

Chương 3. Vỏ mỏng tròn xoay không chịu uốn. Uốn tấm mỏng.

Chương 3

VỎ MỎNG TRÒN XOAY KHÔNG CHỊU UỐN UỐN TẤM MỎNG

- 3.1. Vỏ mỏng tròn xoay không chịu uốn.**
- 3.2. Vài trường hợp đặc biệt của vỏ mỏng tròn xoay.**
- 2.3. Chuyển vị trong vỏ mỏng tròn xoay chịu tải đối xứng trực.**
- 2.4. Phương trình vi phân của tấm mỏng chịu uốn.**
- 2.5. Phương trình uốn tấm mỏng trong hệ tọa độ trụ.**
- 2.6. Điều kiện biên.**
- 2.7. Tấm chữ nhật tựa đơn bốn cạnh - nghiệm *Navier*.**
- 2.8. Tấm chữ nhật tựa đơn bốn cạnh - nghiệm *Lévy và Nádai*.**
- 2.9. Bài toán đối xứng trực của tấm tròn.**

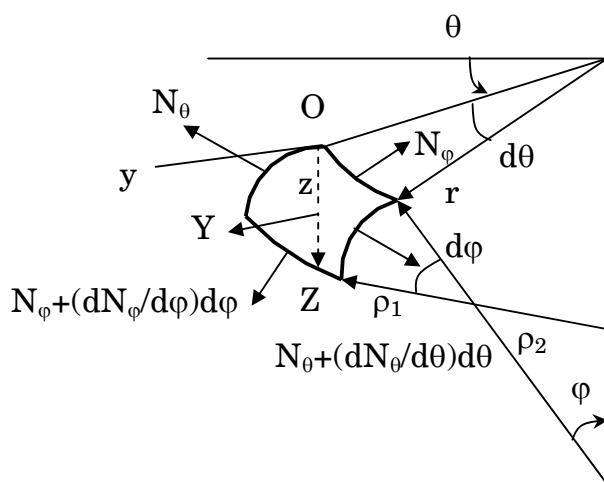
Chương 3. Vỏ mỏng tròn xoay không chịu uốn. Uốn tấm mỏng.

Trong chương này khảo sát hai dạng vật thể có chiều dày rất nhỏ. Vỏ mỏng tròn xoay là vật thể được giới hạn giữa hai mặt tròn xoay tạo bởi hai đường sinh song song cùng xoay quanh một trục, khoảng cách giữa hai mặt rất nhỏ so với các kích thước và các bán kính cong của chúng. Tấm mỏng là loại vật thể được giới hạn giữa hai mặt phẳng song song với nhau, khoảng cách giữa hai mặt phẳng rất nhỏ so với các kích thước khác của tấm. Khoảng cách giữa hai mặt tròn xoay hoặc giữa hai mặt phẳng nói trên được gọi là chiều dày của vật.

Đối với vỏ mỏng ta chỉ nghiên cứu tác dụng của các lực bề mặt có tính đối xứng trực. Trường hợp tấm mỏng sẽ đặc biệt quan tâm các trường hợp tấm tròn chỉ chịu tác dụng của các lực bề mặt đối xứng trực.

2.1. Vỏ mỏng tròn xoay không chịu uốn.

Mặt tròn xoay chia đôi bề dày của vỏ được gọi là mặt trung gian của vỏ. Đây là mặt danh nghĩa để mô tả và tính toán vỏ.



Hình 3.1

Mặt trung gian của vỏ được hình thành bởi một đường cong phẳng khi nó quay quanh một trục nằm trong mặt phẳng của nó. Mỗi vị trí của đường cong đó trên mặt trung gian được gọi là *kinh tuyến* (*meridian*), mặt phẳng tương ứng được gọi là *mặt phẳng kinh tuyến*. Giao của các mặt phẳng kinh tuyến là trục đối xứng của mặt trung gian.

Khảo sát một mặt nón có đỉnh trên trục đối xứng của mặt trung gian và mỗi đường sinh của nó vuông góc với một kinh tuyến. Giao tuyến của mặt trung gian với mỗi mặt nón như thế được gọi là một *vĩ tuyến* (*latitude*).

Hình 3.1 biểu diễn một phân tố diện tích mặt trung gian được giới hạn bởi hai kinh tuyến và hai vĩ tuyến lân cận nhau. Vị trí kinh tuyến được xác định bởi góc theta tính từ một mặt phẳng kinh tuyến nào đó; vị trí của vĩ tuyến được xác

Chương 3. Vỏ mỏng tròn xoay không chịu uốn. Uốn tâm mỏng.

định bởi góc φ là góc ở đỉnh của một mặt nón đã nói ở trên. Tại điểm bất kỳ của mặt trung gian, mặt phẳng kinh tuyến và mặt phẳng vuông góc với kinh tuyến là các mặt phẳng độ cong chính, các bán kính cong chính tương ứng là ρ_1 và ρ_2 . Bán kính của vĩ tuyến ký hiệu là r . Vậy chiều dài các cạnh của phân tố diện tích trên hình 3.1: $\rho_1 d\varphi$ và $rd\theta = \rho_2 \sin\varphi d\theta$. Diện tích của phân tố: $\rho_1 \rho_2 \sin\varphi d\varphi d\theta$.

Trong nhiều bài toán thực tế về vỏ mỏng có thể bỏ qua các ứng suất uốn, chỉ cần quan tâm đến các ứng suất tương ứng với các biến dạng trong mặt phẳng trung gian của vỏ. Như vậy có thể giả thiết rằng các ứng suất phân bố đều theo chiều dày của vỏ, tức là xem vỏ không chịu uốn. Lý thuyết tính ứng suất trong vỏ mỏng dựa trên giả thiết vỏ không chịu uốn gọi là lý thuyết không moment, bài toán tính các ứng suất trong vỏ mỏng theo lý thuyết này khá đơn giản.

Vì vỏ mỏng tròn xoay chỉ chịu tác dụng của các tải bề mặt đối xứng nên biến dạng của vỏ cũng có tính đối xứng trực. Dọc theo biên của phân tố không có các ứng suất tiếp, các ứng suất pháp thì không phụ thuộc vào tọa độ θ .

Các thành phần ứng suất pháp ký hiệu là σ_φ và σ_θ , các thành phần nội lực tương ứng tính trên một đơn vị chiều dài biên của phân tố ký hiệu là N_φ và N_θ . Theo định nghĩa, ta có:

$$N_\varphi = 1h\sigma_\varphi; \quad N_\theta = 1h\sigma_\theta \quad (3.1)$$

trong đó h là chiều dày của vỏ.

Cường độ lực bề mặt tác động trong mặt phẳng kinh tuyến được phân tích thành hai thành phần Y và Z song song với các trục tọa độ Oy và Oz.

Phân tố vỏ mỏng tương ứng với phân tố diện tích trên hình 3.1 chịu tác dụng của các lực sau:

$$\begin{aligned} Y\rho_1\rho_2 \sin\varphi d\varphi d\theta &= Y\rho_1 r d\varphi d\theta; \quad Z\rho_1\rho_2 \sin\varphi d\varphi d\theta = Z\rho_1 r d\varphi d\theta; \\ N_\theta \rho_1 d\varphi; \quad N_\varphi \rho_2 \sin\varphi d\theta &= N_\varphi r d\theta; \quad \left(N_\varphi + \frac{dN_\varphi}{d\varphi} d\varphi \right) \left(r + \frac{dr}{d\varphi} d\varphi \right) d\theta \end{aligned}$$

Chiếu lên phương tiếp tuyến của kinh tuyến tại O (trục Oy) tất cả các lực trên:

$$-2N_\theta d\varphi \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \cos\varphi = -N_\theta \rho_1 \cos\varphi d\varphi d\theta$$

$$N_\varphi \frac{dr}{d\varphi} d\varphi d\theta + \frac{dN_\varphi}{d\varphi} r d\varphi d\theta = \frac{d}{d\varphi} (r N_\varphi) d\varphi d\theta$$

Chương 3. Vỏ mỏng tròn xoay không chịu uốn. Uốn tấm mỏng.

Phương trình cân bằng của phân tố theo phương tiếp tuyến với kinh tuyến có dạng:

$$\frac{d}{d\varphi} (rN_\varphi) - N_\theta \rho_1 \cos \varphi + Y \rho_1 r = 0 \quad (3.2)$$

Chiếu tất cả các lực lên phương pháp tuyến của mặt trung gian tại điểm giữa của phân tố diện tích ta thu được đối với hợp lực của các lực ở biên trên và biên dưới của phân tố:

$$2N_\varphi r d\theta \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) \approx N_\varphi r d\varphi d\theta$$

đối với các lực ở hai biên bên trái và bên phải của phân tố:

$$2N_\theta \rho_1 d\varphi \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \sin \varphi \approx N_\theta \rho_1 \sin \varphi d\varphi d\theta$$

Phương trình cân bằng của phân tố theo phương pháp tuyến nói trên có dạng:

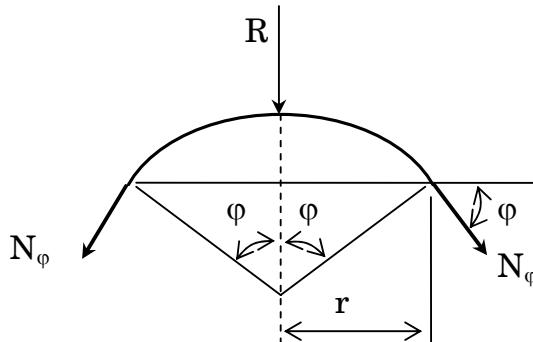
$$N_\varphi r + N_\theta \rho_1 \sin \varphi + Z \rho_1 r = 0 \quad \text{hay}$$

$$\frac{N_\varphi}{\rho_1} + \frac{N_\theta}{\rho_2} = -Z \quad (3.3)$$

Nếu xét cân bằng của một phần vỏ (hình 3.2), phần nằm trên vĩ tuyến xác định bởi góc φ , ta được:

$$2\pi N_\varphi \sin \varphi + R = 0 \quad (3.4)$$

với R là hợp lực của lực bề mặt toàn phần tác dụng trên phần vỏ nói trên.



Hình 3.2

Có thể dùng phương trình cân bằng (3.4) thay cho phương trình cân bằng (3.2). Nếu xác định được N_φ thì từ (3.3) ta sẽ xác định được N_θ .

Như vậy, trong từng trường hợp cụ thể, bài toán xác định ứng suất trong vỏ mỏng không chịu uốn sẽ giải được một cách dễ dàng.

Chương 3. Vỏ mỏng tròn xoay không chịu uốn. Uốn tâm mỏng.

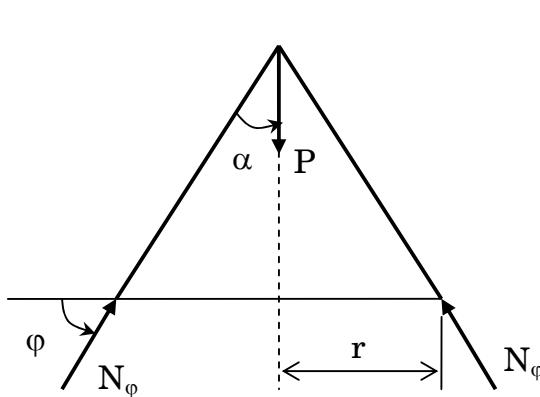
2.2. Vài trường hợp đặc biệt của vỏ mỏng tròn xoay.

2.2.1. Vỏ hình nón.

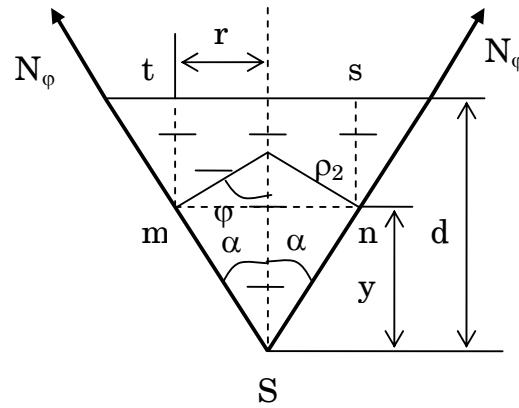
Xét trường hợp vỏ hình nón chịu lực tập trung P tác dụng theo trục hình nón (hình 3.3), từ (3.4) ta được:

$$N_\varphi = -\frac{P}{2\pi r \cos \alpha}$$

Vì $\rho_1 = \infty$ và $Z = 0$ nên từ (3.3) ta có: $N_\theta = 0$.



Hình 3.3



Hình 3.4

Xét trường hợp vỏ hình nón chứa đầy chất lỏng có trọng lượng riêng γ . Áp suất ở mức vĩ tuyến mn (hình 3.4) được biểu diễn như sau:

$$p = -Z = \gamma(d - y)$$

Ngoài ra, ta có $\rho_1 = \infty$, $\rho_2 = r/\sin\varphi = (ytg\alpha)/\cos\alpha$. Từ (3.3) ta thu được :

$$N_\theta = \gamma(d - y) \frac{ytg\alpha}{\cos\alpha}$$

Lực N_θ đạt cực đại tại $y = d/2$:

$$N_{\theta \max} = \frac{\gamma d^2 \operatorname{tg}\alpha}{4 \cos\alpha}$$

Xét riêng phần vỏ Smn ta tính được:

$$R = -\pi\gamma y^2 \left(d - y + \frac{y}{3} \right) \operatorname{tg}^2\alpha$$

Trị số trên đúng bằng trọng lượng khối chất lỏng trong phần vỏ nón Smn cộng với trọng lượng khối chất lỏng trong phần hình trụ mnst. Từ (3.4), ta tìm được:

Chương 3. Vỏ mỏng tròn xoay không chịu uốn. Uốn tấm mỏng.

$$N_{\varphi} = \frac{\gamma y \left(d - \frac{2}{3} y \right) \operatorname{tg} \alpha}{2 \cos \alpha}$$

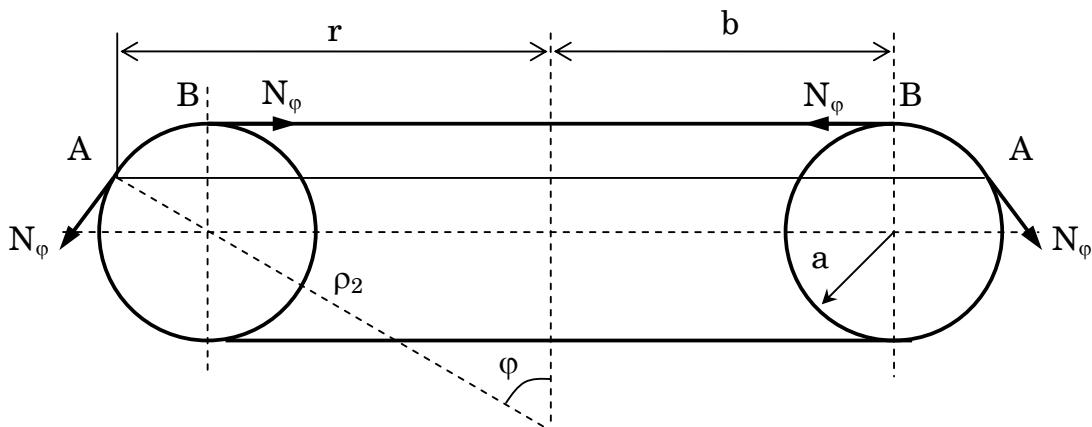
Lực này đạt giá trị cực đại tại $y = 3d/4$:

$$N_{\varphi \max} = \frac{3}{16} \frac{\gamma d^2 \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}$$

Nếu các phản lực tựa hướng theo đường sinh của vỏ thí các biểu thức N_{θ} và N_{φ} tìm được ở trên biểu diễn sự phân bố ứng suất trong vỏ khá chính xác.

2.2.2. Vỏ hình xuyến.

Giả sử vỏ hình xuyến được hình thành bởi đường tròn bán kính a quay quanh trục thẳng đứng (hình 3.5).



Hình 3.5

Khảo sát sự cân bằng của phần vỏ dạng vành được biểu diễn trên hình 3.5 bởi cung AB. Các lực N_{φ} tại vĩ tuyến BB có phương ngang nên không xuất hiện trong phương trình cân bằng theo phương đứng, ta chỉ cần quan tâm đến các lực N_{φ} tại vĩ tuyến AA.

Xét trường hợp vỏ chịu tác dụng của áp lực đều bên trong p . Phương trình cân bằng theo phương đứng dạng (3.4):

$$2\pi N_{\varphi} \sin \varphi = \pi(r^2 - b^2)p$$

Do đó:

$$N_{\varphi} = \frac{p(r^2 - b^2)}{2r \sin \varphi} = \frac{pa(r + b)}{2r}$$

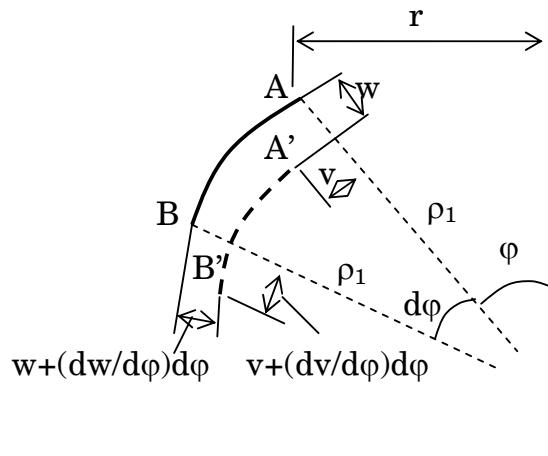
Thay kết quả trên vào (3.3) ta sẽ có:

Chương 3. Vỏ mỏng tròn xoay không chịu uốn. Uốn tâm mỏng.

$$N_\theta = \frac{p(r - b)}{2 \sin \varphi} = \frac{pa}{2}$$

2.3. Chuyển vị trong vỏ mỏng tròn xoay chịu tải đối xứng trực.

Biến dạng của vỏ mỏng trong trường hợp này tất nhiên sẽ có tính đối xứng trực. Ta có thể phân tích chuyển vị của một điểm bất kỳ ra làm hai thành phần: thành phần v theo phương tiếp tuyến với kinh tuyến và thành phần w theo phương pháp tuyến với mặt trung gian.



Hình 3.6

Xét phân tố chiều dài AB của kinh tuyến (hình 3.6). Ta nhận thấy rằng cả hai thành phần chuyển vị đều ảnh hưởng đến độ tăng chiều dài của phân tố. Do các chuyển vị v và $v + (dv/d\varphi)d\varphi$ của hai đầu A và B, độ tăng chiều dài phân tố bằng $(dv/d\varphi)d\varphi$. Các chuyển vị w của hai đầu A và B tuy có khác nhau nhưng lượng khác nhau đó là vô cùng bé bắc cao, nên ta xem các chuyển vị w của hai đầu A và B là như nhau. Các chuyển vị này làm chiều dài của phân tố co lại, độ co bằng $w d\varphi$. Lượng thay đổi chiều dài tổng cộng của phân tố AB:

$$\frac{dv}{d\varphi} d\varphi - w d\varphi$$

Biến dạng dài theo phương kinh tuyến:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{\rho_1} \frac{dv}{d\varphi} - \frac{w}{\rho_1} \quad (a)$$

Nếu xét biến dạng dài theo phương vĩ tuyến thì ta nhận thấy bán kính r của đường tròn vĩ tuyến tăng một lượng $\Delta r = v \cos \varphi - w \sin \varphi$. Chiều dài của đường vĩ tuyến tăng một lượng $2\pi \Delta r$, do đó biến dạng dài theo phương vĩ tuyến:

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} (v \cos \varphi - w \sin \varphi)$$

Chương 3. Vỏ mỏng tròn xoay không chịu uốn. Uốn tấm mỏng.

Thay $r = \rho_2 \sin\varphi$, ta được:

$$\varepsilon_\theta = \frac{v}{\rho_2} \cot g\varphi - \frac{w}{\rho_2} \quad (b)$$

Khử đi chuyển vị w từ hai hệ thức (a) và (b), ta sẽ thu được phương trình vi phân để xác định thành phần chuyển vị v :

$$\frac{dv}{d\varphi} - v \cot g\varphi = \rho_1 \varepsilon_\varphi - \rho_2 \varepsilon_\theta \quad (c)$$

Áp dụng định luật *Hooke* ta có thể biểu diễn các thành phần biến dạng ε_φ và ε_θ theo các lực N_φ và N_θ :

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{Eh} (N_\varphi - v N_\theta); \quad (d)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{Eh} (N_\theta - v N_\varphi)$$

Đem thay (d) vào (c) ta được:

$$\frac{dv}{d\varphi} - v \cot g\varphi = \frac{1}{Eh} [N_\varphi (\rho_1 + v \rho_2) - N_\theta (\rho_2 + v \rho_1)] \quad (3.5)$$

Trong từng trường hợp riêng có thể tìm được các lực N_φ và N_θ từ điều kiện chịu tải của vỏ.

2.4. Phương trình vi phân của tấm mỏng chịu uốn.

2.4.1. Khái niệm và giả thiết.

2.4.1.1. Khái niệm.

Tấm là vật thể hình dạng phẳng có bề dày h nhỏ hơn nhiều so với kích thước theo hai phương còn lại. Khi tỉ lệ $h/\ell \leq 1/5$, với ℓ là cạnh ngắn, thì tấm sẽ được xem là mỏng. Hầu hết các bài toán tấm trong kỹ thuật đều thuộc loại tấm mỏng. Nếu tấm có chiều dày lớn hơn thì trở thành bài toán tấm dày hay đàn hồi không gian.

Mặt trung gian (mặt giữa, mặt trung hòa) là mặt phẳng chia đôi bề dày tấm. Với khái niệm mặt trung gian, vật thể tấm ba chiều được mô tả thành bài toán hai chiều.

2.4.1.2. Giả thiết.

Khi tấm chịu uốn, chuyển vị theo phương trực tọa độ z của điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng trung gian gọi là độ võng của tấm. Vị trí mới của mặt phẳng trung gian gọi là mặt trung gian khi uốn. Nếu độ võng của tấm có trị số nhỏ hơn nhiều so với chiều dày của nó thì ta thừa nhận các giả thiết sau đây:

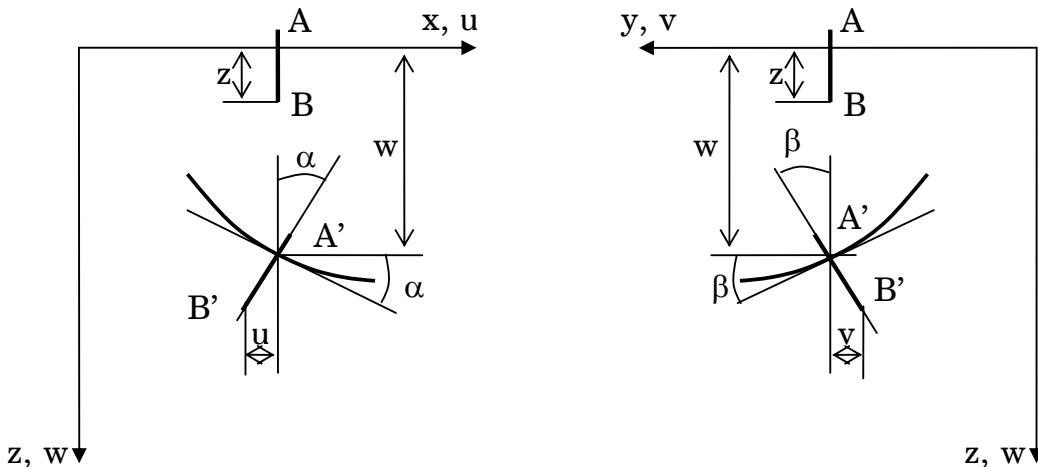
Chương 3. Vỏ mỏng tròn xoay không chịu uốn. Uốn tấm mỏng.

- Pháp tuyến với mặt phẳng trung gian luôn vuông góc với mặt trung gian trong suốt quá trình biến dạng. Điều này có nghĩa là bỏ qua biến dạng dài theo phương pháp tuyến: $\varepsilon_z = 0$. Giả thiết này do Kirchoff đề xuất.
- Thành phần ứng suất pháp σ_z có trị số bé hơn nhiều so với các thành phần ứng suất khác và có thể bỏ qua. Trong thực tế, ứng suất pháp σ_z lớn nhất trong tấm bằng với tải trọng phân bố tác dụng lên bề mặt tấm. Trị số này thường rất bé so với các thành phần ứng suất trong mặt phẳng tấm.
- Mặt trung gian không bị co giãn khi tấm chịu uốn.
- Biến dạng và độ võng của tấm bé. Giả thiết này cho phép khảo sát sự cân bằng của tấm theo hình dạng hình học ban đầu và đơn giản hóa các phương trình toán học bằng cách bỏ qua các lượng vô cùng bé bậc cao.

2.4.2. Phương trình vi phân của tấm mỏng chịu uốn.

2.4.2.1. Phương trình hình học.

Ký hiệu các thành phần chuyển vị của điểm trên mặt trung hòa là u, v, w (w được gọi là độ võng của tấm). Góc nghiêng của pháp tuyến với mặt trung gian trong các mặt phẳng song song với các mặt phẳng tọa độ xz và yz là α và β (hình 3.7).



Hình 3.7

Ta sẽ khảo sát các mặt cắt của tấm song song với các mặt phẳng tọa độ xz và yz như biểu diễn trên hình 3.7. Xét pháp tuyến AB với mặt phẳng trung gian. Khi chịu uốn, AB sẽ có vị trí $A'B'$ và $A'B'$ vẫn vuông góc với mặt cong trung gian. Theo giả thiết thứ nhất, các thành phần chuyển vị của điểm B :

$$u \approx -ztg\alpha; \quad v = -ztg\beta$$

Vì độ võng $w \ll 1$ nên:

Chương 3. Vỏ mỏng tròn xoay không chịu uốn. Uốn tấm mỏng.

$$\tan \alpha = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \tan \beta = \frac{\partial w}{\partial y}$$

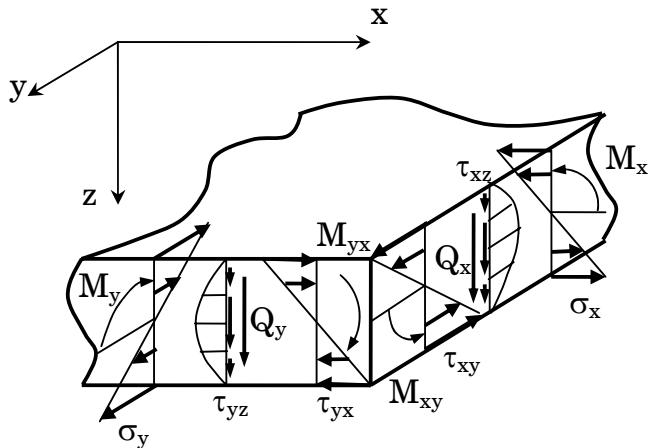
Do đó:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}; \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.6)$$

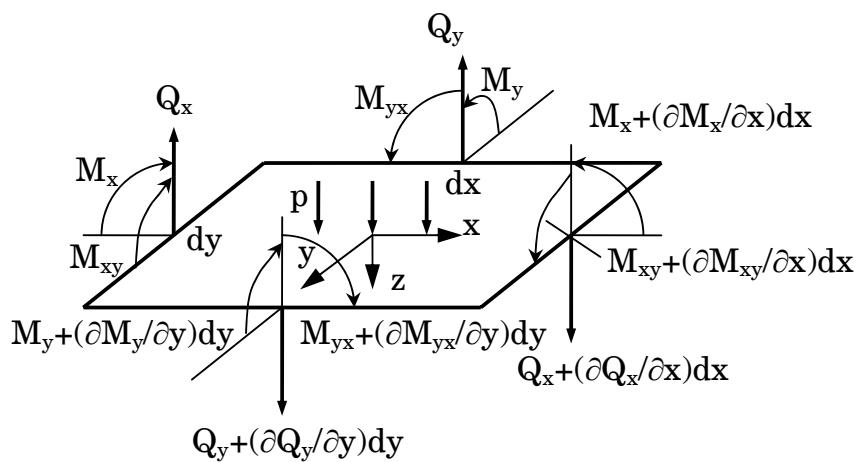
Áp dụng công thức Cauchy (1.22) vào các hệ thức (3.6) ta nhận được:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.7)$$

2.4.2.2. Phương trình vật liệu.



Hình 3.8



Hình 3.9

Dựa vào giả thiết thứ hai, ta thừa nhận $\sigma_z = 0$. Theo định luật Hooke và (3.7) ta được:

Chương 3. Vỏ mỏng tròn xoay không chịu uốn. Uốn tấm mỏng.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{Ez}{1-v^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-v^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+v} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (3.8)$$

Đối với tấm, các thành phần nội lực phân bố trên đơn vị chiều dài được định nghĩa như sau:

- Moment uốn M_x là *moment* do thành phần ứng suất σ_x tác động trên mặt cắt vuông góc với trục x tạo thành, làm mặt cắt này bị uốn quanh trục tọa độ y.

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Ez}{1-v^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z dz$$

Vì w là độ võng của mặt trung gian nên $w = w(x,y)$, do đó:

$$M_x = -\frac{Ez}{1-v^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.9a)$$

với độ cứng uốn trụ của tấm:

$$D = -\frac{Eh^3}{12(1-v^2)} \quad (3.9b)$$

- Moment uốn M_y là *moment* do thành phần ứng suất σ_y tác động trên mặt cắt vuông góc với trục y tạo thành, làm mặt cắt này bị uốn quanh trục tọa độ x.

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Ez}{1-v^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.10)$$

- Moment xoắn M_{xy} , M_{yx} là *moment* do thành phần ứng suất τ_{xy} , τ_{yx} tác động trên mặt cắt vuông góc với trục x, trục y một cách tương ứng tạo thành, làm các mặt cắt này bị xoắn quanh trục tọa độ x, y.

$$M_{xy} = M_{yx} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Ez}{1+v} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z dz = D(1-v) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.11)$$

- Lực cắt Q_x , Q_y là lực do thành phần ứng suất τ_{xz} , τ_{yz} tác động trên mặt cắt vuông góc với trục x, trục y một cách tương ứng tạo thành.

Chương 3. Vỏ mỏng tròn xoay không chịu uốn. Uốn tấm mỏng.

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz; \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \quad (3.12)$$

Sự phân bố của các thành phần ứng suất trên cắt tấm, sự hình thành các thành phần nội lực từ các thành phần ứng suất và qui ước chiều dương của các thành phần nội lực trên các mặt cắt được minh họa trên hình 3.8 và 3.9.

2.4.2.3. Phương trình cân bằng.

Xét phân tố vô cùng bé như hình 3.9, nếu không xét đến lực thể tích và bỏ qua các vô cùng bé bậc ba, ta chỉ có ba điều kiện cân bằng của phân tố:

$$\bullet \sum F_z = \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy + pdxdy = 0 \quad (3.13)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0$$

$$\bullet \sum M_x = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy - \frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy + Q_y dx dy = 0 \quad (3.14)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0$$

$$\bullet \sum M_y = -\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dx dy + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx dy - Q_x dx dy = 0 \quad (3.15)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial M_x}{\partial x} + Q_x = 0$$

Từ (3.14), (3.15) và sử dụng (3.9), (3.10), (3.11) ta thu được:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[D(1-v) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[D(1-v) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]$$

Trường hợp tấm có chiều dày không đổi ($h = const$) thì $D = const$, ta có:

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.16)$$

Thay các hệ thức trong (3.16) vào (3.13) ta nhận được phương trình vi phân cấp bốn đối với độ võng w :

Chương 3. Vỏ mỏng tròn xoay không chịu uốn. Uốn tấm mỏng.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}$$

hay:

$$\nabla^4 w = \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{p}{D} \quad (3.17)$$

với ký hiệu:

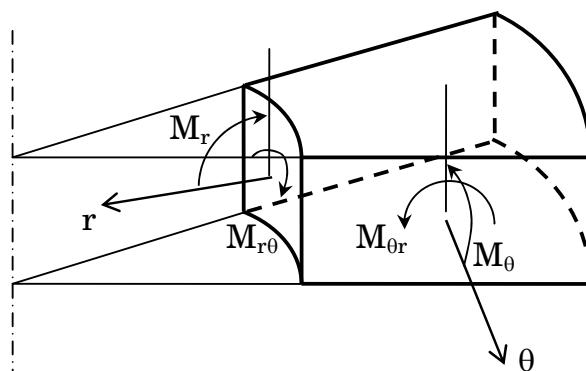
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Phương trình chủ đạo (3.17) thỏa mãn các phương trình hình học, phương trình vật liệu và phương trình cân bằng. Như vậy bài toán uốn tấm mỏng được quy về tích phân phương trình vi phân (3.17) và các hằng số tích phân sẽ được xác định từ các điều kiện biên của bài toán tấm.

Đối với bài toán tấm trên nền đàm hồi Winkler, về phái của phương trình (3.17) trở thành $(p - kw)/D$, trong đó k là hệ số nền. Phương trình chủ đạo của bài toán tấm trên nền đàm hồi có dạng:

$$\nabla^4 w = \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{p - kw}{D} \quad (3.18)$$

2.5. Phương trình uốn tấm mỏng trong hệ tọa độ trụ.



Hình 3.10

Như đã thiết lập ở mục 4.1 của chương 4 trong tài liệu Lý thuyết đàm hồi, đối với bài toán trong hệ tọa độ cực (bài toán hai chiều trong mặt phẳng vuông góc với trục z của hệ tọa độ trụ), toán tử Laplace có dạng:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

Chương 3. Vỏ mỏng tròn xoay không chịu uốn. Uốn tấm mỏng.

Do đó, phương trình chủ đạo của bài toán uốn tấm mỏng sẽ có dạng:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w = \frac{p}{D} \quad (3.19)$$

Tại các mặt cắt với các pháp tuyến r và θ ta ký hiệu các *moment* uốn tương ứng là M_r , M_θ và *moment* xoắn là $M_{r\theta}$. Giả sử rằng trục Ox trùng với pháp tuyến r , lúc đó các *moment* M_r , M_θ và $M_{r\theta}$ có những công thức xác định tương tự như các *moment* M_x , M_y và M_{xy} (hình 3.10).

Sử dụng các công thức biến đổi hệ trục tọa độ (d), (e), (f) ở mục 4.1 của chương 4 trong tài liệu Lý thuyết đàn hồi và cho $\theta = 0$, ta nhận được:

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + v \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right]; \\ M_\theta &= -D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right); \\ M_{r\theta} &= D(1-v) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Bằng cách tương tự, từ (3.16) ta thu được các công thức xác định các lực cắt:

$$\begin{aligned} Q_r &= -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w); \\ Q_\theta &= -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 w) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (3.19) như sau:

$$w = w_0 + w_1$$

trong đó w_0 là một nghiệm riêng của phương trình (3.19), w_1 là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất:

$$\nabla^2 \nabla^2 w_1 = 0 \quad (3.22)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (3.22) có dạng:

$$w_1 = R_0^{(0)}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n^{(1)}(r) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} R_n^{(2)}(r) \sin n\theta \quad (3.23)$$

Nghiệm $R_0^{(0)}(r)$ chỉ phụ thuộc bán kính r , biểu diễn *uốnđối xứng tấm tròn*.

Chương 3. Vỏ mỏng tròn xoay không chịu uốn. Uốn tấm mỏng.

Thay nghiệm (3.23) vào phương trình (3.22) ta được phương trình:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) R_n^{(k)} = 0$$

trong đó $k = 0, 1, 2$. Nghiệm tổng quát của phương trình này có dạng:

• Khi $n = 0$: $R_0^{(0)}(r) = A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r$ (3.24)

• Khi $n = 1$: $R_1^{(k)}(r) = A_1^{(k)} r + B_1^{(k)} r^3 + \frac{C_1^{(k)}}{r} + D_1^{(k)} r \ln r$ (3.25)

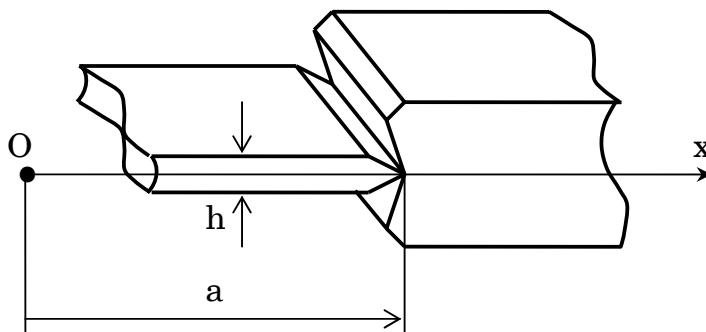
• Khi $n \geq 2$: $R_1^{(k)}(r) = A_n^{(k)} r^n + \frac{B_n^{(k)}}{r^n} + C_n^{(k)} r^{n+2} + D_n^{(k)}$ (3.26)

Các hằng số tích phân $A_n^{(k)}, B_n^{(k)}, C_n^{(k)}$ và $D_n^{(k)}$ sẽ được xác định từ các điều kiện biên của tấm.

2.6. Điều kiện biên.

Phương trình vi phân chủ đạo của tấm mỏng chịu uốn (3.17) viết cho độ vồng w , nên các điều kiện biên động học cũng phải được biểu diễn cho w . Cụ thể, ta sẽ xác định điều kiện biên cho cạnh $x = a$ như trên hình 3.11, ứng với 3 trường hợp cạnh tựa đơn (khớp), ngầm và tự do.

2.6.1. Cạnh tựa đơn.



Hình 3.11

Chuyển vị đứng và moment uốn dọc theo cạnh tấm tựa đơn bằng không.

Tại $x = a$ ta có: $w = 0$ và

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

Chương 3. Vỏ mỏng tròn xoay không chịu uốn. Uốn tấm mỏng.

Vì $w = 0$ dọc theo cạnh $x = a$, tức là $\partial w / \partial y = 0$ hay $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$. Do đó, điều kiện biên trở thành:

$$w = 0 \text{ và } \partial^2 w / \partial x^2 = 0 \quad (3.27)$$

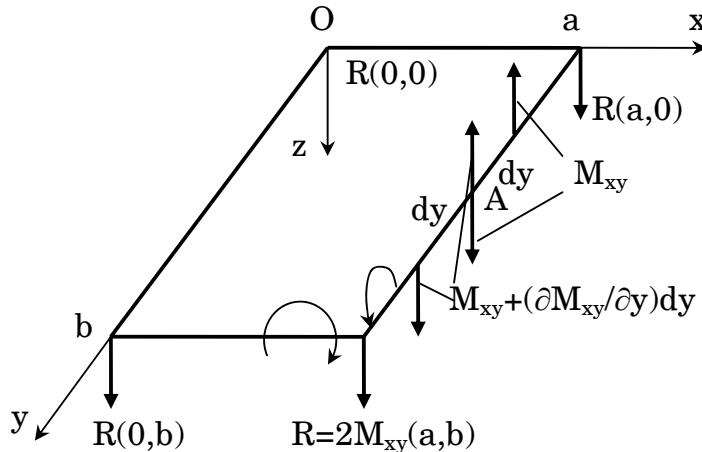
2.6.2. Cạnh ngầm.

Tại $x = a$ ta có: $w = 0$ và $\partial w / \partial x = 0$ (3.28)

2.6.3. Cạnh tự do.

Nếu tại cạnh $x = a$ không có tải tập trung thí tại đó ta sẽ có các điều kiện biên tĩnh học: $M_x = 0$ (1); $M_{xy} = 0$ (2); $Q_x = 0$ (3).

Chỉ cần hai trong ba điều kiện biên tĩnh học trên là đủ xác định độ vồng thỏa mãn (3.17). Sự dư điều kiện biên là do dùng giả thiết 1, xem pháp tuyến vuông góc với mặt trung gian trong quá trình biến dạng. Thực ra, nếu quan tâm đến biến dạng trượt thì pháp tuyến sẽ không vuông góc với mặt trung gian trong quá trình biến dạng. Lúc này phương trình chủ đạo (3.17) sẽ có bậc sáu, có nhiều hằng số tích phân và các điều kiện biên tĩnh học trên trở nên đủ. Tuy nhiên bài toán sẽ phức tạp rất nhiều. Vì vậy để phù hợp với giả thiết 1, Kirchoff đã kết hợp hai điều kiện biên (2) và (3) thành một điều kiện (2') với lập luận được trình bày sau đây và được minh họa trên hình 3.12.



Hình 3.12

Xét cạnh $x = a$ của tấm. Trên phân tố chiều dài dy có moment xoắn $M_{xy}dy$ được thay bằng ngẫu hai lực đứng có trị số M_{xy} với cánh tay đòn của ngẫu là dy . Trên phân tố chiều dài dy tiếp theo có moment xoắn $[M_{xy} + (\partial M_{xy} / \partial y)dy]dy$ cũng được thay bằng ngẫu hai lực đứng có trị số $[M_{xy} + (\partial M_{xy} / \partial y)dy]$ với cánh tay đòn của ngẫu là dy . Tại điểm A có hợp lực là $(\partial M_{xy} / \partial y)dy$ có chiều hướng lên (dấu âm).

Nếu kết hợp Q_x và moment xoắn M_{xy} thành một lực đứng, ta có điều kiện biên trên cạnh $x = a$ như sau:

Chương 3. Vỏ mỏng tròn xoay không chịu uốn. Uốn tấm mỏng.

$$V_x = \left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) = 0 \quad (2')$$

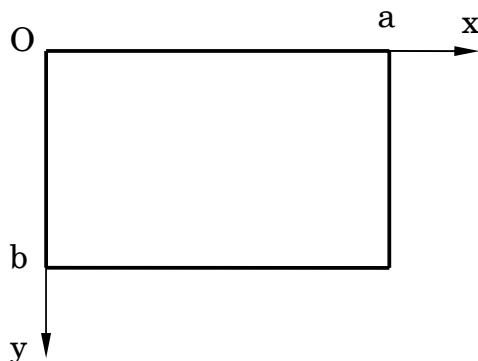
Viết lại (1) và (2') theo độ vồng w , dùng (3.11) và (3.16) ta có:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \quad (3.29)$$

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} = 0 \quad (3.30)$$

Nếu tấm tựa đơn trên các cạnh thì lực đứng chính là phản lực tác dụng lên biên. Tại góc tấm, lực tập trung do *moment* xoắn trên hai cạnh truyền xuống là $R = 2M_{xy}$. Khi tấm bị vồng, góc tấm có xu hướng chuyển vị đi lên, lực tập trung này có tác dụng đảm bảo điều kiện chuyển vị đứng bằng không.

2.7. Tấm chữ nhật tựa đơn bốn cạnh - nghiệm Navier.



Hình 3.13

Khảo sát tấm chữ nhật tựa đơn bốn cạnh (hình 3.13), chịu tải vuông góc với mặt tấm theo một qui luật cho trước $p = p(x,y)$.

Phương trình vi phân của mặt trung gian bị vồng có dạng (3.17):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D} \quad (3.31)$$

với các điều kiện biên:

$$w = 0 \text{ và } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ tại } x = 0 \text{ và } x = a.$$

$$w = 0 \text{ và } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ tại } y = 0 \text{ và } y = b. \quad (3.32)$$

Hàm độ vồng được chọn theo chuỗi Fourier thỏa các điều kiện biên như sau:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.33)$$

Chương 3. Vỏ mỏng tròn xoay không chịu uốn. Uốn tấm mỏng.

Khai triển tải tác động $p(x,y)$ theo chuỗi Fourier:

$$p(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.34)$$

Nhân hai vế với $\sin \frac{m'\pi x}{a} \sin \frac{n'\pi y}{b}$ và tích phân:

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_0^b p(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \\ & = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a \int_0^b a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m'\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n'\pi y}{b} dx dy \end{aligned} \quad (*)$$

Chú ý rằng:

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m'\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0, & m \neq m' \\ \frac{a}{2}, & m = m' \end{cases}$$

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n'\pi x}{b} dy = \begin{cases} 0, & n \neq n' \\ \frac{b}{2}, & n = n' \end{cases}$$

Do đó vế phải của biểu thức (*) bằng $(ab/4)a_{mn}$. Từ đó suy ra:

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (3.35)$$

Để xác định A_{mn} , ta thay (3.33) và (3.34) vào (3.31) ta có:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] - \frac{a_{mn}}{D} \right\}$$

$$\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0$$

Vì phương trình phải đúng với mọi x, y nên mỗi số hạng của chuỗi phải bằng không, nghĩa là:

$$A_{mn} \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{a_{mn}}{D} = 0 \quad \text{hay}$$

$$A_{mn} = \frac{1}{\pi^4 D} \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

Chương 3. Vỏ mỏng tròn xoay không chịu uốn. Uốn tâm mỏng.

Thay kết quả trên vào (3.33) ta thu được:

$$w(x,y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.36)$$

Trường hợp đặc biệt $p(x,y) = \text{const} = p$, từ (3.35) ta có:

$$a_{mn} = \frac{16p}{\pi^2 mn} \quad \text{với } m, n \text{ lẻ (đối xứng)}$$

$$a_{mn} = 0 \quad \text{với } m, n \text{ chẵn (phản đối xứng)}$$

Phương trình mặt trung gian khi bị vồng:

$$w(x,y) = \frac{16p}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.37)$$

Độ vồng cực đại tại giữa tâm:

$$w_{\max} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) = \frac{16p}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (3.38)$$

Chuỗi hội tụ rất nhanh nên chỉ cần lấy vài số hạng đầu của chuỗi. Với $v = 0,3$, tâm vuông $a = b$, lấy bốn số hạng đầu ta có:

$$w_{\max} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right) = 0,0443p \frac{a^4}{Eh^3}$$

Biểu thức của *moment uốn*:

$$M_x = \frac{16p}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\left(\frac{m^2}{a^2} + v \frac{n^2}{b^2} \right)}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.39)$$

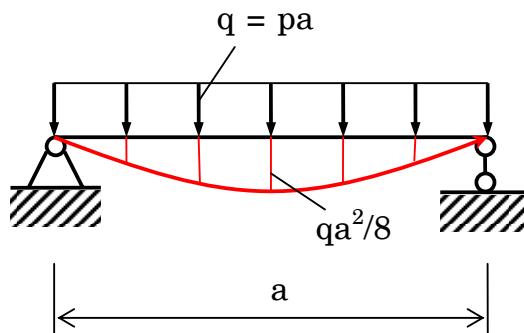
$$M_y = \frac{16p}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\left(v \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.40)$$

Chương 3. Vỏ mỏng tròn xoay không chịu uốn. Uốn tấm mỏng.

Moment uốn lớn nhất ở giữa tấm. Với $v = 0,3$, tấm vuông $a = b$, lấy năm số hạng đầu ta có:

$$M_{\max} = M_x \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) = M_y \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) = 0,0479pa^2$$

Cần nhắc lại rằng, nội lực trong tấm là nội lực phân bố trên một đơn vị chiều dài.



Hình 3.14

So với tấm vuông tựa trên hai cạnh như hình 3.14 và sử dụng kết quả của lý thuyết đầm, ta có:

$$M_{\max(\text{đầm})} = \frac{qa^2}{8a} = \frac{qa}{8} = \frac{pa^2}{8} = 0,125pa^2 = 2,61M_{\max(\text{tấm})}$$

Như vậy nội lực trong tấm bốn cạnh làm việc hai phương nhỏ hơn nhiều so với tấm làm việc theo một phương, nên có thể làm mỏng tấm hơn so với tấm làm việc theo một phương.

2.8. Tấm chữ nhật tựa đơn bốn cạnh - nghiệm Lévy và Nádai.

Khảo sát lại tấm chữ nhật tựa đơn bốn cạnh (hình 3.15), chịu tải phân bố đều vuông góc với mặt tấm p. Hệ trực tọa độ chọn như hình vẽ.

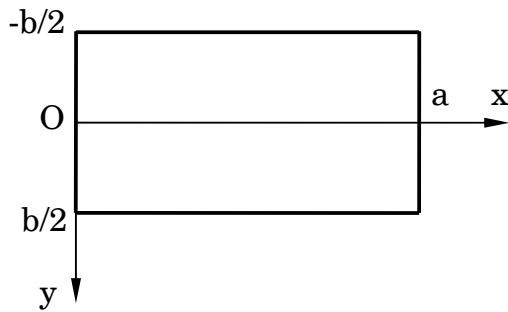
Lévy chọn nghiệm dạng:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (3.41)$$

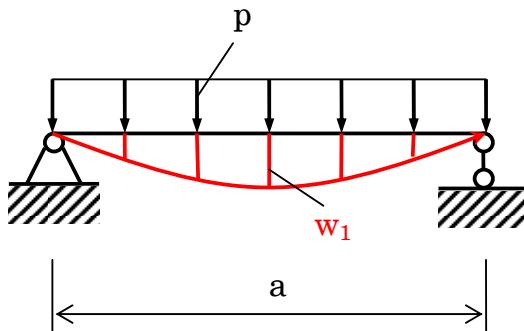
$Y_m = Y_m(y)$ là hàm đơn biến y và phải thỏa mãn điều kiện biên tại $y = \pm b/2$ và phương trình mặt độ vồng:

$$\nabla^4 w = \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{p}{D} \quad (a)$$

Chương 3. Vỏ mỏng tròn xoay không chịu uốn. Uốn tâm mỏng.



Hình 3.15



Hình 3.16

Nádai (1915) đã chọn nghiệm hội tụ nhanh hơn có dạng:

$$w = w_1 + w_2$$

$$\text{trong đó } w_1 = \frac{p}{24D} (x^4 - 2ax^3 + a^3x)$$

là độ võng của dải song song với trục Ox, thỏa phương trình (a) như minh họa trên hình 3.16. w_1 là nghiệm riêng không thuần nhất của phương trình (a), w_2 là nghiệm thuần nhất, tức là thỏa mãn phương trình:

$$\nabla^4 w_2 = \nabla^2 \nabla^2 w_2 = 0 \quad (b)$$

Chọn w_2 theo (3.41) và thay vào (b), ta có:

$$\sum_{m=1,3,5}^{\infty} \left(Y_m^{IV} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m^{II} + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m \right) \sin \frac{m\pi x}{a} = 0 \quad (c)$$

m lấy trị số lẻ do tính đối xứng của mặt võng đối với trục x. Vì (c) phải thỏa mãn với mọi x nên:

$$Y_m^{IV} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m^{II} + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m = 0 \quad (d)$$

Giải phương trình vi phân cấp bốn (d) ta thu được nghiệm:

Chương 3. Võ mỏng tròn xoay không chịu uốn. Uốn tấm mỏng.

$$Y_m = \frac{pa^4}{D} \left(A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + C_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (3.42)$$

Vì mặt võng đối xứng trục x, nên $C_m = D_m = 0$. Vậy mặt võng có phương trình:

$$w = \frac{p}{24D} (x^4 - 2ax^3 + a^3x) + \frac{pa^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (e)$$

Các hằng số A_m và B_m được xác định từ điều kiện biên trên các cạnh $y = \pm b/2$:

$$w = 0 \text{ và } (\partial^2 w / \partial y^2) = 0 \quad (f)$$

Khai triển w_1 theo chuỗi Fourier:

$$w_1 = \frac{p}{24D} (x^4 - 2ax^3 + a^3x) = \frac{4pa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (g)$$

thay (g) vào (f) và dùng thêm ký hiệu $\alpha_m = m\pi b/(2a)$, ta sẽ thu được hệ phương trình:

$$\frac{4}{\pi^5 m^5} + A_m \cosh \alpha_m + \alpha_m B_m \sinh \alpha_m = 0 \quad (h)$$

$$(A_m + 2B_m) \cosh \alpha_m + \alpha_m B_m \sinh \alpha_m = 0$$

Giải hệ phương trình (h) ta xác định được các hằng số A_m và B_m :

$$A_m = -\frac{2(\alpha_m \tanh \alpha_m + 2)}{\pi^5 m^5 \cosh \alpha_m}; \quad B_m = \frac{2}{\pi^5 m^5 \cosh \alpha_m} \quad (i)$$

Thay (i), (g) vào (e) ta có phương trình mặt võng:

$$w = \frac{4pa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left(1 - \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \cosh \frac{2\alpha_m y}{b} + \frac{\alpha_m}{2 \cosh \alpha_m} \frac{2y}{b} \sinh \frac{2\alpha_m y}{b} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (3.43)$$

Độ võng giữa tâm ($x = a/2, y = 0$):

$$w = \frac{4pa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \left(1 - \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \right) \quad (j)$$

Chương 3. Vỏ mỏng tròn xoay không chịu uốn. Uốn tấm mỏng.

Chuỗi thứ nhất trong (j) hội tụ đến $\frac{5}{384} \frac{pa^4}{D}$

$$w_{\max} = \frac{5}{384} \frac{pa^4}{D} - \frac{4pa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \quad (3.44)$$

Chuỗi hội tụ rất nhanh, với tâm vuông $a = b$ ta có:

$$w_{\max} = \frac{5}{384} \frac{pa^4}{D} - \frac{4pa^4}{\pi^5 D} (0,68562 - 0,00025 + \dots) = 0,00406 \frac{pa^4}{D}$$

$$(M_x)_{\max} = 0,0479pa^2, \quad (M_y)_{\max} = 0,0479pa^2$$

Như vậy nghiệm *Nádai* trùng với nghiệm *Navier* nhưng hội tụ nhanh hơn.

Các bài toán tấm có hình dạng, điều kiện biên và tải trọng khác nhau được giải và trình bày dưới dạng bảng tra trong tài liệu *Theory of Plates and Shells* của S. P. Timoshenko rất tiện lợi trong việc thiết kế.

2.9. Bài toán đối xứng trực của tấm tròn.

Xét tấm tròn bán kính a , liên kết tựa hoặc liên kết ngầm dọc theo biên tròn chịu uốn bởi tải phân bố đều đối xứng quanh trục vuông góc tấm với cường độ p .

Do tính đối xứng trực, độ võng $w = w(r)$ là hàm đơn biến r và không phụ thuộc θ . Phương trình vi phân chủ đạo dưới dạng tọa độ cực (r, θ) :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) w = \frac{p}{D} \quad (3.43)$$

Nghiệm của bài toán (3.43) sẽ tìm dưới dạng:

$$w(r) = w_0(r) + R_0^{(0)}(r) \quad (1)$$

Trong đó w_0 là nghiệm riêng của (3.43) và có dạng:

$$w_0 = \frac{p}{64D} r^4 \quad (2)$$

Còn nghiệm $R_0^{(0)}(r)$ có dạng (3.24), nghĩa là:

$$w(r) = A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r + \frac{p}{64D} r^4 \quad (3)$$

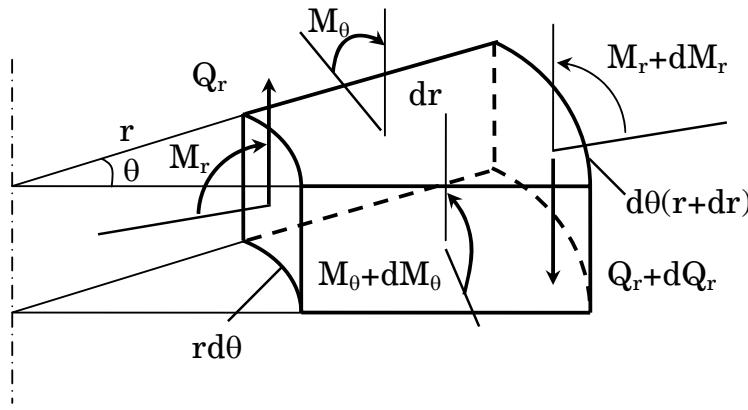
Thay (3) vào (3.20), (3.21) ta chỉ có các thành phần nội lực M_r, M_θ, Q_r vì các thành phần nội lực phản đối xứng khác bằng không. Các thành phần nội lực được biểu diễn theo độ võng:

Chương 3. Vỏ mỏng tròn xoay không chịu uốn. Uốn tấm mỏng.

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{v}{r} \frac{dw}{dr} \right); \\ M_\theta &= -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + v \frac{d^2 w}{dr^2} \right); \\ Q_r &= D \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.44)$$

Dựa vào (3.21) tại mặt cắt r ta có:

$$Q_r = -D \left(\frac{p}{2D} r + 4 \frac{D_0}{r} \right) \quad (4)$$



Hình 3.17

Từ điều kiện cân bằng của phần tấm tròn bán kính r ta có:

$$Q_r = -\frac{p}{2} r \quad (5)$$

$$\text{Do đó: } D_0 = 0 \quad (6)$$

Tại tâm tấm ($r = 0$) độ võng phải có giá trị xác định, do đó buộc:

$$C_0 = 0 \quad (7)$$

Như vậy:

$$w(r) = A_0 + B_0 r^2 + \frac{p}{64D} r^4 \quad (3.45)$$

Hai hằng số A_0 và B_0 được xác định từ các điều kiện biên cụ thể của bài toán.

2.9.1. Biên bán kính $r = a$ có liên kết khớp.

Điều kiện biên của bài toán:

Chương 3. Vỏ mỏng tròn xoay không chịu uốn. Uốn tâm mỏng.

$$w(a) = 0; \quad M_r|_{r=a} = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + v \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right]_{r=a} = 0 \quad \text{hay}$$

$$w(a) = 0; \quad \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{v}{r} \frac{dw}{dr} \right)_{r=a} = 0 \quad (3.46)$$

Hai hằng số A_0 và B_0 được xác định từ hệ phương trình sau:

$$A_0 + B_0 a^2 + \frac{p}{64D} a^4 = 0$$

$$2B_0 + \frac{3p}{16D} a^2 + v \left(2B_0 + \frac{p}{16D} a^2 \right) = 0 \quad (8)$$

Giải hệ phương trình (8) và lấy kết quả A_0 và B_0 thay vào (3.45) ta sẽ được:

$$w(r) = \frac{p}{64D} (a^2 - r^2) \left(\frac{5+v}{1+v} a^2 - r^2 \right) \quad (3.47)$$

Độ võng cực đại tại tâm tấm:

$$w_{max} = w(0) = \frac{5+v}{1+v} \frac{pa^4}{64D} \quad (3.48)$$

Thay kết quả (3.47) vào công thức đầu của (3.8) ta tìm được thành phần ứng suất σ_r :

$$\sigma_r = \frac{3(3+v)}{32} \frac{pz}{h^3} (a^2 - r^2) \quad (3.49)$$

Tại tâm tấm, thành phần ứng suất σ_r :

$$\sigma_r|_{r=0} = \frac{3(3+v)}{32} \frac{pa^2 z}{h^3} \quad (3.50)$$

Lời giải chính xác của thành phần ứng suất σ_r tại tâm tấm:

$$\sigma_r|_{r=0} = \frac{3(3+v)}{32} \frac{pa^2 z}{h^3} + \frac{2+v}{8} p \left(\frac{z^3}{h^3} - \frac{3z}{5h} \right) \quad (3.51)$$

So ánh hai kết quả trên ta nhận thấy số hạng bổ sung trong lời giải chính xác là bé so với số hạng cơ bản. Thí dụ với $v = 0,25$; tại $z = h$; chiều dày của tấm bé hơn nhiều so với bán kính: $2h/a = 1/20, 1/10, 1/5$ thi số hạng bổ sung tương ứng bằng: 0,94%, 3,8%, 15% số hạng cơ bản.

Các biểu thức *moment nội lực*:

Chương 3. Vỏ mỏng tròn xoay không chịu uốn. Uốn tấm mỏng.

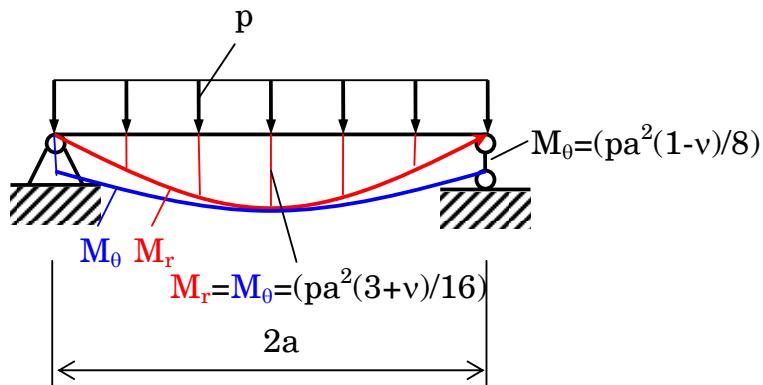
$$M_r = \frac{p}{16} (3 + v) (a^2 - r^2)$$

$$M_\theta = \frac{p}{16} [(3 + v)a^2 - (1 + 3v)r^2] \quad (3.52)$$

Moment cực đại tại tâm tấm $r = 0$:

$$M_{r\max} = M_r|_{r=0} = M_{\theta\max} = M_\theta|_{r=0} = \frac{3+v}{16} pa^2 \quad (3.53)$$

Các biểu đồ moment M_r và M_θ được biểu diễn trên hình 3.18.



Hình 3.18

2.9.2. Biên bán kính $r = a$ có liên kết ngầm.

Điều kiện biên của bài toán trong trường hợp liên kết ngầm dọc theo biên tròn bán kính a của tấm:

$$w(a) = 0; \quad (dw/dr)|_{r=a} = 0 \quad (3.54)$$

Thay (3.45) vào (3.54) ta thu được hệ hai phương trình xác định hai hằng số A_0 và B_0 :

$$A_0 + B_0 a^2 + \frac{p}{64D} a^4 = 0$$

$$2B_0 a + \frac{p}{16D} a^3 = 0 \quad (9)$$

Giải hệ phương trình (9) và lấy kết quả A_0 và B_0 thay vào (3.45) ta sẽ được:

$$w(r) = \frac{p}{64D} (a^2 - r^2)^2 \quad (3.55)$$

Độ võng cực đại tại tâm tấm:

Chương 3. Vỏ mỏng tròn xoay không chịu uốn. Uốn tâm mỏng.

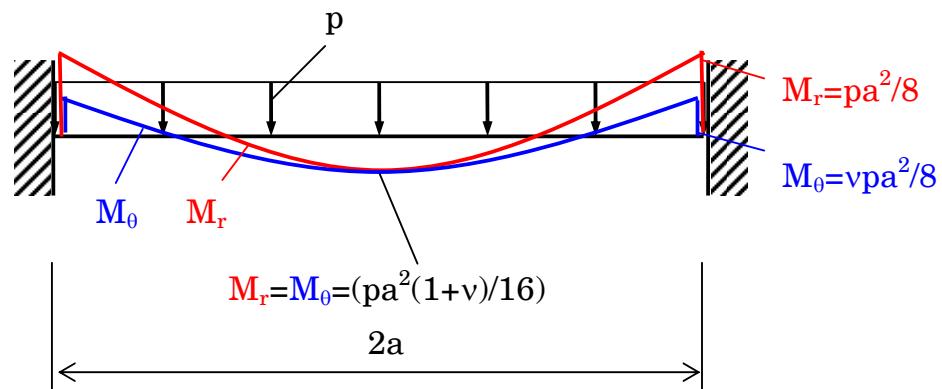
$$W_{\max} \Big|_{r=0} = \frac{pa^4}{64D} \quad (3.56)$$

Nếu $\nu = 0,3$, ta thấy độ võng cực đại tại tâm tấm có liên kết gối ở biên lớn hơn 4,077 lần so với trường hợp liên kết ngầm ở biên.

Các biểu thức *moment* nội lực:

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{p}{16} \left[(1+\nu)a^2 - (3+\nu)r^2 \right] \\ M_0 &= \frac{p}{16} \left[(1+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2 \right] \end{aligned} \quad (3.57)$$

Các biểu đồ *moment* M_r và M_0 được biểu diễn trên hình 3.19.



Hình 3.19