bậc tự do trong $\{q\}_e$ (hoặc $\{q'\}_e$): Được đánh số từ 1, 2, 3, ... $n_e = r \times s$ (Trong đó R : số nút của cả hệ; r số nút của phần tử, s : số bậc tự do của 1 nút.)

Ví dụ:

Để xác định sự tương ứng của mỗi phần tử thuộc $\{q\}_e$ trong $\{q\}$ (hoặc $\{q'\}_e$) trong $\{q'\}$ người ta lập *ma trận chỉ số* $[b]$ (còn gọi là ma trận liên hệ Boolean) mà giá trị của mỗi thành phần b_{ij} chính là chỉ số tổng thể tương ứng bậc tự do thứ j của phần tử thứ i .

Ma trận chỉ số $[b]$ có số hàng bằng số phần tử của hệ, số cột bằng số bậc tự do của một phần tử.

Ví dụ: Ở ví dụ trên thì $[b]$ có kích thước (3×4) . Và $b_{23} = 5$, $b_{32} = 6$



Hệ thống chỉ số tổng thể: 1, 2, 3, ..., 8.

Hệ thống chỉ số phần tử: 1, 2, 3, 4.

Khi sử dụng ma trận chỉ số $[b]$ để xây dựng ma trận cứng tổng thể $[\bar{K}]$ và vectơ

Chỉ số cục bộ	Nút i		Nút j	
	1	2	3	4
Phần tử				
(1)	1	2	3	4
(2)	3	4	5	6
(3)	5	6	7	8

hay $[b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}_{(3 \times 4)}$

Chương 4. Cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn

tổng thể $\{\bar{P}\}$ (hoặc $[\bar{K}']$ và $\{\bar{P}'\}$) ta chỉ cần nhớ rằng mỗi thành phần K_{ij}^e của ma trận cứng phần tử $[K]_e$ sẽ phải "gộp thêm" vào phần tử \bar{K}_{mn} của ma trận cứng tổng thể $[\bar{K}]$ với $m = b_{ei}$ và $n = b_{ej}$ (nhớ là b_{ei}, b_{ej} là các giá trị của phần tử hàng i và cột j của ma trận $[b]$). Tương tự, mỗi phần tử P_i^e của vectơ $\{P\}_e$ sẽ được "gộp thêm" vào phần tử \bar{P}_m của $\{\bar{P}\}$ với $m = b_{ei}$

$$\begin{array}{l} \text{Ví dụ: } K_{1,3}^{(2)} \xrightarrow{\text{gộp thêm}} \bar{K}_{(b_{21}, b_{23})} \equiv \bar{K}_{3,5} \\ K_{2,4}^{(3)} \xrightarrow{\quad} \bar{K}_{(b_{32}, b_{34})} \equiv \bar{K}_{6,8} \end{array}$$

Để có thể thấy rõ hơn việc sử dụng ma trận chỉ số $[b]$ (còn gọi là ma trận liên hệ Boolean) để xây dựng ma trận cứng tổng thể $[\bar{K}]$ (hoặc $[\bar{K}']$) và vectơ tải tổng thể $\{\bar{P}\}$ (hoặc $\{\bar{P}'\}$) từ các ma trận cứng phần tử $[K]_e$ (hoặc $[K']_e$) và vectơ tải phần tử $\{P\}_e$ (hoặc $\{P'\}_e$) ta có thể minh họa trên ví dụ vừa xét như sau:

$\{\bar{q}\}$ là vectơ chuyển vị nút tổng thể gồm tất cả các bậc tự do của tất cả các nút và được đánh số từ 1, 2, 3, ..., 8. Ma trận $[\bar{K}]$ là vuông có kích thước (8×8)

$\{q\}_e$ là vectơ chuyển vị nút phần tử gồm các bậc tự do của phần tử và được đánh số thứ tự từ 1, 2, 3, 4. Ma trận $[K]_e$ là vuông (4×4) .

Từ (4.47) và (4.48) ta có $[K]_e$ và $\{P\}_e$ của mỗi phần tử. Cụ thể:

$$[K]_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 \\ dx & k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 \\ & k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 & k_{44}^1 \end{bmatrix} \quad [K]_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ k_{21}^2 & k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\ dx & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 \\ & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} \quad [K]_3 = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ k_{11}^3 & k_{12}^3 & k_{13}^3 & k_{14}^3 \\ k_{21}^3 & k_{22}^3 & k_{23}^3 & k_{24}^3 \\ dx & k_{31}^3 & k_{32}^3 & k_{33}^3 \\ & k_{41}^3 & k_{42}^3 & k_{43}^3 & k_{44}^3 \end{bmatrix}$$

(Chú ý: Các chỉ số tổng thể tương ứng được viết ở trên và bên cạnh các ma trận $[K]_e$).

Nếu thay thế chỉ số địa phương (số nhỏ) bằng chỉ số tổng thể tương ứng lấy từ ma trận chỉ số $[b]$, thì có thể thấy được vị trí cần "gộp vào" của mỗi phần tử K_{ij}^e trong $[\bar{K}]$ tổng thể (hình vẽ). Cũng tương tự vậy với $\{\bar{P}\}$

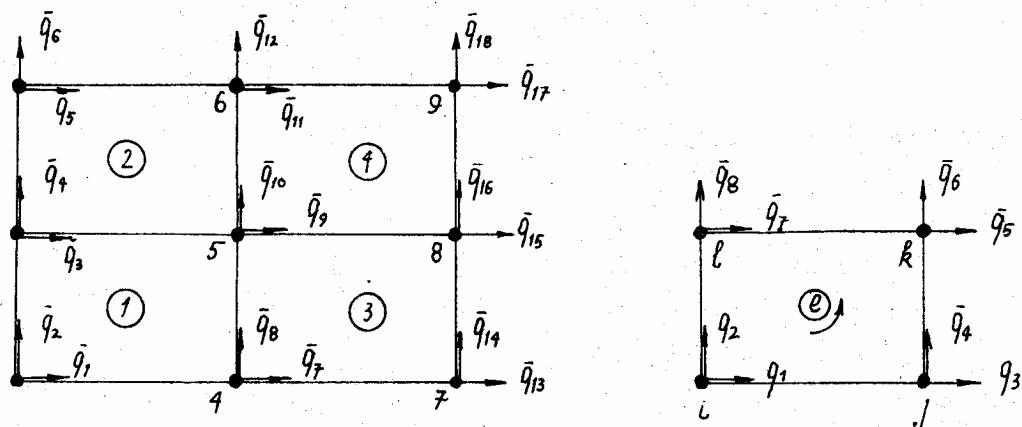
$$\{P\}_1 = \begin{cases} P_1^1 \\ P_2^1 \\ P_3^1 \\ P_4^1 \end{cases} \quad 1, \quad \{P\}_2 = \begin{cases} P_1^2 \\ P_2^2 \\ P_3^2 \\ P_4^2 \end{cases} \quad 3, \quad \{P\}_3 = \begin{cases} P_1^3 \\ P_2^3 \\ P_3^3 \\ P_4^3 \end{cases} \quad 5, \\ \quad 2, \quad \quad 4, \quad \quad 6, \quad \quad 7, \\ \quad 3, \quad \quad 5, \quad \quad 8, \quad \quad 8 \end{matrix}$$

(Chú ý: Các chỉ số tổng thể tương ứng được viết bên cạnh các vectơ $\{P\}_e$).

Chương 4. Cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{33}^1 + k_{11}^2 & k_{34}^1 + k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{44}^1 + k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{33}^2 + k_{11}^3 & k_{34}^2 + k_{12}^3 & k_{13}^3 & k_{14}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{44}^2 + k_{22}^3 & k_{23}^3 & k_{24}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{33}^3 & k_{34}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{44}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \{\bar{p}\} = \begin{cases} p_1^1 & 1 \\ p_2^1 & 2 \\ p_3^1 + p_1^2 & 3 \\ p_4^1 + p_2^2 & 4 \\ p_3^2 + p_1^3 & 5 \\ p_4^2 + p_2^3 & 6 \\ p_3^3 & 7 \\ p_4^3 & 8 \end{cases}$$

Ví dụ: Lập ma trận chỉ số tấm phẳng chữ nhật sau.



Kết cấu và hệ thống chỉ số tổng thể.

Phần tử mẫu và hệ thống chỉ số phần tử.

Dễ thấy:

$$K_{5,6}^{(1)} \Rightarrow \bar{K}_{9,10}$$

$$K_{3,4}^{(1)} \Rightarrow \bar{K}_{7,8}$$

$$K_{5,5}^{(1)} \Rightarrow \bar{K}_{9,9}$$

$$K_{2,4}^{(3)} \Rightarrow \bar{K}_{8,14}$$

$$K_{2,6}^{(3)} \Rightarrow \bar{K}_{8,16}$$

Chỉ số phần tử	Nút i		Nút j		Nút k		Nút l	
	1	2	3	4	5	6	7	8
Phần tử								
(1)	1	2	7	8	9	10	3	4
(2)	3	4	9	10	11	12	5	6
(3)	7	8	13	14	15	16	9	10
(4)	9	10	15	16	17	18	11	12

Chương 4. Cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn

Cũng có thể thấy rằng:

$$\bar{K}_{7,8} = K_{3,4}^{(1)} + K_{1,2}^{(3)}$$

$$\bar{K}_{11,12} = K_{5,6}^{(2)} + K_{7,8}^{(4)}$$

$$\bar{K}_{9,10} = K_{5,6}^{(1)} + K_{3,4}^{(2)} + K_{7,8}^{(3)} + K_{1,2}^{(4)}$$

$$\bar{K}_{9,9} = K_{5,5}^{(1)} + K_{3,3}^{(2)} + K_{7,7}^{(3)} + K_{1,1}^{(4)}$$

5- Áp đặt điều kiện biên.

Hệ phương trình tổng thể $\bar{[K]} \{\bar{q}\} = \{\bar{P}\}$ có thể viết lại ở dạng khối như sau.

$$\begin{bmatrix} \bar{[K]}_{11} & \bar{[K]}_{12} \\ \bar{[K]}_{21} & \bar{[K]}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\bar{q}\}_1 \\ \{\bar{q}\}_2^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\bar{P}\}_1^b \\ \{\bar{P}\}_2 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Trong đó $\{\bar{q}\}_2^b$ vectơ chứa tất cả các bậc tự do (chuyển vị nút) đã biết

$\{\bar{q}\}_1$ vectơ chứa các bậc tự do chưa biết (còn lại trong $\{\bar{q}\}$)

thì $\{\bar{P}\}_1^b$ là vectơ tải gồm các phần tử đã biết.

và $\{\bar{P}\}_2$ là vectơ tải gồm các phần tử còn lại của $\{\bar{P}\}$ và là chưa biết.

Và phương trình dạng khối (4.60) có thể phân thành 2 hệ như sau.

$$\begin{cases} \bar{[K]}_{11} \{\bar{q}\}_1 + \bar{[K]}_{12} \{\bar{q}\}_2^b = \{\bar{P}\}_1^b \\ \bar{[K]}_{21} \{\bar{q}\}_1 + \bar{[K]}_{22} \{\bar{q}\}_2^b = \{\bar{P}\}_2 \end{cases}$$

Từ phương trình đầu, vì $\{\bar{q}\}_2^b$ đã biết, nên ta có phương trình xác định $\{\bar{q}\}_1$ là

$$\bar{[K]}_{11} \{\bar{q}\}_1 = \{\bar{P}\}_1^b - \bar{[K]}_{12} \{\bar{q}\}_2^b \quad (4.61)$$

Hay: $\{\bar{q}\}_1 = \bar{[K]}_{11}^{-1} (\{\bar{P}\}_1^b - \bar{[K]}_{12} \{\bar{q}\}_2^b)$

Và từ đó xác định được $\{\bar{P}\}_2$ thì phương trình còn lại:

$$\{\bar{P}\}_2 = \bar{[K]}_{12}^T \{\bar{q}\}_1 + \bar{[K]}_{22} \{\bar{q}\}_2^b \quad (4.62)$$

Trường hợp thường gặp là khi tất cả các bậc tự do (chuyển vị nút) cho trước là bằng 0, thì phương trình tìm $\{\bar{q}\}_1$ chỉ còn

$$\bar{[K]}_{11} \{\bar{q}\}_1 = \{\bar{P}\}_1^b$$

Phương trình này suy ra được một cách đơn giản từ phương trình tổng thể $\bar{[K]} \{\bar{q}\} = \{\bar{P}\}$ bằng cách xóa các hàng và cột tương ứng với các bậc tự do tương ứng trong $\{\bar{q}\}_1^b$ và có giá trị bằng không.