

Chương 2

BÀI TOÁN ĐỐI XỨNG TRỤC

- 2.1. Các phương trình tổng quát.
- 2.2. Hàm ứng suất *A. E. H. Love*.
- 2.3. Nghiệm dạng đa thức của phương trình $\nabla^4\Phi = 0$.
- 2.4. Tấm tròn chịu tác dụng của ngoại lực đối xứng trục.
- 2.5. Ứng suất trong vật thể kích thước lớn vô hạn.
- 2.6. Nửa không gian đàn hồi chịu lực tập trung trên mặt phẳng biên (Bài toán *Boussinesq*).
- 2.7. Bài toán *H. Hertz* về áp lực giữa hai vật thể tiếp xúc với nhau.

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

Đối tượng khảo sát trong chương này là các vật thể tròn xoay bị biến dạng dưới tác dụng của các lực bề mặt đối xứng với trục tròn xoay của vật, còn các lực khối bằng không. Cả trường ứng suất và trường biến dạng của bài toán loại này đều có tính đối xứng trục. Để thuận lợi về toán học, ta sử dụng hệ tọa độ trụ r, θ, z . Các thành phần chuyển vị tương ứng với các tọa độ trụ là u, v, w ; các thành phần biến dạng là $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{r\theta}, \gamma_{rz}, \gamma_{z\theta}$ và các thành phần ứng suất là $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}, \tau_{z\theta}$.

2.1. Các phương trình tổng quát.

Các phương trình cân bằng của phân tố thể tích trong hệ tọa độ trụ được thiết lập tương tự như phần 4.1 của giáo trình Lý thuyết đàn hồi nhưng có bổ sung thêm hai thành phần ứng suất tiếp τ_{zr} và $\tau_{z\theta}$ trên mặt vuông góc với trục tọa độ z . Khi không có lực khối, ba phương trình vi phân cân bằng có dạng:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0\end{aligned}\quad (2.1)$$

Trong mặt phẳng tọa độ (r, θ) các thành phần biến dạng và các thành phần chuyển vị liên hệ với nhau theo các hệ thức (1.13), (1.14), (1.15) của giáo trình Lý thuyết đàn hồi; ba thành phần biến dạng còn lại $\varepsilon_z, \gamma_{rz}, \gamma_{z\theta}$ ta có các hệ thức tương tự (1.22). Các công thức *Cauchy* về biến dạng trong hệ tọa độ trụ:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}, \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, & \gamma_{z\theta} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}\end{aligned}\quad (2.2)$$

Định luật *Hooke* trong hệ tọa độ trụ:

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)]; \\
 \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_z + \sigma_r)]; \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)]; \\
 \gamma_{r\theta} &= \frac{\tau_{r\theta}}{G}; \quad \gamma_{\theta z} = \frac{\tau_{\theta z}}{G}; \quad \gamma_{zr} = \frac{\tau_{zr}}{G}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Hoặc trong mối quan hệ ngược lại của định luật *Hooke* vẫn theo dạng (1.112) với chú ý các chỉ số i, j, k lần lượt là r, θ, z , còn đại lượng Θ tính theo công thức sau đây:

$$\Theta = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{2.4}$$

Trong hệ tọa độ trụ các phương trình tương thích sẽ có dạng:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} \right) - \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\gamma_{\theta r})}{\partial r \partial \theta} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{rz}}{\partial r \partial z} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{\theta z}}{\partial \theta} + \gamma_{rz} \right) &= 0 \\
 -\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r\gamma_{\theta z})}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (r^2 \gamma_{r\theta})}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{\gamma_{rz}}{r} \right) &= 0 \\
 2r \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon_r - \frac{\partial (r\varepsilon_\theta)}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 \gamma_{rz}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 (r\gamma_{\theta z})}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial^2 (r\gamma_{\theta r})}{\partial z \partial \theta} &= 0 \\
 2r \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{\varepsilon_z}{r} \right) + \frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial z^2} - r \frac{\partial^2}{\partial z \partial \theta} \left(\frac{\gamma_{\theta z}}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \gamma_{rz}}{\partial \theta \partial z} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.5a}$$

Kết hợp với (2.3) và (2.1), phương trình (2.5a) có dạng:

$$\nabla^2 \sigma_r - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) - \frac{4}{r^2} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} = 0$$

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_\theta + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{4}{r^2} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) \sigma &= 0 \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} &= 0 \\ \nabla^2 \tau_{r\theta} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_r - \sigma_\theta) - \frac{4}{r^2} \tau_{r\theta} &= 0 \\ \nabla^2 \tau_{\theta z} + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \theta \partial z} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta z}}{r^2} &= 0 \\ \nabla^2 \tau_{zr} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r \partial z} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{zr}}{r^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5b)$$

trong đó:

$$\sigma = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z \quad (2.6)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.7)$$

Từ các phương trình cân bằng (2.1), định luật *Hooke* (1.112) và các hệ thức *Cauchy* (2.2) ta sẽ thu được ba phương trình cân bằng theo các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ trụ:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) r \frac{\partial \Theta}{\partial r} - 2\mu \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial z} (r \omega_\theta) \right) &= 0 \\ (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} - 2\mu \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial r} \right) &= 0 \\ (\lambda + 2\mu) r \frac{\partial \Theta}{\partial z} - 2\mu \left(\frac{\partial}{\partial r} (r \omega_\theta) - \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

trong đó các ký hiệu:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} ; \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} ; \\ \omega_r &= \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - r \frac{\partial v}{\partial z} \right) ; \quad \omega_\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) ; \\ \omega_z &= \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rv) - r \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Trong bài toán đối xứng trục, các phương trình trên sẽ đơn giản hơn rất nhiều là do:

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

$$\mathbf{u} = u(r, z); \quad \mathbf{v} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{w} = w(r, z)$$

Lúc này các công thức *Cauchy* (2.2) về biến dạng trong hệ tọa độ trụ sẽ có dạng:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}; & \gamma_{r\theta} &= \gamma_{z\theta} = 0 \end{aligned} \quad (2.10a)$$

Theo định luật Hooke, ta suy được:

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \tau_{z\theta} = 0; \quad \tau_{rz} = \tau_{rz}(r, z); \\ \sigma_r &= \sigma_r(r, z); \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta(r, z); \quad \sigma_z = \sigma_z(r, z) \end{aligned} \quad (2.10b)$$

Hệ phương trình cân bằng (2.1) bây giờ chỉ còn:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Hệ phương trình tương thích (2.5b) có dạng:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_r + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) &= 0 \\ \nabla^2 \sigma_\theta + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) &= 0 \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} &= 0 \\ \nabla^2 \tau_{zr} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r \partial z} - \frac{\tau_{zr}}{r^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

với toán tử:
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Hệ phương trình cân bằng (2.8) trong bài toán đối xứng trục:

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{2\mu}{(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{2\mu}{(\lambda + 2\mu)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\omega_\theta) = 0$$

trong đó: $\Theta = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial w}{\partial z}$ (2.14)

Kết hợp hai phương trình (2.13) ta được:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\omega_\theta) \right) + \frac{\partial^2 \omega_\theta}{\partial z^2} = 0 \quad (2.15)$$

Giải phương trình vi phân (2.15) ta tìm được nghiệm ω_θ , thay ω_θ vào một trong hai phương trình (2.13) ta xác định được Θ . Hai thành phần chuyển vị u , w được xác định từ hệ hai phương trình:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) &= 2\omega_\theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial w}{\partial z} &= \Theta \end{aligned} \quad (2.16)$$

Từ (2.16), ta thu được phương trình vi phân xác định thành phần chuyển vị u :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} + \frac{\partial \Theta}{\partial r} \quad (2.17)$$

Khi đã xác định được u từ (2.17), ta sẽ dựa vào một trong hai phương trình (2.16) để tìm thành phần chuyển vị w .

2.2. Hàm ứng suất *A. E. H. Love*.

Đối với bài toán đối xứng trục, người ta đưa vào hàm hai biến $\Phi(r,z)$ sao cho các thành phần ứng suất sẽ được xác định theo hàm Φ như sau:

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right); \quad \sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right); \quad (2.18)$$

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left((2 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right); \quad \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left((1 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)$$

với: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

Hàm $\Phi(r,z)$ được gọi là hàm ứng suất *A. E. H. Love*.

Các thành phần ứng suất xác định theo (2.18) thỏa mãn phương trình cân bằng (2.11), còn phương trình cân bằng thứ hai sẽ có dạng:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \nabla^2 \Phi = \nabla^4 \Phi = 0 \quad (2.19)$$

với $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$.

Nếu hàm $\Phi(r,z)$ thỏa mãn phương trình điều hòa kép (2.19) thì các thành phần ứng suất được xác định theo (2.18) cũng thỏa mãn các phương trình tương thích (2.12).

Tóm lại, việc giải bài toán đối xứng trục rốt cuộc là tìm nghiệm của phương trình điều hòa kép (2.19), và nghiệm ấy phải thỏa mãn các điều kiện biên cụ thể của từng bài toán.

Từ (2.10), (2.3), (2.18) ta có thể tìm hai thành phần chuyển vị u, w :

$$u = r\varepsilon_\theta = \frac{r}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_z + \sigma_r)] = -\frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}$$

$$\text{hay: } 2G u = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} \quad (2.20)$$

Tương tự:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] = \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial}{\partial z} \left[2(1-\nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right]$$

Do đó:

$$2G w = 2(1-\nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + f(r) \quad (a)$$

trong đó $f(r)$ là hàm đơn biến tùy ý.

Mặt khác, theo (2.3), (2.10), (2.18) và (2.20) ta có:

$$G \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-\nu) \nabla^2 \Phi - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right]$$

Do đó:

$$2G w = 2(1-\nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + g(z) \quad (b)$$

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

trong đó $g(z)$ là hàm đơn biến tùy ý.

Do hai vế phải của (a) và (b) luôn trùng nhau, nên:

$$f(r) = g(z) = A = \text{const}$$

Hằng số A ở vế phải của (a) và (b) biểu thị chuyển vị của vật rắn tuyệt đối (chuyển vị cứng - chuyển vị không có biến dạng) theo phương trục tọa độ z . Vì thế, khi tính chuyển vị w do biến dạng ta loại hằng số này. Nghĩa là:

$$2Gw = 2(1-\nu)\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \quad (2.21)$$

Cuối cùng, hàm ứng suất $\Phi(r,z)$ nên được chọn theo các dạng sau đây:

$$\Phi(r,z) = C_n z^n \ln r; \quad n = 0, 1, 2, 3; \quad (2.22)$$

$$\Phi(r,z) = Cz \left[\ln(\sqrt{r^2 + z^2} - z) - \ln(\sqrt{r^2 + z^2} + z) \right] \quad (2.23)$$

Trong đó C_0, C_1, C_2, C_3, C là các hằng số được xác định từ các điều kiện biên của bài toán đối xứng trục.

2.3. Nghiệm dạng đa thức của phương trình $\nabla^4\Phi = 0$.

Để tìm nghiệm phương trình (2.19) ta biến đổi hệ trục tọa độ vuông góc (r,z) sang hệ tọa độ cực (R,ψ) như hình 2.1. Tương tự phần 4.1 của tài liệu Lý thuyết đàn hồi, ta được:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{1}{R} \frac{1}{\sin \psi} \left(\sin \psi \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\cos \psi}{R} \frac{\partial}{\partial \psi} \right) = \\ &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\cot g \psi}{R^2} \frac{\partial}{\partial \psi} \end{aligned}$$

thay các quan hệ này vào (2.19) ta có:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \cot g \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) \cdot \\ &\cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \cot g \psi \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

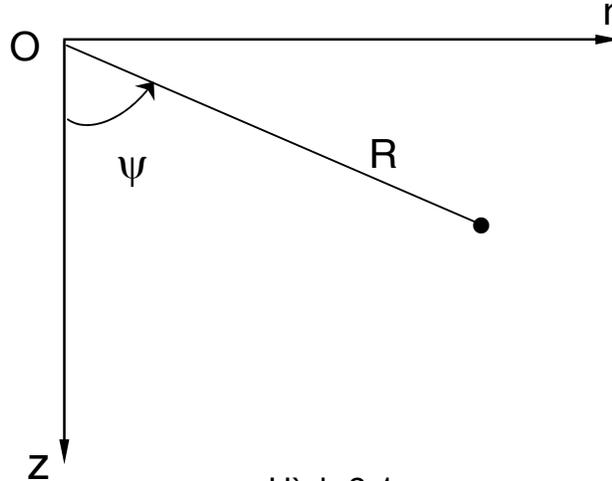
Ta sẽ tìm các họ nghiệm riêng của (2.24) dưới dạng các đa thức.

Nghiệm của phương trình:

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \cot g \psi \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} \right) = 0 \quad (2.25)$$

cũng là nghiệm phương trình (2.24).



Hình 2.1

Một nghiệm riêng của phương trình (2.25) có thể tìm dưới dạng:

$$\Phi_n = R^n \Psi_n(\psi) \quad (2.26)$$

với ký hiệu $\Psi_n(\psi)$ chỉ hàm đơn biến theo ψ và n là số nguyên dương. Thay (2.26) vào (2.25) ta thu được phương trình vi phân thường đối với hàm Ψ_n :

$$\frac{1}{\sin \psi} \frac{d}{d\psi} \left(\sin \psi \frac{d\Psi_n}{d\psi} \right) + n(1+n) \Psi_n = 0 \quad (a)$$

Đặt $\eta = \cos \psi$ là biến độc lập mới, phương trình (a) sẽ có dạng phương trình Legendre:

$$(1 - \eta^2) \frac{d^2 \Psi_n}{d\eta^2} - 2\eta \frac{d\Psi_n}{d\eta} + n(1+n) \Psi_n = 0 \quad (2.27)$$

Nghiệm của (2.27) có dạng đa thức:

$$\Psi_n = a_1 \eta^n + a_2 \eta^{n-2} + a_3 \eta^{n-4} + \dots + a_k \eta^{n-k+2} + \dots \quad (b)$$

Thay biểu thức (b) vào (2.27), ta sẽ thu được:

$$\begin{aligned} & [n(n-1)a_1 + 2(2n-1)a_2] \eta^{n-2} + \dots + \{ [n(n+1) - (n-2k+2) \cdot \\ & \cdot (n-2k+3)] a_k + (n-2k+4)(n-2k+3)a_{k-1} \} \eta^{n-2k+2} = 0 \end{aligned}$$

Do đó:

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

$$a_k = -\frac{(n-2k+4)(n-2k+3)}{2(k-1)(2n-2k+3)} a_{k-1} \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (c)$$

Thay (c) vào (b), nghiệm của phương trình (2.27):

$$\Psi_n = a_1 \left[\eta^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \eta^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} \eta^{n-4} - \dots \right] \quad (2.28)$$

Thay nghiệm (2.28) vào (2.26) và trở lại các biến độc lập r, z . Chú ý rằng:

$$\eta = \cos \psi = z / R; \quad R^2 = r^2 + z^2$$

Lần lượt gán cho n các trị số $0, 1, 2, \dots$ ta sẽ có họ nghiệm riêng của phương trình (2.25):

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= A_0; \quad \Phi_1 = A_1 z; \\ \Phi_2 &= A_2 \left[z^2 - \frac{1}{3}(r^2 + z^2) \right]; \quad \Phi_3 = A_3 \left[z^3 - \frac{3z}{5}(r^2 + z^2) \right]; \\ \Phi_4 &= A_4 \left[z^4 - \frac{6}{7}z^2(r^2 + z^2) + \frac{3}{35}(r^2 + z^2)^2 \right]; \\ \Phi_5 &= A_5 \left[z^5 - \frac{10}{9}z^3(r^2 + z^2) + \frac{5}{21}z(r^2 + z^2)^2 \right]; \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.29)$$

với A_0, A_1, A_2, \dots là các hệ số hằng chưa xác định. Các nghiệm riêng của (2.29) tất nhiên cũng là các nghiệm riêng của (2.24).

Ta có thể thấy rằng nếu $R^n \Psi_n(\psi)$ là nghiệm của (2.25) thì $R^{n+2} \Psi_n(\psi)$ là nghiệm của (2.24).

Thật vậy:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \cot g \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) R^{n+2} \Psi_n(\psi) = \\ = 2(2n+3) R^n \Psi_n(\psi) \end{aligned}$$

Vì $R^n \Psi_n(\psi)$ là nghiệm của (2.25) nên ta có:

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \cot g \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) \cdot \\ & \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \cot g \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) R^{n+2} \Psi_n = \\ & = 2(2n+3) \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \cot g \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) R^n \Psi_n = 0 \end{aligned}$$

Do đó, nhân các nghiệm của (2.29) với $R^2 = r^2 + z^2$ ta sẽ được các nghiệm mới của (2.24):

$$\begin{aligned} \Phi_0^* &= B_0 (r^2 + z^2); \\ \Phi_1^* &= B_1 z (r^2 + z^2); \\ \Phi_2^* &= B_2 (2z^2 - r^2) (r^2 + z^2); \\ \Phi_3^* &= B_3 (2z^3 - 3r^2 z) (r^2 + z^2); \\ & \dots \end{aligned} \tag{2.30}$$

Ta sẽ chứng tỏ một nghiệm riêng của phương trình (2.25) cũng có thể tìm được dưới dạng:

$$\Phi_{-n-1} = R^{-n-1} \Psi_{-n-1}(\psi)$$

Tương tự như với nghiệm riêng dạng (2.26) ta sẽ được phương trình *Legendre* đối với hàm đơn biến $\Psi_n(\psi)$, với chỉ số $m = -n - 1$:

$$(1 - \eta^2) \frac{d^2 \Psi_m}{d\eta^2} - 2\eta \frac{d\Psi_m}{d\eta} + (-n)(-n-1) \Psi_m = 0$$

Phương trình trên trùng với phương trình (2.27), nghĩa là cũng có nghiệm là đa thức (2.28). Lần lượt gán $n = 0, 1, 2, \dots$ ta sẽ được họ nghiệm mới của các phương trình (2.25) như sau:

$$\begin{aligned} \Phi_0^{**} &= C_0 (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}; \\ \Phi_1^{**} &= C_1 z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}; \\ \Phi_2^{**} &= C_2 \left[z^2 (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{3} (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right]; \\ & \dots \end{aligned} \tag{2.31}$$

Rõ ràng các nghiệm (2.31) cũng là các nghiệm riêng của phương trình (2.24).

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

Nhân các nghiệm (2.31) với $R^2 = r^2 + z^2$ ta sẽ được một họ nghiệm khác của (2.24):

$$\begin{aligned}\Phi_0^{***} &= D_0 (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}; \\ \Phi_1^{***} &= D_1 z (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}; \\ \Phi_2^{***} &= D_2 \left[z^2 (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right]; \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}\tag{2.32}$$

Mỗi nghiệm riêng trong từng họ nghiệm từ (2.29) đến (2.32), cũng như một tổ hợp tuyến tính bất kỳ của chúng đều có thể chọn làm hàm ứng suất Φ . Bằng cách chọn thích hợp các hệ số hằng, ta sẽ tìm được lời giải của nhiều bài toán khác nhau.

2.4. Tấm tròn chịu tác dụng của ngoại lực đối xứng trục.

2.4.1. Bài toán 1.

Cho tấm tròn chiều dày đều $2h$, bán kính a , chịu áp lực đều trên hai mặt tấm và trên mặt xung quanh của tấm. Hãy xác định trường ứng suất và trường chuyển vị trong tấm.

Để giải bài toán này ta chọn hàm ứng suất là tổ hợp tuyến tính hai nghiệm riêng Φ_3 và Φ_1^* . Từ (2.29) và (2.30) ta được hàm ứng suất dạng đa thức bậc ba:

$$\Phi = a_3 (2z^3 - 3r^2z) + b_3 (z^3 + r^2z)\tag{a}$$

với a_3 và b_3 là hai hằng số sẽ được xác định từ các điều kiện biên của tấm.

Thay (a) vào các hệ thức (2.18) ta thu được:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 6a_3 + (10\nu - 2)b_3; & \sigma_\theta &= 6a_3 + (10\nu - 2)b_3; \\ \sigma_z &= -12a_3 + (14 - 10\nu)b_3; & \tau_{rz} &= 0\end{aligned}\tag{b}$$

Các biểu thức (b) chứng tỏ trường ứng suất trong tấm là trường ứng suất đồng nhất.

Thay (a) vào (2.20) và (2.21) ta sẽ có các công thức tính các thành phần chuyển vị:

$$\begin{aligned}u &= u(r) = (3a_3 - b_3) \frac{r}{G}; \\ w &= w(z) = \left[(7 - 10\nu)b_3 - 6a_3 \right] \frac{z}{G}\end{aligned}\tag{c}$$

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

Giả sử tấm được đặt vừa khít trong đáy lỗ hình trụ rỗng tuyệt đối, không ma sát và chịu nén bởi áp lực đều trên mặt tự do với áp suất p .

Chọn gốc tọa độ O ở tâm mặt phẳng của tấm tiếp xúc với đáy lỗ, trục z vuông góc với mặt phẳng tấm và cùng chiều với áp suất \vec{p} .

Trên mặt phẳng tự do của tấm ta có điều kiện biên tĩnh học: $\sigma_z = -p$, hay theo (b) ta có:

$$12a_3 - (14 - 10\nu)b_3 = p \quad (d)$$

Trên bề mặt xung quanh của tấm ta có điều kiện biên động học: $u(a) = 0$, hay theo (c) ta có:

$$(3a_3 - b_3) = 0 \quad (e)$$

Giải hệ hai phương trình (d), (e) ta tìm được:

$$a_3 = -\frac{p}{30(1-\nu)}; \quad b_3 = -\frac{p}{10(1-\nu)} \quad (f)$$

Nếu tấm tiếp xúc không ma sát với thành lỗ hình trụ thì trường ứng suất trong tấm sẽ là:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -\frac{\nu}{1-\nu}p; \quad \sigma_z = -p; \quad \tau_{rz} = 0 \quad (2.33)$$

và trường chuyển vị:

$$u = 0; \quad w = w(z) = -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{p}{G} z \quad (2.34)$$

2.4.2. Bài toán 2.

Cho tấm tròn chiều dày đều $2h$, bán kính a , chịu uốn thuần túy bởi các ngẫu lực phân bố đều dọc theo mặt xung quanh của tấm.

Ta chọn hàm ứng suất là tổ hợp tuyến tính của hai nghiệm riêng Φ_4 và Φ_2^* thuộc hai họ nghiệm riêng (2.29) và (2.30). Ta được hàm ứng suất có dạng đa thức bậc bốn:

$$\Phi(r, z) = a_4 (8z^4 - 24r^2z^2 + 3r^4) + b_4 (2z^4 + r^2z^2 - r^4) \quad (g)$$

với a_4 và b_4 là hai hằng số sẽ được xác định từ các điều kiện biên.

Thay (g) vào (2.18) ta có:

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_\theta = 96a_4 z + 4b_4 (14\nu - 1) z; \\ \sigma_z &= -192a_4 z + 8b_4 (8 - 7\nu) z; \\ \tau_{rz} &= 96a_4 r - 4b_4 (8 - 7\nu) r\end{aligned}\tag{h}$$

Chọn gốc tọa độ O tại tâm của mặt phẳng trung hòa của tấm và trục đối xứng của tấm làm trục tọa độ z. Điều kiện biên trên hai mặt phẳng tự do của tấm:

$$q_r = \pm \tau_{rz} = 0; \quad q_z = \pm \sigma_z$$

Thay điều kiện biên vào (h) ta có:

$$96a_4 - 4b_4 (8 - 7\nu) = 0\tag{i}$$

Gọi M_r là giá trị không đổi của *moment* trên một đơn vị chiều dài đường tròn xung quanh tấm ở mặt phẳng trung hòa ($z = 0$). Theo nguyên lý *Saint-Venant*, ta có điều kiện biên trên bề mặt xung quanh:

$$2 \int_0^h \sigma_r z dz = M_r\tag{k}$$

Thay σ_r từ (h) vào (k) và kết hợp với điều kiện biên (i), ta tìm được:

$$a_4 = \frac{(8 - 7\nu)M_r}{448(1 + \nu)h^3}; \quad b_4 = \frac{3M_r}{56(1 + \nu)h^3}$$

Trường ứng suất trong tấm tròn chịu uốn thuần túy bởi *moment* phân bố đều M_r trên bề mặt xung quanh tấm:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_\theta = \frac{3M_r}{2h^3} z; \\ \sigma_z &= \tau_{rz} = 0\end{aligned}\tag{2.35}$$

2.5. Ứng suất trong vật thể kích thước lớn vô hạn.

Xét vật thể kích thước lớn vô hạn chịu tác dụng của lực tập trung \vec{P} đặt tại 1 điểm trong vật thể.

Chọn điểm đặt của lực tập trung làm gốc tọa độ và chọn nghiệm riêng Φ_0^{***} làm hàm ứng suất:

$$\Phi(r, z) = D_0 (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}\tag{a}$$

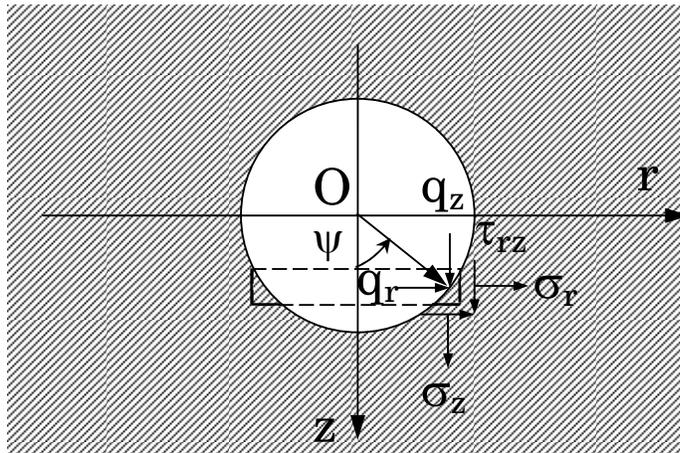
với D_0 là hằng số cần xác định.

Từ các hệ thức (2.18) ta có:

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= D_0 \left[(1-2\nu)z(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3r^2z(r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \right]; \\
 \sigma_\theta &= D_0(1-2\nu)z(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}; \\
 \sigma_z &= -D_0 \left[(1-2\nu)z(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3z^3(r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \right]; \\
 \tau_{rz} &= -D_0 \left[(1-2\nu)r(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3rz^2(r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \right]
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Tất cả các thành phần ứng suất đó đều có giá trị không xác định tại điểm đặt lực tập trung, tức gốc tọa độ O.



Hình 2.2

Lấy gốc tọa độ O làm tâm của một hình cầu rỗng, bán kính nhỏ (hình 2.2). Mặt cầu chịu tác dụng của hai thành phần lực phân bố tại điểm bất kỳ: q_z và q_r sao cho các thành phần lực phân bố đó cũng gây ra trường ứng suất (2.36).

Xét sự cân bằng của phân tử dạng vành tiếp xúc với mặt cầu. Điều kiện cân bằng:

$$q_z = -(\tau_{rz} \sin \psi + \sigma_z \cos \psi) \tag{b}$$

Ta có:

$$\sin \psi = r(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}; \quad \cos \psi = z(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{c}$$

còn τ_{rz} và σ_z được thay bằng các công thức (2.36).

Do đó ta có:

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

$$q_z = D_0 \left[(1-2\nu)(r^2 + z^2)^{-1} + 3z^2(r^2 + z^2)^{-2} \right] \quad (d)$$

Hợp lực của thành phần lực phân bố q_z :

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} q_z \sqrt{r^2 + z^2} d\psi 2\pi r = 8\pi(1-\nu)D_0 \quad (e)$$

Hợp lực của thành phần lực phân bố q_r bằng không vì lý do đối xứng. Vậy hợp lực của hai thành phần lực phân bố q_z và q_r trên mặt cầu là một lực đặt tại gốc tọa độ theo phương trục z .

Ký hiệu lực tập trung tại gốc tọa độ là P . Ta có:

$$P = 8\pi(1-\nu)D_0 \quad (f)$$

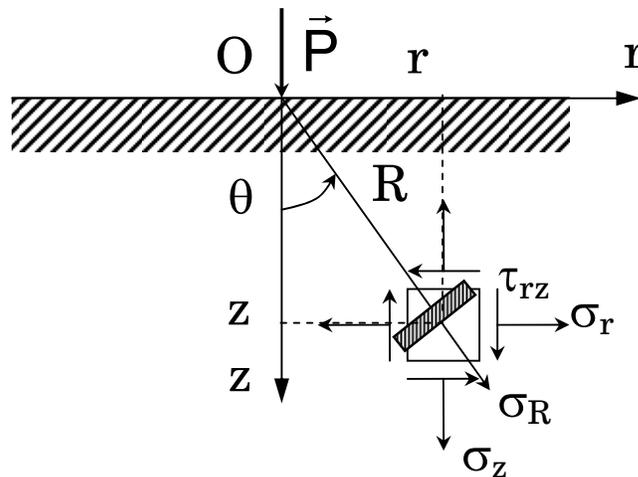
$$\text{hay } D_0 = \frac{P}{8\pi(1-\nu)} \quad (2.37)$$

Các hệ thức (2.36) kết hợp với (2.37) cho ta trường ứng suất trong vật thể lớn vô hạn gây ra bởi lực tập trung \vec{P} đặt tại gốc tọa độ theo phương trục tọa độ z .

2.6. Nửa không gian đàn hồi chịu lực tập trung trên mặt phẳng biên (Bài toán *Boussinesq*).

Xét vật thể nửa vô hạn, nửa không gian đàn hồi, chịu tác động của lực tập trung vuông góc với mặt phẳng biên (hình 2.3).

Chọn điểm đặt của lực tập trung \vec{P} làm gốc tọa độ và đường tác dụng của \vec{P} làm trục tọa độ z .



Hình 2.3

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

$$\cos \theta = \frac{z}{R}; \quad \sin \theta = \frac{r}{R}; \quad R^2 = r^2 + z^2$$

Chọn hàm ứng suất Φ là tổ hợp tuyến tính các nghiệm riêng của phương trình (2.19) theo dạng:

$$\Phi(r, z) = C_1 z \ln r + C_2 (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} + C_3 z \ln \frac{\sqrt{r^2 + z^2} - z}{\sqrt{r^2 + z^2} + z} \quad (a)$$

Thay (a) vào (2.18) ta có:

$$\begin{aligned} \sigma_r = & \frac{C_1}{r^2} + C_2 \left[(1-2\nu)z(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3r^2z(r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right] + \\ & + C_3 \left[\frac{4z}{r^2}(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + 4(1+\nu)z(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - \right. \\ & \left. - 2\frac{z^3}{r^2}(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - 6z^3(r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right] \end{aligned} \quad (b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z = & C_2 \left[-(1-2\nu)z(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3z^3(r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right] + \\ & + C_3 \left[-4\nu z(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 6z^3(r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right] \end{aligned} \quad (c)$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz} = & C_2 \left[-(1-2\nu)r(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3rz^2(r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right] + \\ & + C_3 \left[-4\nu r(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 6rz^2(r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right] \end{aligned} \quad (d)$$

Trên mặt phẳng biên, tức $z = 0$, $\sigma_z = 0$ và $\tau_{rz} = 0$. Theo (c), điều kiện $(\sigma_z)_{z=0} = 0$ được thỏa mãn. Từ (d) và $\tau_{rz} = 0$ ta suy ra:

$$C_3 = -\frac{1-2\nu}{4\nu} C_2 \quad (e)$$

Để xác định C_2 ta thiết lập phương trình cân bằng theo phương đứng z đối với một lớp nửa không gian đàn hồi giới hạn bởi mặt cắt $z = a$ và mặt phẳng biên (hình 2.4). Ta có:

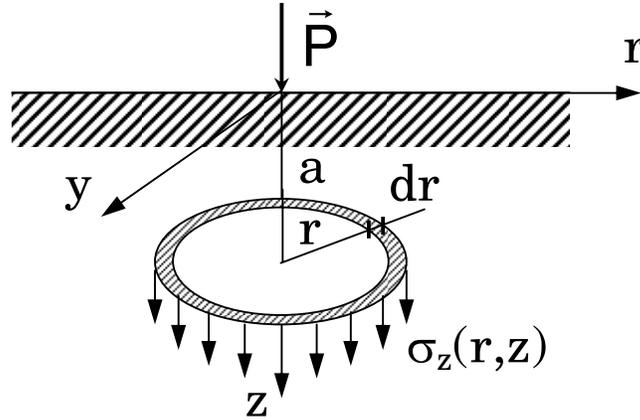
Chương 2. Bài toán đối xứng trục

$$\int_0^{\infty} \sigma_z 2\pi r dr + P = 0$$

(f)

Từ (c) và (e) ta có:

$$\sigma_z = -\frac{3}{2\nu} C_2 z^3 (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \quad (g)$$



Hình 2.4

Thay (g) vào (f) rồi tích phân ta có:

$$C_2 = \frac{\nu}{\pi} P \quad (h)$$

Từ (b) và điều kiện $\sigma_r = 0$ tại $z = \infty$, ta suy ra:

$$C_1 = -2 C_3 \quad (i)$$

Từ (i), (e) và (h) ta tìm được:

$$C_1 = \frac{1-2\nu}{2\pi} P; \quad C_3 = \frac{1-2\nu}{4\pi} P \quad (j)$$

Thay các hằng số tìm được vào (b), (c), (d) ta có:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{P}{2\pi} \left[\frac{1-2\nu}{R(R+z)} - \frac{3zr^2}{R^5} \right]; \quad \sigma_z = -\frac{3P z^3}{2\pi R^5}; \\ \sigma_\theta &= \frac{P}{2\pi} (1-2\nu) \left[\frac{z}{R^3} - \frac{1}{R(R+z)} \right]; \quad \tau_{rz} = -\frac{3P rz^2}{2\pi R^5} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Dựa vào (2.3), (2.10a) và (2.38) ta thu được:

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

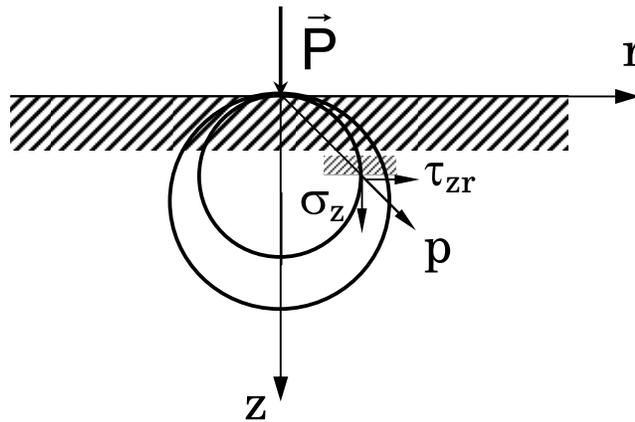
$$u = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{rz}{R^3} - (1-2\nu) \frac{r}{R(R+z)} \right];$$

$$w = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{2(1-\nu)}{R} + \frac{z^2}{R^3} \right]$$
(2.39)

Trên mặt biên $z = 0$, các thành phần chuyển vị:

$$u|_{z=0} = -\frac{P(1-2\nu)}{4\pi Gr};$$

$$w|_{z=0} = \frac{P(1-\nu)}{2\pi Gr} = \frac{(1-\nu^2)P}{\pi E r}$$
(2.40)



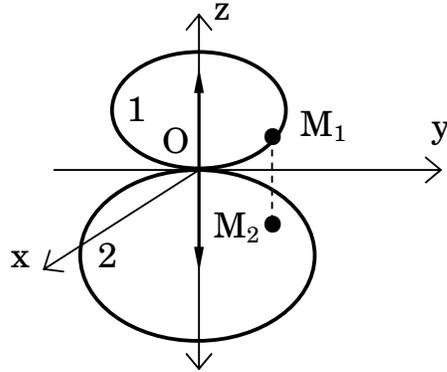
Hình 2.5

Trong các công thức trên, ứng suất và chuyển vị có giá trị vô cùng lớn tại điểm đặt lực tập trung P ($z = 0$ và $r = 0$). Thực tế, ta không thể có lực tập trung mà lực được phân bố qua một diện tích hữu hạn (thí dụ móng công trình, một vùng dẻo lân cận điểm đặt lực). Do đó các giá trị ứng suất và chuyển vị ở vùng đặt lực là hữu hạn. Nếu gọi ứng suất toàn phần tác động trên mặt phẳng nằm ngang là \vec{p} , thì họ các mặt đẳng ứng suất p là họ các mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng biên tại điểm đặt lực (hình 4.5).

2.7. Bài toán H. Hertz về áp lực giữa hai vật thể tiếp xúc với nhau.

Xét hai vật thể ban đầu tiếp xúc với nhau tại điểm O như hình 2.6.

Chương 2. Bài toán đối xứng trục



Z
Hình 2.6

Lấy O làm gốc hệ trục tọa độ vuông góc Oxyz. Hai trục Ox, Oy nằm trong mặt phẳng tiếp xúc với hai vật tại O. Còn hai trục Oz₁, Oz₂ trùng với pháp trong tương ứng của hai bề mặt vật.

Phương trình bề mặt của hai vật thể tiếp xúc trước khi biến dạng:

$$z_1 = f_1(x,y); \quad z_2 = f_2(x,y) \quad (a)$$

Nếu O không là điểm kỳ dị, các phương trình (a) ở lân cận điểm tiếp xúc O có thể biểu diễn như:

$$z_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} \Big|_{0,0} x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} \Big|_{0,0} y^2 + \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} \Big|_{0,0} xy \quad (b)$$

$$z_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2} \Big|_{0,0} x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_2}{\partial y^2} \Big|_{0,0} y^2 + \frac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial y} \Big|_{0,0} xy \quad (c)$$

Ký hiệu M₁ và M₂ là hai điểm của hai bề mặt tiếp xúc cùng thuộc pháp tuyến của mặt phẳng tiếp xúc Oxy. Theo (b) và (c), khoảng cách hai điểm M₁ và M₂:

$$z_1 + z_2 = (A_1 + A_2)x^2 + (B_1 + B_2)y^2 + (H_1 + H_2)xy \quad (d)$$

với:

$$A_i = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_i}{\partial x^2} \Big|_{0,0}; \quad B_i = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_i}{\partial y^2} \Big|_{0,0}; \quad H_i = \frac{\partial^2 z_i}{\partial x \partial y} \Big|_{0,0} \quad (i = 1,2) \quad (e)$$

Dạng toàn phương (d) luôn dương với hai trục Ox và Oy được chọn tùy ý trong mặt phẳng tiếp xúc, và ta có thể chọn các trục đó sao cho $H_1 + H_2 = 0$. Lúc này, ta có:

$$z_1 + z_2 = Ax^2 + By^2 \quad (f)$$

$$\text{với ký hiệu: } A = A_1 + A_2; \quad B = B_1 + B_2 \quad (g)$$

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

Do đó các hệ số A và B là những hệ số dương.

Ta ký hiệu R_{11} và R_{21} là các bán kính cong chính tại điểm tiếp xúc O đối với vật thể 1, R_{12} và R_{22} là các bán kính cong chính tại điểm tiếp xúc O đối với vật thể 2. Nếu các bán kính cong chính đều dương, thì:

$$2A = \frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_{21}}; \quad 2B = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{22}} \quad (h)$$

Từ (f) ta thấy các đường cong biểu diễn các khoảng cách đẳng trị giữa hai điểm M_1 và M_2 là các đường *ellipse* đồng tâm.

Giả sử hai vật rắn bị ép vào nhau bởi lực \vec{P} hướng theo pháp tuyến với mặt phẳng tiếp xúc Oxy tại O. Lúc này hai vật sẽ tiếp xúc với nhau theo một diện tích bé lân cận điểm O. Diện tích đó được gọi là diện tích áp lực và chu tuyến của nó gọi là chu tuyến áp lực. Hình chiếu vuông góc của diện tích áp lực lên mặt phẳng tiếp xúc Oxy được gọi là miền tiếp xúc.

Với độ chính xác vừa đủ, ta thừa nhận rằng khi hai vật bị ép vào nhau chúng sẽ tiếp xúc với nhau tại những điểm mà trước khi biến dạng cùng nằm trên một pháp tuyến với mặt phẳng Oxy. Theo (f), ta thấy diện tích áp lực có dạng *elliptic*.

Vì hai vật thể bị ép vào nhau nên bất kỳ hai điểm nào nằm trên các trục tọa độ Oz_1 và Oz_2 với khoảng cách từ chúng đến điểm O khá lớn (để có thể bỏ qua biến dạng tại đó) cũng dịch chuyển lại gần nhau một độ dài δ bằng tổng các chuyển vị $w_1(O)$ và $w_2(O)$ của điểm O.

Gọi w_1 và w_2 là chuyển vị của hai điểm M_1 và M_2 theo hướng các trục Oz_1 và Oz_2 . khoảng cách giữa hai điểm sẽ giảm đi một lượng $\delta - (w_1 + w_2)$.

Do đó, đối với tất cả các điểm của diện tích áp lực đều có hệ thức:

$$z_1 + w_1 + z_2 + w_2 = \delta \quad (i)$$

còn đối với các điểm ngoài diện tích áp lực:

$$z_1 + w_1 + z_2 + w_2 > \delta$$

Từ (f) và (i) ta thu được:

$$w_1 + w_2 = \delta - Ax^2 - By^2 \quad (j)$$

Để xác định các chuyển vị và ứng suất đàn hồi trong miền tiếp xúc của cả hai vật thể 1 và 2 ta sẽ cho rằng diện tích áp lực là rất bé và cả hai vật đều có thể thay bởi nửa không gian tương ứng. Trong miền tiếp xúc F của hai nửa không gian đó có áp lực thẳng góc $q(\xi, \eta)$ tác dụng, còn ma sát trên diện tích áp lực được bỏ qua, nghĩa là trong miền tiếp xúc không có ứng suất tiếp.

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

Theo (2.40), ta có:

$$w_1 + w_2 = \left(\frac{1 - v_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - v_2^2}{\pi E_2} \right) \int_F \frac{q}{r} dF \quad (k)$$

trong đó v_1 , E_1 và v_2 , E_2 là các hằng số đàn hồi của vật thể 1 và 2. Theo (k), hệ thức (j) sẽ có dạng:

$$(k_1 + k_2) \int_F \frac{q}{r} dF = \delta - Ax^2 - By^2 \quad (l)$$

trong đó:

$$k_1 = \frac{1 - v_1^2}{\pi E_1}; \quad k_2 = \frac{1 - v_2^2}{\pi E_2} \quad (m)$$

Ta nhận thấy rằng việc giải bài toán hai vật thể tiếp xúc như trên sẽ dẫn đến việc xác định áp lực $q(\xi, \eta)$, độ dịch chuyển gần δ của hai vật thể tiếp xúc và các kích thước cũng như hình dáng của miền tiếp xúc F .

Theo *H. Hertz*, cường độ áp lực $q(\xi, \eta)$ được giả thiết biểu diễn bởi tung độ của nửa *ellipsoid* được dựng trên miền tiếp xúc; tất nhiên, tại tâm miền tiếp xúc áp lực có trị số cực đại q_0 . Gọi a , b là hai nửa trục của miền tiếp xúc, ta có:

$$P = \int_F q dF = \frac{2}{3} \pi ab q_0$$

từ đó:

$$q_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} \quad (2.41)$$

Giả thiết trên đây về cường độ áp lực cho phép ta biểu diễn được vế trái của hệ thức (l) dưới dạng tương tự vế phải của nó. Thực hiện một số biến đổi toán học ta được:

$$\delta - Ax^2 - By^2 = k \frac{q_0}{a} \left[abK - \frac{b}{a} Dx^2 - \frac{a}{b} (K - D)y^2 \right] \quad (n)$$

trong đó:

$$k = \frac{1 - v_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - v_2^2}{\pi E_2} \quad (2.42)$$

Đồng nhất hai vế của (n) ta được:

$$\delta = k q_0 b K \quad (o)$$

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

$$A = kq_0 \frac{b}{a^2} D; \quad B = kq_0 \frac{1}{b} (K - D) \quad (p)$$

với K biểu diễn tích phân *elliptic* loại một:

$$K(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (q)$$

còn D biểu diễn sự kết hợp tích phân *elliptic* loại một K với tích phân *elliptic* loại hai L:

$$D(e) = \frac{1}{e^2} [K(e) - L(e)] \quad (r)$$

trong đó:

$$K(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi \quad (s)$$

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad (t)$$

e là tâm sai của *ellipse*.

Từ (2.41), (o) và (p) ta tìm được hai bán trục *ellipse* a và b:

$$\begin{aligned} a &= m \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4} \frac{kP}{A+B}}; \\ b &= n \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4} \frac{kP}{A+B}} \end{aligned} \quad (2.43)$$

với A, B được xác định theo (h) và các hệ số m và n phụ thuộc vào:

$$\cos \theta = \frac{A+B}{A-B} \quad (u)$$

các hệ số m và n thay đổi theo giá trị θ và được cho trong bảng 2.1.

θ	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
m	2,731	2,397	2,136	1,926	1,754	1,611	1,486	1,378	1,284	1,202	1,128	1,061	1,000
n	0,493	0,530	0,567	0,604	0,641	0,678	0,717	0,757	0,802	0,846	0,893	0,944	1,000

Trường hợp đặc biệt miền tiếp xúc là hình tròn, ta có:

$$a = b; \quad e = 0; \quad K(0) = L(0) = \pi/2; \quad D(0) = \pi/4$$

Chương 2. Bài toán đối xứng trục

do đó: $A = B$; $\theta = 90^0$; $m = n = 1$.

và các biểu thức tính a , b , δ , q_0 có dạng:

$$a = b = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4} \frac{kP}{A+B}}, \text{ (chiều dài)} \quad (2.44)$$

$$q_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{6 \left(\frac{A+B}{\pi k} \right)^2 P}, \text{ (Lực / chiều dài}^2\text{)} \quad (2.45)$$

$$\delta = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{2\pi} k^2 P^2 (A+B)}, \text{ (chiều dài)} \quad (2.46)$$

Khảo sát các điểm trên bề mặt tiếp xúc *ellipse* và chọn các trục x và trục y trùng với các bán trục a và b , các ứng suất chính ở tâm bề mặt tiếp xúc:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -2\nu q_0 - (1-2\nu) q_0 \frac{b}{a+b}; \\ \sigma_y &= -2\nu q_0 - (1-2\nu) q_0 \frac{a}{a+b}; \\ \sigma_z &= -q_0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

Ở các điểm cuối của các bán trục *ellipse* ta có:

$$\sigma_x = -\sigma_y \text{ và } \tau_{xy} = 0$$

Nghĩa là, ứng suất kéo tho hướng kính thì bằng với ứng suất nén theo phương tiếp tuyến. Do đó ở các điểm này tồn tại trạng thái ứng suất trượt thuần túy. Độ lớn của ứng suất tiếp này ở các điểm cuối của bán trục lớn ($x = \pm a$, $y = 0$):

$$\tau = (1-2\nu) q_0 \frac{\beta}{e^2} \left(\frac{1}{e} \arctan he - 1 \right) \quad (2.48)$$

$$\tau = (1-2\nu) q_0 \frac{\beta}{e^2} \left(1 - \frac{\beta}{e} \arctan \frac{e}{\beta} \right) \quad (2.49)$$

với: $\beta = b/a$

Khi b xấp xỉ a và biên của bề mặt tiếp xúc xấp xỉ hình tròn, các thành phần ứng suất được cho bởi (2.47), (2.48) và (2.49) biểu thị các thành phần ứng suất cho trường hợp nén hai hình cầu.