

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

Chương 1

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT

- 1.1. Ký hiệu chỉ số.**
- 1.2. Lý thuyết biến dạng.**
- 1.3. Lý thuyết ứng suất.**
- 1.4. Lý thuyết đàn hồi tuyến tính.**
- 1.5. Giải bài toán vật rắn đàn hồi theo chuyển vị hoặc theo ứng suất.**
- 1.6. Ví dụ giải bài toán vật rắn đàn hồi.**
- 1.7. Thiết lập bài toán vật rắn đàn hồi và các phương pháp giải gần đúng.**

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

1.1. Ký hiệu chỉ số.

Để rút gọn ta sử dụng cách diễn đạt theo chỉ số: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ hoặc $x^1, x^2, x^3, \dots, x^n$. Chỉ số có thể đặt ở dưới hoặc trên.

Biểu diễn một tổng có dạng:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = \sum_{i=1}^{i=n} a_i x_i \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial u}{\partial x^3} dx^3 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x^n} dx^n = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial u}{\partial x^i} dx^i \quad (1.2)$$

Tổng theo hai chỉ số khác nhau:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=3} \sum_{j=1}^{j=2} a_{ij} b^{ij} &= \sum_{i=1}^{i=3} (a_{i1} b^{i1} + a_{i2} b^{i2}) \\ \sum_{i=1}^{i=3} \sum_{j=1}^{j=2} a_{ij} b^{ij} &= a_{11} b^{11} + a_{12} b^{12} + a_{21} b^{21} + a_{22} b^{22} + a_{31} b^{31} + a_{32} b^{32} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Biểu diễn một tích dưới dạng:

$$\prod_{i=1}^{i=3} (a_i^1 - b_i^1) = (a_1^1 - b_1^1)(a_2^1 - b_2^1)(a_3^1 - b_3^1) \quad (1.4)$$

Quy ước **Einstein**: Nếu trong một đơn thức một chỉ số được nhắc lại một lần trên và dưới hoặc ngược lại thì có nghĩa là ta phải lấy tổng đối với chỉ số đó.

Ví dụ: $\sum_{i=1}^{i=n} a_i y^i = a_1 y^1 + a_2 y^2 + \dots + a_n y^n$

Biểu thức trên được viết lại như sau:

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i y^i = a_i y^i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Biểu thức $a_k^1 b_3^k$ với ($k = 1, 2, \dots, n$) có nghĩa là:

$$a_k^1 b_3^k = a_1^1 b_3^1 + a_2^1 b_3^2 + \dots + a_n^1 b_3^n$$

Chỉ số lặp lại dùng để chỉ phép cộng hay “chỉ số câm” mà ý nghĩa của biểu thức không thay đổi. Ví dụ:

$$a^i b_i = a^\alpha b_\alpha = a^w b_w$$

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

Chỉ số gấp một lần là chỉ số tự do và có thể nhận một trong các giá trị 1, 2, ..., N.

Qui ước phép lấy tổng:

Ví dụ:

$$\begin{aligned} a_i b_i &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & (i = 1..3) \\ a_{km} b_m &= a_{k1} b_1 + a_{k2} b_2 + a_{k3} b_3 & (m = 1..3) \\ d_{ss} &= d_{11} + d_{22} + d_{33} & (s = 1..3) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Thành phần *tensor* hạng bất kỳ có thể biểu diễn rõ và gọn nhờ ký hiệu chỉ số.

Ví dụ: a_i , b^j , T_{ij} , ϵ_{ijk} , R^{pq} .

Một số ký hiệu đặc biệt:

Ký hiệu Kronecker delta δ_{ik} , hay ký hiệu đường chéo chính, được định nghĩa như sau:

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{khi } i = k \\ 0 & \text{khi } i \neq k \end{cases} \quad (1.6)$$

Với định nghĩa đó ta có:

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Ví dụ với biểu thức: $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2$

Hay:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (dx^i)^2 \quad (1.8)$$

Ta có thể viết theo ký hiệu Kronecker:

$$ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (i = 1, 2, \dots, n \text{ và } j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.9)$$

Ta có thể viết những chỉ số trong ký hiệu Kronecker cả trên và dưới tùy theo điều kiện sử dụng: δ_{ij} , δ^{ij} , δ_j^i .

Ký hiệu hoán vị ϵ_{ijk} , được định nghĩa như sau:

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i,j,k \text{ lập thành hoán vị chẵn từ 1, 2, 3.} \\ 0 & \text{nếu hai chỉ số bất kỳ bằng nhau.} \\ -1 & \text{nếu lập thành hoán vị lẻ từ 1, 2, 3} \end{cases} \quad (1.10)$$

Từ (1.10) ta có các giá trị sau của hoán vị ứng với các giá trị của các chỉ số:

$$\varepsilon^{112} = \varepsilon^{222} = \varepsilon^{333} = 0$$

$$\varepsilon^{123} = \varepsilon^{231} = \varepsilon^{312} = 1$$

$$\varepsilon^{132} = \varepsilon^{321} = \varepsilon^{213} = -1$$

Một định thức hạng ba có thể biểu diễn theo qui ước hoán vị như sau:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = \varepsilon^{ijk} a_i^1 a_j^2 a_k^3 \quad (1.11)$$

1.2. Lý thuyết biến dạng.

Xét vật rắn hình khối V được giới hạn bởi bề mặt S. Giả thiết vật rắn có **dof** = 0, đàn hồi tuyệt đối, đồng nhất và đẳng hướng, chịu tác động của hệ ngoại lực làm cho vật bị biến dạng thành hình khối V_1 và được giới hạn bởi bề mặt S_1 .

Trong môn Đàn hồi ứng dụng ta chỉ xét trường hợp vật biến dạng đàn hồi bé thường gặp trong kỹ thuật.

1.2.1. Chuyển vị. Định lượng biến dạng.

Gọi P, Q là một cặp điểm bất kỳ rất gần nhau trong V, cần định lượng biến dạng trong miền lân cận quanh P. Chọn hệ trực vuông góc ba chiều bất kỳ Oxyz, ba tọa độ của P(x,y,z) và Q(x+dx,y+dy,z+dz).

Khi vật rắn biến dạng, P sẽ dời đến $P_1(x_1,y_1,z_1)$ và Q sẽ dời đến $Q_1(x+dx+u_1,y+dy+v_1,z+dz+w_1)$. Gọi $\overrightarrow{PP_1} = (u, v, w)$; $\overrightarrow{QQ_1} = (u_1, v_1, w_1)$, ta có:

$$x_1 = x + u; y_1 = y + v; z_1 = z + w \quad (1.12)$$

Các thành phần chuyển vị u, v, w là các đại lượng rất bé và là các hàm ba biến liên tục trong miền V:

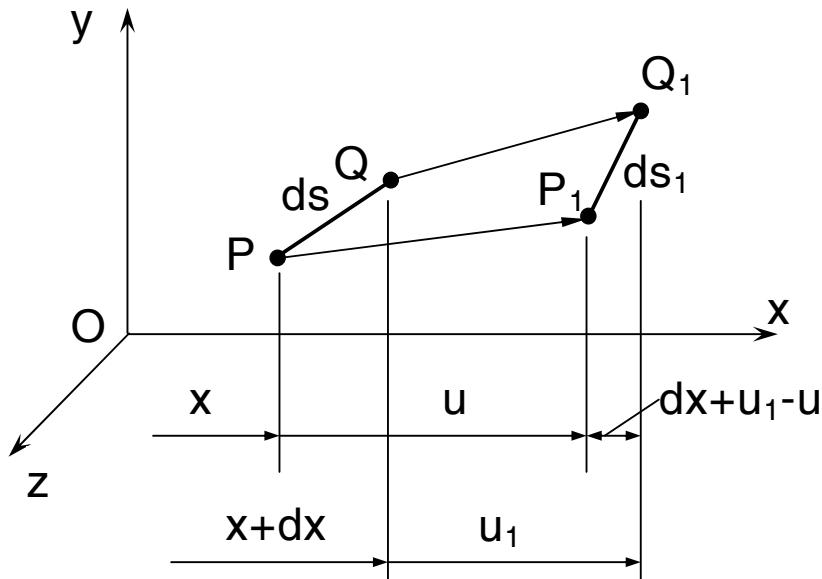
$$u = u(x,y,z); \quad v = v(x,y,z); \quad w = w(x,y,z) \quad (1.13)$$

Gọi $PQ = ds$ (hình 1.1) và các cosin chỉ phương của đoạn thẳng PQ là ℓ, m, n . Ta có:

$$dx = \ell ds; \quad dy = m ds; \quad dz = n ds \quad (1.14)$$

$$\text{và } ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.15)$$

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát



Hình 1.1

Các thành phần chuyển vị của điểm Q :

$$\begin{aligned} u_1 &= u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ v_1 &= v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ w_1 &= w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (1.16)$$

Độ dài PQ sau biến dạng (tức là P₁Q₁) :

$$ds_1^2 = (dx + u_1 - u)^2 + (dy + v_1 - v)^2 + (dz + w_1 - w)^2 \quad (1.17)$$

Theo (1.16), ta có :

$$\begin{aligned} dx + u_1 - u &= dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ dy + v_1 - v &= dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ dz + w_1 - w &= dz + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (1.18)$$

Biến dạng dài (pháp) của điểm P theo phương PQ:

$$\varepsilon = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{ds_1 - ds}{ds} \quad (1.19)$$

Từ (1.17), (1.18), (1.19) ta được :

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

$$(ds + \varepsilon ds)^2 = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right)^2 + \\ + \left(dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right)^2 + \\ + \left(dz + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right)^2$$

Kết hợp với (1.14), ta sẽ được:

$$(1 + \varepsilon)^2 = \left(\ell + \ell \frac{\partial u}{\partial x} + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \\ + \left(\ell \frac{\partial v}{\partial x} + m + m \frac{\partial v}{\partial y} + n \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\ell \frac{\partial w}{\partial x} + m \frac{\partial w}{\partial y} + n + n \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \quad (1.20)$$

Vì ε , các đạo hàm của các thành phần chuyển vị theo các tọa độ là các đại lượng vô cùng bé. Bỏ qua các vô cùng bé bậc cao, biểu thức (1.20) có dạng:

$$\varepsilon = \ell^2 \frac{\partial u}{\partial x} + m^2 \frac{\partial v}{\partial y} + n^2 \frac{\partial w}{\partial z} + \ell m \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ + \ell n \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + mn \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (1.21)$$

Ký hiệu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z \quad (1.22a)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \gamma_{xy} = \gamma_{yx}; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \gamma_{xz} = \gamma_{zx}; \\ \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \quad (1.22b)$$

Biểu thức (1.21) có dạng rút gọn như sau:

$$\varepsilon = \varepsilon_x \ell^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} \ell m + \gamma_{xz} \ell n + \gamma_{yz} m n \quad (1.23)$$

Khi vật rắn bị biến dạng phân tách thẳng không những bị giãn ra mà còn bị xoay tương đối với các trục tọa độ đã chọn.

Gọi $P_1Q_1 = ds_1$ (hình 1.1) và các cosin chỉ phương của đoạn thẳng P_1Q_1 là ℓ_1, m_1, n_1 . Tương tự (1.14) ta có:

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

$$dx + u_1 - u = \ell_1 ds_1; \quad dy + v_1 - v = m_1 ds_1; \quad dz + w_1 - w = n_1 ds_1$$

Kết hợp (1.18), (1.19), (1.14) ta có các hệ thức:

$$\begin{aligned} (1+\varepsilon)\ell_1 &= \ell \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z} \\ (1+\varepsilon)m_1 &= \ell \frac{\partial v}{\partial x} + m \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n \frac{\partial v}{\partial z} \\ (1+\varepsilon)n_1 &= \ell \frac{\partial w}{\partial x} + m \frac{\partial w}{\partial y} + n \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.24)$$

Nhân hai vế của (1.24) với $(1-\varepsilon)$, ta sẽ được:

$$\ell_1(1-\varepsilon^2) \approx \ell_1$$

$$\ell\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)(1-\varepsilon) \approx \ell\left(1 - \varepsilon + \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

.....

và các hệ thức (1.24) có dạng xấp xỉ như sau:

$$\begin{aligned}\ell_1 &= \ell \left(1 - \varepsilon + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z} \\ m_1 &= \ell \frac{\partial v}{\partial x} + m \left(1 - \varepsilon + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n \frac{\partial v}{\partial z} \\ n_1 &= \ell \frac{\partial w}{\partial x} + m \frac{\partial w}{\partial y} + n \left(1 - \varepsilon + \frac{\partial w}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (1.25)$$

Trong miền lân cận điểm P ta xét thêm một phân tố thẳng nữa là PR, với các cosin chỉ phương là ℓ' , m' , n' . Sau biến dạng, đoạn thẳng P_1R_1 có các cosin chỉ phương là ℓ'_1 , m'_1 , n'_1 được xác định bởi các biểu thức tương tự như (1.25) với biến dạng dài của điểm P theo phương PR là ε' . Ta có:

$$\cos(P_1Q_1, P_1R_1) = \ell_1\ell'_1 + m_1m'_1 + n_1n'_1 \quad (1.26)$$

Dựa vào (1.25) và các hệ thức tương tự, sau khi bỏ đi các vô cùng bé bậc cao, ta thu được:

$$\begin{aligned}\ell_1\ell'_1 &= \ell\ell' \left(1 - \varepsilon - \varepsilon' + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + (\ell m' + \ell' m) \frac{\partial u}{\partial y} + (\ell n' + \ell' n) \frac{\partial u}{\partial z} \\ m_1m'_1 &= (m\ell' + m'\ell) \frac{\partial v}{\partial x} + mm' \left(1 - \varepsilon - \varepsilon' + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (mn' + m'n) \frac{\partial v}{\partial z} \\ n_1n'_1 &= (n\ell' + n'\ell) \frac{\partial w}{\partial x} + (nm' + n'm) \frac{\partial w}{\partial y} + nn' \left(1 - \varepsilon - \varepsilon' + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

Thay ba hệ thức này vào (1.26) và dùng các ký hiệu (1.22) ta sẽ có:

$$\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{P_1Q_1}, \overrightarrow{P_1R_1}) &= (\ell\ell' + mm' + nn')(1 - \varepsilon - \varepsilon') + 2(\varepsilon_x\ell\ell' + \varepsilon_ymm' + \\ &+ \varepsilon_znn') + \gamma_{xy}(\ell m' + \ell'm) + \gamma_{yz}(mn' + m'n) + \gamma_{xz}(n\ell' + n'\ell) \end{aligned} \quad (1.27)$$

Nếu $PQ \perp PR$ thì $\ell\ell' + mm' + nn' = 0$, và trong trường hợp này:

$$\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{P_1Q_1}, \overrightarrow{P_1R_1}) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{P_1Q_1}, \overrightarrow{P_1R_1})\right) = 2(\varepsilon_x\ell\ell' + \varepsilon_ymm' + \\ &+ \varepsilon_znn') + \gamma_{xy}(\ell m' + \ell'm) + \gamma_{yz}(mn' + m'n) + \gamma_{xz}(n\ell' + n'\ell) \end{aligned}$$

vì biến dạng đàn hồi bé nên:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{P_1Q_1}, \overrightarrow{P_1R_1})\right) \approx \frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{P_1Q_1}, \overrightarrow{P_1R_1}) = \gamma \quad (1.28)$$

Cuối cùng ta thu được:

$$\begin{aligned} \gamma &= 2(\varepsilon_x\ell\ell' + \varepsilon_ymm' + \varepsilon_znn') + \gamma_{xy}(\ell m' + \ell'm) + \\ &+ \gamma_{yz}(mn' + m'n) + \gamma_{xz}(n\ell' + n'\ell) \end{aligned} \quad (1.29)$$

Về phải của (1.29) xác định lượng giảm góc vuông ban đầu tạo bởi 2 phân tố thẳng PQ và PR và γ là đại lượng bé. γ được gọi là *độ trượt (góc) tương đối* của điểm P trong mặt phẳng (PQR).

ε và γ là 2 khái niệm định lượng biến dạng trong miền lân cận của điểm P.

1.2.2. Các phương trình động học. Các hệ thức Cauchy.

Ý nghĩa cơ học của các ký hiệu (1.22) có thể được thấy dựa vào các phân tích sau đây.

Nếu phân tố PQ // Ox thì $\ell = 1$ và $m = n = 0$. Trong trường hợp này từ (1.23) ta được $\varepsilon = \varepsilon_x$, nghĩa là ε_x biểu thị độ giãn dài tương đối (tỷ đối) của phân tố thẳng tại P và song song với trục Ox. Tương tự, ε_y hoặc ε_z biểu thị độ giãn dài tỷ đối của phân tố thẳng tại P và song song với trục Oy hoặc Oz.

Nếu phân tố PQ // Ox và PR // Oy thì $\ell = 1, m = n = 0$ và $\ell' = n' = 0, m' = 1$. Trong trường hợp này từ (1.29) ta được $\gamma = \gamma_{xy}$, nghĩa là γ_{xy} biểu thị độ trượt tương đối tại P trong mặt phẳng song song với mặt phẳng (Oxy). Tương tự, γ_{yz} hoặc γ_{xz} biểu thị độ trượt tương đối tại P trong mặt phẳng song song với mặt phẳng (Oyz) hoặc mặt phẳng (Oxz).

Như vậy các ký hiệu (1.22) biểu thị sáu đại lượng biến dạng gắn liền với hệ trục có gốc tại P và song song với các trục tọa độ x, y, z đã chọn trước. Sáu thành phần biến dạng $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ được định nghĩa là các thành phần biến dạng của điểm P tương ứng với hệ trục Oxyz đã chọn trước. Theo (1.22),

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

các thành phần biến dạng tại P được hoàn toàn xác định bởi ba thành phần chuyển vị u, v, w của điểm P trong cùng hệ trục tọa độ. Các hệ thức (1.22) được gọi là *các hệ thức Cauchy*. Chúng mang tính chất động học và được gọi là các phương trình động học vật rắn biến dạng.

1.2.3. Tensor biến dạng.

Sáu thành phần biến dạng $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ hợp thành nhóm dữ liệu cần và đủ để xác định được hết mọi độ giãn dài tương đối ε và độ trượt tương đối trong toàn miền lân cận quanh điểm P. Nhóm dữ liệu này được sắp xếp dưới dạng *tensor* biến dạng như sau:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

Tensor biến dạng (1.30) phụ thuộc hệ trục tọa độ 0xyz chọn trước. Với hai hệ trục chọn trước Oxyz và Ox'y'z' có chung gốc tọa độ ta sẽ chứng minh hai *tensor* biến dạng tương ứng phụ thuộc nhau theo qui luật tuyến tính. Bảng cosin chỉ phương giữa hai hệ trục như sau:

Bảng 1.1

	x	y	z
x'	ℓ_1	m_1	n_1
y'	ℓ_2	m_2	n_2
z'	ℓ_3	m_3	n_3

Dựa vào các hệ thức (1.23) và (1.29) ta có:

$$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x \ell_1^2 + \varepsilon_y m_1^2 + \varepsilon_z n_1^2 + \gamma_{xy} \ell_1 m_1 + \gamma_{yz} m_1 n_1 + \gamma_{zx} n_1 \ell_1 \quad (1.31a)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{x'y'} = & 2(\varepsilon_x \ell_1 \ell_2 + \varepsilon_y m_1 m_2 + \varepsilon_z n_1 n_2) + \gamma_{xy} (\ell_1 m_2 + m_1 \ell_2) + \\ & + \gamma_{yz} (m_1 n_2 + n_1 m_2) + \gamma_{zx} (n_1 \ell_2 + \ell_1 n_2) \end{aligned} \quad (1.32)$$

Lần lượt hoán vị vòng quanh giữa các chữ x', y', z', đồng thời hoán vị vòng quanh giữa các chữ số 1, 2, 3 trong hai hệ thức (1.31a) và (1.32) ta sẽ được các hệ thức xác định $\varepsilon_y, \varepsilon_z$ và $\gamma_{y'z'}, \gamma_{z'x'}$ qua $\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$ và γ_{zx} . Các hệ thức mới thu được có dạng tương tự như (1.31a) và (1.32).

Thí dụ:

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

$$\varepsilon_{y'} = \varepsilon_x \ell_2^2 + \varepsilon_y m_2^2 + \varepsilon_z n_2^2 + \gamma_{xy} \ell_2 m_2 + \gamma_{yz} m_2 n_2 + \gamma_{zx} n_2 \ell_2 \quad (1.31b)$$

$$\varepsilon_{z'} = \varepsilon_x \ell_3^2 + \varepsilon_y m_3^2 + \varepsilon_z n_3^2 + \gamma_{xy} \ell_3 m_3 + \gamma_{yz} m_3 n_3 + \gamma_{zx} n_3 \ell_3 \quad (1.31c)$$

Cộng ba hệ thức (1.31a), (1.31b), (1.31c) ta được:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x'} + \varepsilon_{y'} + \varepsilon_{z'} &= \varepsilon_x (\ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2) + \varepsilon_y (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) + \\ &+ \varepsilon_z (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) + \gamma_{xy} (\ell_1 m_1 + \ell_2 m_2 + \ell_3 m_3) + \\ &+ \gamma_{yz} (m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3) + \gamma_{zx} (n_1 \ell_1 + n_2 \ell_2 + n_3 \ell_3) \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } \varepsilon_{x'} + \varepsilon_{y'} + \varepsilon_{z'} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (1.33)$$

Như vậy tổng ba biến dạng dài theo ba phương vuông góc với nhau là một hằng số và tổng này được gọi là biến thứ nhất của *tensor* biến dạng.

1.2.4. Các trục chính biến dạng.

Ta sẽ chứng minh rằng tại điểm P bất kỳ có thể xác định một hệ trục vuông góc có đặc điểm là biến dạng trượt γ trong ba mặt phẳng tạo bởi từng cặp trục vuông góc đó bị triệt tiêu.

Cho phân tố thẳng PQ xoay quanh điểm P, biến dạng dài của phân tố PQ theo phương bất kỳ là ε . Theo mỗi hướng của PQ ta đặt một vector \overrightarrow{PM} có độ dài:

$$|\overrightarrow{PM}| = r = \frac{k}{\sqrt{|\varepsilon|}} \quad (1.34)$$

trong đó k là hệ số không đổi.

Nếu chọn gốc tọa độ O \equiv P thì điểm ngọn của vector \overrightarrow{PM} có các tọa độ là:

$$x = \ell r; \quad y = mr; \quad z = nr \quad (1.35)$$

$$\text{Theo (1.34) ta có: } \varepsilon = \pm k^2/r^2 \quad (1.36)$$

Thay (1.36) vào (1.23) và lấy ℓ, m, n từ (1.35) ta có:

$$\pm k^2 = \varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 + \varepsilon_z z^2 + \gamma_{xy} xy + \gamma_{xz} xz + \gamma_{yz} yz \quad (1.37)$$

Phương trình (1.37) biểu diễn một mặt bậc hai. Điểm ngọn của mọi vector \overrightarrow{PM} đều nằm trên mặt bậc hai này.

Đối với mặt bậc hai được biểu diễn bởi phương trình (1.37) bao giờ cũng có thể chọn tại P một hệ trục vuông góc có hướng sao cho các số hạng chứa tích các tọa độ bị triệt tiêu, tức là $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$.

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

Hệ trục vuông góc có đặc điểm như thế được gọi là ba trục chính biến dạng tại P. Biến dạng dài của điểm P theo trục chính biến dạng được gọi là biến dạng chính.

Nếu chọn ba phương chính biến dạng làm các trục tọa độ x, y, z và gọi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ là các biến dạng chính tương ứng. Phương trình (1.37) sẽ có dạng:

$$\pm k^2 = \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 \quad (1.38)$$

Nếu cả ba biến dạng chính cùng dấu thì phương trình (1.38) biểu diễn mặt *ellipsoid*.

Tóm lại, tại mỗi điểm P trong vật rắn biến dạng luôn tồn tại ba phương chính biến dạng vuông góc lẫn nhau, trong mỗi mặt phẳng hợp thành bởi hai trục chính biến dạng trượt sẽ bị triệt tiêu.

1.2.5. Các hệ thức rút gọn.

Ta sẽ sử dụng hệ thống ký hiệu chỉ số để thay thế hệ thống ký hiệu thường trong những trường hợp cần thiết.

Trong hệ thống ký hiệu mới có loại ký hiệu một chỉ số, có loại ký hiệu hai chỉ số. Nhóm ký hiệu một chỉ số bao gồm:

Bảng 1.2

Ký hiệu cũ	x	y	z	u	v	w	ℓ	m	n
Ký hiệu mới	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	n_1	n_2	n_3

Nhóm ký hiệu hai chỉ số để biểu diễn các thành phần biến dạng và các cosin chỉ phương giữa hai hệ trục tọa độ. Thay cho bảng 1.1 ta có bảng 1.3:

Bảng 1.3

	x_1	x_2	x_3
x'_1	n'_{11}	n'_{12}	n'_{13}
x'_2	n'_{21}	n'_{22}	n'_{23}
x'_3	n'_{31}	n'_{32}	n'_{33}

Về các thành phần biến dạng ta có:

Bảng 1.4

Ký hiệu cũ	ε_x	ε_y	ε_z	γ_{xy}	γ_{yz}	γ_{zx}
Ký hiệu mới	ε_{11}	ε_{22}	ε_{33}	$2\varepsilon_{12}$	$2\varepsilon_{23}$	$2\varepsilon_{31}$

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

Sử dụng các ký hiệu mới, sáu hệ thức *Cauchy* (1.22) được thay thế bởi một hệ thức có dạng:

$$2\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.39)$$

Ba hệ thức dạng (1.31) và ba hệ thức dạng (1.32) được thay thế bởi một hệ thức có dạng chỉ số như sau (chú ý $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ với $i \neq j$):

$$\varepsilon'_{\ell k} = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ij} n'_{\ell i} n'_{kj} = \varepsilon_{ij} n'_{\ell i} n'_{kj}; \quad \ell, k = 1, 2, 3 \quad (1.40)$$

Tensor biến dạng (1.30) có thể viết dưới dạng:

$$T_\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} = \varepsilon_{ij} \quad (1.41)$$

1.3. Lý thuyết ứng suất.

1.3.1. Lực khối, lực mặt.

Một trong những vấn đề chính của cơ học môi trường liên tục là nghiên cứu vấn đề truyền lực trong môi trường. Các lực trong môi trường liên tục được phân làm hai loại: lực khối và lực mặt.

Chúng ta ký hiệu b_i là lực tác động lên trên một đơn vị khối lượng và p_i là lực tác động lên một đơn vị thể tích, giữa chúng có mối quan hệ sau:

$$\rho b_i = p_i \quad (1.42)$$

với ρ là khối lượng riêng của vật thể:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = \frac{dM}{dV} \quad (1.43)$$

Các lực tác động lên phần tử mặt được gọi là lực mặt, có thứ nguyên là lực trên một đơn vị diện tích. Ví dụ: Lực tương tác do tiếp xúc giữa các vật thể thuộc về dạng lực mặt.

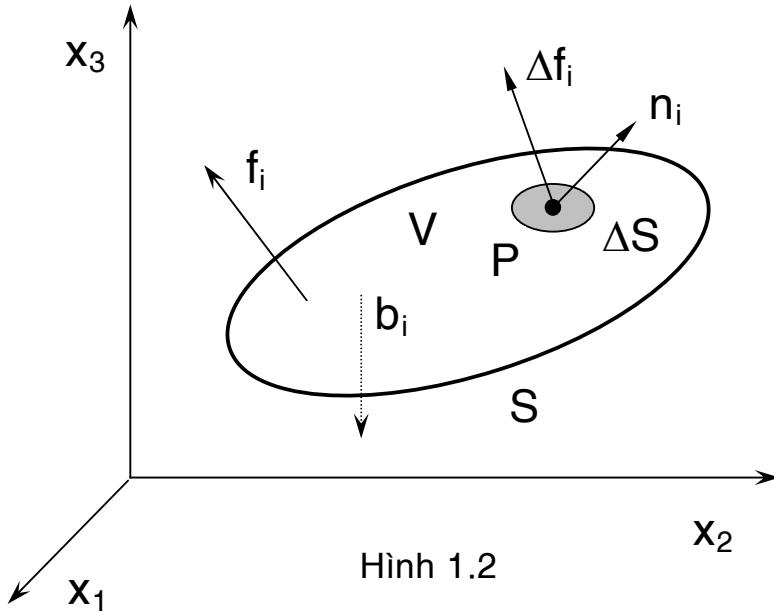
1.3.2. Nguyên lý ứng suất *Cauchy*. Vector ứng suất.

Vector ứng suất được xác định như sau:

$$t_i^{(n)} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f_i}{\Delta S} = \frac{df_i}{dS} \quad (1.44)$$

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

Hình 1.2 biểu diễn vật thể có thể tích V , được bao bọc bởi bề mặt S . Vật thể chịu lực mặt f_i và lực khối b_i .



Ký hiệu $t_i^{(n)}$ dùng để nhấn mạnh *vector ứng suất* tại điểm P cho trước của môi trường liên tục hiển nhiên phải phụ thuộc vào hướng của phần tử mặt ΔS đã chọn và cho bằng *vector pháp tuyến đơn vị* n_i . Nếu lấy bất kỳ phần tử mặt có định hướng nào khác với pháp tuyến đơn vị khác thì *vector ứng suất* tại điểm P trên phân tố cũng khác đi.

1.3.3. Trạng thái ứng suất tại một điểm – *Tensor ứng suất*.

Ký hiệu các *vector pháp tuyến* ngoài $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ và các *vector ứng suất* $t_i^{(\hat{e}_1)}, t_i^{(\hat{e}_2)}, t_i^{(\hat{e}_3)}$ như trên hình 1.3.

Biểu diễn mỗi một trong ba *vector ứng suất* trên các tiết diện song song với các mặt phẳng tọa độ qua các thành phần *Descartes* của chúng:

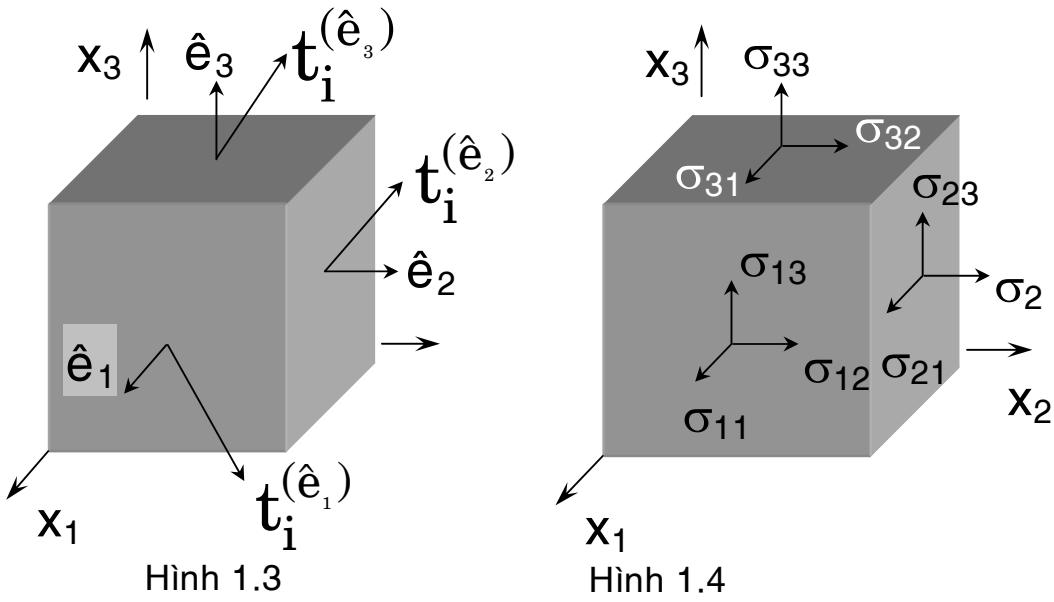
$$\begin{aligned} t_i^{(\hat{e}_1)} &= t_1^{(\hat{e}_1)}\hat{e}_1 + t_2^{(\hat{e}_1)}\hat{e}_2 + t_3^{(\hat{e}_1)}\hat{e}_3 = t_j^{(\hat{e}_1)}\hat{e}_j \\ t_i^{(\hat{e}_2)} &= t_1^{(\hat{e}_2)}\hat{e}_1 + t_2^{(\hat{e}_2)}\hat{e}_2 + t_3^{(\hat{e}_2)}\hat{e}_3 = t_j^{(\hat{e}_2)}\hat{e}_j \\ t_i^{(\hat{e}_3)} &= t_1^{(\hat{e}_3)}\hat{e}_1 + t_2^{(\hat{e}_3)}\hat{e}_2 + t_3^{(\hat{e}_3)}\hat{e}_3 = t_j^{(\hat{e}_3)}\hat{e}_j \end{aligned} \quad (1.45)$$

với \hat{e}_j là các *vector đơn vị* theo ba phương X_1, X_2, X_3 ; $t_1^{(\hat{e}_j)}, t_2^{(\hat{e}_j)}, t_3^{(\hat{e}_j)}$ là ba tọa độ của *vector ứng suất* $t_i^{(\hat{e}_j)}$.

Từ (1.45) ta có chín thành phần của $t_i^{(\hat{e}_1)}, t_i^{(\hat{e}_2)}, t_i^{(\hat{e}_3)}$ có thể biểu diễn dạng:

$$t_j^{(\hat{e}_i)} \equiv \sigma_{ij} \quad (1.46)$$

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát



Hay được biểu diễn dưới dạng *tensor*:

$$T_{\sigma} = \sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (1.47)$$

Ứng suất được xác định bằng các thành phần *Descartes* và các mặt phẳng tọa độ được biểu diễn trên hình 1.4.

Qui ước dấu của các thành phần *tensor* ứng suất: thành phần ứng suất là dương, nếu trên tiết diện mà pháp tuyến ngoài của nó trùng với chiều dương của một trong các trục tọa độ, lực tác động dọc theo chiều dương của trục này. Thành phần σ_{ij} cho lực tác dụng theo hướng của trục tọa độ thứ j lên tiết diện có pháp tuyến ngoài song song trục tọa độ thứ i. Mọi thành phần ứng suất biểu diễn trên hình 1.4 đều dương.

1.3.4. Liên hệ giữa *tensor* ứng suất và *vector* ứng suất trên mặt nghiêng.

Xét phân tố tứ diện PABC, giới hạn bởi các mặt phẳng của hệ trục tọa độ và ABC, gọi:

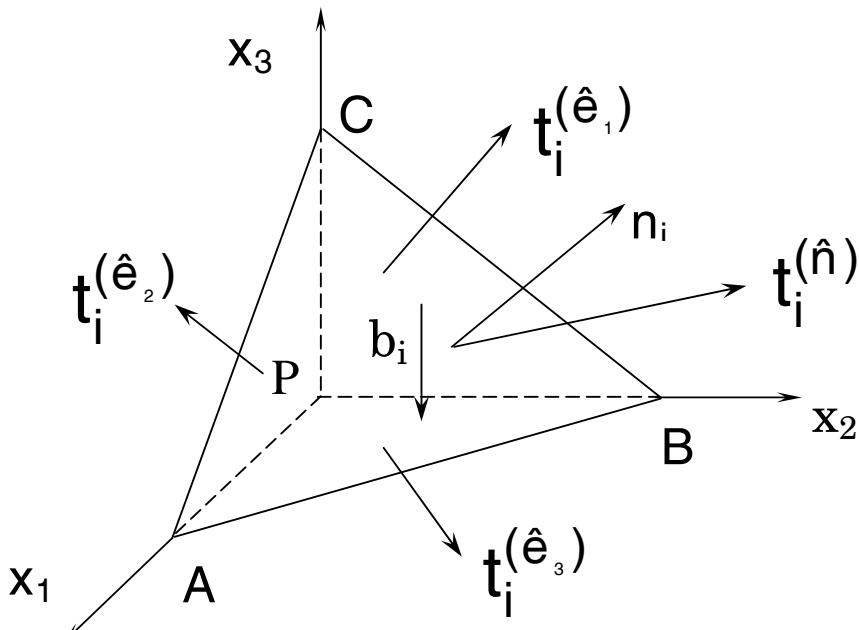
n_i : pháp tuyến ngoài của ABC

dS : diện tích của ABC

dS_i : diện tích của các mặt bên

$dS_i = dS \cos(n_i, \hat{e}_i) = dS n_i$

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát



Hình 1.5

Để tứ diện cân bằng lực thì phương trình hình chiếu sau phải thỏa:

$$t_i^{(n)} dS = t_i^{(\hat{e}_1)} dS_1 + t_i^{(\hat{e}_2)} dS_2 + t_i^{(\hat{e}_3)} dS_3 + \rho b_i dV \quad (1.48)$$

Trong đó b_i là lực tác dụng lên một đơn vị khối lượng (lực khối), mà $\rho b_i dV$ tiến về 0 nhanh hơn vì bậc cao hơn. Nên từ (1.48) ta có :

$$t_i^{(n)} dS = t_i^{(\hat{e}_j)} n_j dS = \sigma_{ji} n_j dS \quad (1.49)$$

Từ (1.46) và (1.49) ta có hệ thức *Cauchy* như sau:

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j \quad (1.50a)$$

Dạng chi tiết của (1.50a) biểu diễn ba thành phần hình chiếu lên ba trục tọa độ của vector ứng suất $t_i^{(n)}$ trên mặt nghiêng ABC:

$$\begin{aligned} t_1^{(n)} &= \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3 \\ t_2^{(n)} &= \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3 \\ t_3^{(n)} &= \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3 \end{aligned} \quad (1.50b)$$

1.3.5. Cân bằng moment và tính đối ứng của ứng suất tiếp.

Để cân bằng thể tích V bất kỳ, ta cần có:

- Vector chính của hệ lực tác động lên V bằng 0.
- Vector moment chính tác động lên V bằng 0.

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

a) Xét cân bằng lực.

$$\int_S t_i^{(n)} dS + \int_V \rho b_i dV = \int_S \sigma_{ji} n_j dS + \int_V \rho b_i dV = 0 \quad (1.51)$$

Theo định lý Gauss về quan hệ tích phân mặt và tích phân khối, ta có:

$$\int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i \right) dV = 0 \quad (1.52)$$

Do V là thể tích bất kỳ nên từ (1.52) ta có:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i = 0 \quad (1.53a)$$

Dạng khai triển các phương trình cân bằng (1.53a):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho b_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho b_2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho b_3 &= 0 \end{aligned} \quad (1.53b)$$

b) Xét cân bằng moment.

Khi không có các moment phân bố, để cân bằng moment với gốc tọa độ cần phải có:

$$\int_S \varepsilon_{ijk} x_j t_k^{(n)} dS + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k dV = 0 \quad (1.54)$$

Ở đây x_i là bán kính vector của phần tử mặt hay thể tích, ε_{ijk} là hoán vị.

Áp dụng định lý Gauss, ta có:

$$\int_V \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial(x_j \sigma_{lk})}{\partial x_l} + \rho x_j b_k \right) dV = 0 \quad (1.55)$$

Do V bất kỳ, khai triển hàm dưới dấu tích phân (1.55), khai triển đạo hàm riêng ta có:

$$\varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial(x_j \sigma_{lk})}{\partial x_l} + \rho x_j b_k \right) = \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l} x_j + \delta_{lj} \sigma_{lk} + \rho x_j b_k \right) = 0 \quad (1.56)$$

$$\varepsilon_{ijk} \left(\left(\frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l} + \rho b_k \right) x_j + \sigma_{jk} \right) = 0 \quad (1.57)$$

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

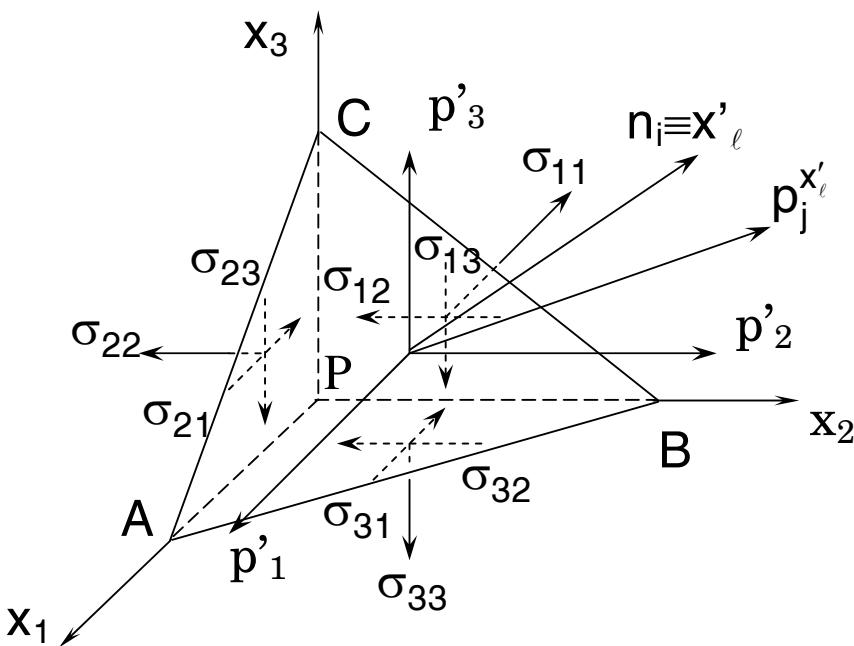
Từ (1.53) và (1.57) ta có: $\varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} = 0$ (1.58)

Hay $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ (1.59)

1.3.6. Phương chính, mặt chính và ứng suất chính.

Ta sẽ chứng minh rằng khi xoay hệ trục cũ x_j sang hệ trục mới x'_k thì tensor ứng suất trong hệ trục mới $\sigma'_{\ell k}$ sẽ được xác định tuyến tính theo tensor ứng suất trong hệ trục cũ $\sigma_{\ell k}$.

Gọi cosin chỉ phương của mỗi trục tọa độ mới xét trong hệ trục cũ là n'_{kj} ($k, j = 1, 2, 3$). Tại P ta hình dung phân tố thể tích bốn mặt như hình 1.6, pháp tuyến ngoài của mặt nghiêng ABC là một trục tọa độ mới x'_ℓ ($\ell = 1$ hoặc $2, 3$), vector ứng suất trên mặt đó là $p_j^{x'_\ell}$, các hình chiếu của nó trong hệ trục cũ x_j là p'_j ($j = 1, 2, 3$) còn trong hệ trục mới x'_k là các thành phần ứng suất $\sigma'_{\ell k}$ ($k = 1, 2, 3$). Ký hiệu \bar{e}_j ($j = 1, 2, 3$) và \bar{e}'_k ($k = 1, 2, 3$) theo thứ tự là các vector đơn vị trên các trục tọa độ cũ và mới, ta có:



Hình 1.6

$$p'_j \bar{e}_j = \sigma'_{\ell k} \bar{e}'_k$$

Nhân vô hướng hai vế với \bar{e}'_k ta được:

$$p'_j n'_{kj} = \sigma'_{\ell k}, \quad (k = 1, 2, 3)$$

Mặt khác, theo (1.50), $p'_j = \sigma'_{ij} n'_{\ell i}$; như vậy đổi với ba thành phần ứng suất $\sigma'_{\ell k}$ ($k = 1, 2, 3$) ta suy ra hệ thức:

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

$$\sigma'_{\ell k} = \sigma_{ij} n'_{\ell i} n'_{kj} \quad (1.60)$$

Công thức (1.60) biểu diễn một biến đổi tuyến tính từ tensor ứng suất σ_{ij} trong hệ trục cũ x_j sang tensor ứng suất $\sigma'_{\ell k}$ khi xoay hệ trục x_j sang hệ trục tọa độ mới x'_k quanh điểm P.

Nếu có hệ trục tọa độ mới x_k^* mà tensor ứng suất có dạng:

$$T_\sigma = \sigma_{\ell k}^* = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}^* \end{Bmatrix} \quad (1.61)$$

thì các trục x_k^* ($k = 1, 2, 3$) được gọi là *ba trục chính ứng suất*, ba mặt nghiêng vuông góc với ba trục chính được gọi là *ba mặt chính* và ba ứng suất pháp (các ứng suất tiếp trên các mặt chính bằng không) trên ba mặt chính được gọi là *ba ứng suất chính* tại P.

Giả sử tại P tồn tại một ứng suất chính $\bar{\sigma}_*$, ta gọi \vec{n}_* là vector đơn vị trên trục chính này. Ba hình chiếu của $\bar{\sigma}_*$ trong hệ trục tùy ý chọn trước x_j :

$$p_j = \sigma_* n_{*j} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (1.62)$$

Mặt khác, theo (1.50) ta có:

$$p_j = \sigma_{ij} n_{*i} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (1.63)$$

Đồng nhất (1.62) và (1.63) ta có hệ phương trình tuyến tính đối với các cosin chỉ phương của trục chính n_{*i} :

$$(\sigma_{ij} - \sigma_* \delta_{ij}) n_{*i} = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (1.64)$$

Hệ phương trình (1.64) luôn tồn tại bộ nghiệm tâm thường $n_{*i} = 0$. Vì cả ba cosin chỉ phương không thể đồng thời bằng không, tức là (1.64) buộc phải tồn tại bộ nghiệm khác không. Hay định thức của (1.64) phải bằng không, nghĩa là:

$$\sigma_*^3 - I_1 \sigma_*^2 - I_2 \sigma_* - I_3 = 0 \quad (1.65)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ I_2 &= -\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{33}\sigma_{11} + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 \\ I_3 &= \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{31}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 \end{aligned} \quad (1.66)$$

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

là ba bất biến của tensor ứng suất.

Phương trình (1.65) luôn có ba nghiệm thực và được ký hiệu qui ước là $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Ba ứng suất chính này không phụ thuộc vào hệ trục tọa độ.

Từ hệ ba phương trình (1.64), thay chỉ số * bởi chữ số 1, nghĩa là σ_* bởi σ_1 ta được:

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} - \sigma_1)n_{11} + \sigma_{21}n_{12} + \sigma_{31}n_{13} &= 0 \\ \sigma_{12}n_{11} + (\sigma_{22} - \sigma_1)n_{12} + \sigma_{32}n_{13} &= 0 \\ \sigma_{13}n_{11} + \sigma_{23}n_{12} + (\sigma_{33} - \sigma_1)n_{13} &= 0 \end{aligned} \quad (1.67)$$

Nhân phương trình thứ nhất với n_{21} , phương trình thứ hai với n_{22} và phương trình thứ ba với n_{23} rồi cộng lại ta được:

$$\begin{aligned} &[(\sigma_{11} - \sigma_1)n_{11} + \sigma_{21}n_{12} + \sigma_{31}n_{13}]n_{21} + \\ &+ [\sigma_{12}n_{11} + (\sigma_{22} - \sigma_1)n_{12} + \sigma_{32}n_{13}]n_{22} + \\ &+ [\sigma_{13}n_{11} + \sigma_{23}n_{12} + (\sigma_{33} - \sigma_1)n_{13}]n_{23} = 0 \end{aligned} \quad (1.68)$$

Tương tự, từ hệ ba phương trình (1.64), thay chỉ số * bởi chữ số 2, nghĩa là σ_* bởi σ_2 ta được:

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} - \sigma_2)n_{21} + \sigma_{21}n_{22} + \sigma_{31}n_{23} &= 0 \\ \sigma_{12}n_{21} + (\sigma_{22} - \sigma_2)n_{22} + \sigma_{32}n_{23} &= 0 \\ \sigma_{13}n_{21} + \sigma_{23}n_{22} + (\sigma_{33} - \sigma_2)n_{23} &= 0 \end{aligned} \quad (1.69)$$

Nhân phương trình thứ nhất với n_{11} , phương trình thứ hai với n_{12} và phương trình thứ ba với n_{13} rồi cộng lại ta được:

$$\begin{aligned} &[(\sigma_{11} - \sigma_2)n_{21} + \sigma_{21}n_{22} + \sigma_{31}n_{23}]n_{11} + \\ &+ [\sigma_{12}n_{21} + (\sigma_{22} - \sigma_2)n_{22} + \sigma_{32}n_{23}]n_{12} + \\ &+ [\sigma_{13}n_{21} + \sigma_{23}n_{22} + (\sigma_{33} - \sigma_2)n_{23}]n_{13} = 0 \end{aligned} \quad (1.70)$$

Lấy (1.68) trừ (1.70) ta có:

$$(\sigma_2 - \sigma_1)(n_{11}n_{21} + n_{12}n_{22} + n_{13}n_{23}) = 0 \quad (1.71)$$

Nói chung, $\sigma_2 \neq \sigma_1$, nên:

$$n_{11}n_{21} + n_{12}n_{22} + n_{13}n_{23} = 0 \text{ hay } n_{1i}n_{2i} = 0 \quad (1.72)$$

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

Điều này cho thấy hai trục chính tương ứng vuông góc với nhau, $\vec{\sigma}_1 \perp \vec{\sigma}_2$. Lập luận tương tự ta sẽ có kết quả là ba phương chính vuông góc lẫn nhau.

Nếu hệ trục tọa độ x_j trên hình 1.6 chọn trùng với ba phương chính ứng suất, ta có các hình chiếu của *vector* ứng suất \vec{p} trên mặt nghiêng ABC:

$$p_1 = \sigma_1 n_1; p_2 = \sigma_2 n_2; p_3 = \sigma_3 n_3 \quad (1.73)$$

Dựng *vector* $\overrightarrow{PM} = \vec{p}$ tại P, các tọa độ của điểm ngọn M:

$$x_1 = p_1; x_2 = p_2; x_3 = p_3 \quad (1.74)$$

Do đó, ta suy ra:

$$\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{x_3^2}{\sigma_3^2} = 1 \quad (1.75)$$

Phương trình (1.75) biểu diễn mặt *ellipsoid*. Từ phương trình này rút ra kết luận rằng: trong ba *vector* ứng suất chính có một *vector* ứng suất chính lớn nhất, một *vector* ứng suất chính bé nhất và *vector* ứng suất chính lớn nhất là *vector* ứng suất cực đại trong toàn miền lân cận quanh điểm P.

1.4. Lý thuyết đàn hồi tuyến tính.

Được xây dựng theo cách tiếp cận năng lượng, dựa trên các giả thiết:

- Biến dạng bé.
- Quá trình biến dạng là đoạn nhiệt, tức là vật thể không có thu nhiệt hay hao tán về nhiệt.

1.4.1. Hàm năng lượng biến dạng.

Xét phân tố vô cùng bé của vật thể tại điểm P, có thể tích dV chịu lực khói f_i và lực bề mặt t_i tác dụng lên bề mặt rất nhỏ dS . Vật thể biến dạng sao cho điểm P dịch chuyển một đoạn rất nhỏ là du_i .

Công sinh ra do lực thể tích f_i là:

$$dW_{tt} = f_i du_i dV \quad (1.76)$$

Công sinh ra do lực bề mặt t_i là:

$$dW_{bm} = t_i du_i dS$$

Từ (1.50a) ta có: $dW_{bm} = \sigma_{ij} n_j dS du_i$ (1.77)

Theo định lý *Gauss*:

$$dW_{bm} = (\sigma_{ij} du_j)_{,i} dV = (\sigma_{ij,i} du_j + \sigma_{ij} du_{j,i}) dV \quad (1.78)$$

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

Nếu như trong quá trình biến dạng, vật thể không tiếp thu hay hao tán nhiệt, toàn bộ công sinh ra sẽ chuyển thành năng lượng biến dạng hay thế năng biến dạng tích lũy bên trong vật thể (nội năng). Nội năng của hệ:

$$dUdV = dW_{tt} + dW_{bm} \quad (1.79)$$

Từ (1.76) và (1.78), ta có:

$$dUdV = [(f_j + \sigma_{ij,i})du_j + \sigma_{ij}du_{j,i}]dV \quad (1.80)$$

Theo (1.53a): $dU = \sigma_{ij}du_{j,i}$ (1.81)

Quan hệ (1.81) được viết lại dưới dạng như sau:

$$dU = (\sigma_{ij}du_{j,i} + \sigma_{ji}du_{i,j})/2 = \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} \quad (1.82)$$

Nếu thành phần ứng suất là hàm thuần nhất của biến dạng thì sẽ tồn tại hàm năng lượng biến dạng U chỉ phụ thuộc vào biến dạng:

$$U = U(\varepsilon_{ij}) \quad (1.83)$$

Do đó có thể coi U như một hàm của các biến dạng và có thể viết vi phân toàn phần của hàm này:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} \quad (1.84)$$

Từ (1.82) và (1.84), ta có:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (1.85)$$

Đây là công thức *Green* được phát biểu như sau: ứng suất bằng đạo hàm riêng bậc nhất của hàm năng lượng U theo các biến dạng tương ứng chỉ số.

1.4.2. Vật thể đàn hồi.

Vật thể đàn hồi có biến dạng do tải tác động chỉ phụ thuộc vào trạng thái ứng suất ở thời điểm hiện tại mà không phụ thuộc vào biến dạng cũng như quá trình đặt tải trong quá khứ. Quá trình biến dạng là một quá trình thuận nghịch, nghĩa là khi bỏ tải, biến dạng và ứng suất sẽ theo quá trình cũ trở về trạng thái ban đầu.

Sự tồn tại hàm năng lượng biến dạng sao cho thành phần ứng suất là hàm thuần nhất đơn trị của thành phần biến dạng là tính chất cơ bản của vật thể đàn hồi.

1.4.3. Vật thể đàn hồi tuyến tính.

Giả thiết tại điểm P, biến dạng và ứng suất được xác định trong cùng hệ trực tọa độ. Đối với vật rắn biến dạng đàn hồi quan hệ giữa ứng suất và biến dạng

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

tuân theo định luật *Hooke*: đối với vật thể đàn hồi, ứng suất là hàm tuyến tính và thuần nhất của biến dạng.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (1.86)$$

Các hệ số C_{ijkl} lập thành tensor hằng số đàn hồi bậc bốn gồm 81 thành phần. Nhưng do tính đối xứng của tensor ứng suất và biến dạng nên chỉ có 21 thành phần là độc lập tuyến tính. Ta có:

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk} \quad (1.87)$$

Thay (1.86) vào (1.82), ta có:

$$\begin{aligned} dU &= C_{ijkl}\varepsilon_{kl}d\varepsilon_{ij} \\ dU &= \frac{1}{2}(C_{ijkl}\varepsilon_{kl}d\varepsilon_{ij} + C_{ijkl}\varepsilon_{kl}d\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2}(C_{ijkl}\varepsilon_{kl}d\varepsilon_{ij} + C_{klij}\varepsilon_{ij}d\varepsilon_{kl}) \end{aligned}$$

Nhờ (1.87), ta có:

$$dU = \frac{1}{2}(C_{ijkl}\varepsilon_{kl}d\varepsilon_{ij} + C_{ijkl}\varepsilon_{ij}d\varepsilon_{kl}) = \frac{1}{2}C_{ijkl}d(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl})$$

Tích phân phương trình trên từ trạng thái ban đầu (ứng suất và biến dạng bằng không), ta có:

$$U = \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \quad (1.88)$$

Vật thể đàn hồi tuyến tính mang những tính chất sau:

- Năng lượng U tích lũy bên trong một đơn vị thể tích hay nội năng riêng luôn dương, là hàm thuần nhất của ε_{ij} và có thể xấp xỉ bằng dạng toàn phương (1.88).

- Thỏa mãn định luật bảo toàn năng lượng (không tính đến sự hao tán nhiệt).

Do tensor ứng suất và biến dạng đối xứng nên các hằng số đàn hồi không lớn hơn 21. Khi viết định luật *Hooke* qua 21 hệ số này, các chỉ số kép ở mỗi thành phần của tensor ứng suất và biến dạng được thay bằng chỉ số đơn từ 1 đến 6 như sau:

$$\{\sigma_i\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon_i\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} \quad (1.89)$$

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

Như vậy, định luật *Hooke* mở rộng cho vật thể đàn hồi tuyến tính bất kỳ ở dạng chỉ số:

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \text{ với } (i, j = 1..6) \quad (1.90)$$

hay ở dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ \text{Sym} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix} \quad (1.91)$$

Với C_{ij} là tensor độ cứng bậc hai có 21 thành phần liên hệ với 21 thành phần của tensor bậc bốn C_{ijkl} như phương trình (1.92).

$$[C_i] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1131} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} \\ & & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} \\ & & & C_{1212} & C_{1223} & C_{1231} \\ & & & C_{2323} & C_{2331} & \\ \text{Sym} & & & & & C_{3131} \end{bmatrix} \quad (1.92)$$

Theo (1.88), hàm năng lượng biến dạng: $U = \frac{1}{2} \sigma_i \varepsilon_i$ (1.93)

luôn dương với mọi biến dạng khác không cho nên ma trận $[C_{ij}]$ là xác định dương.

1.4.4. Môi trường trực hướng và đằng hướng.

Vật liệu đằng hướng có tính chất của hệ đàn hồi không phụ thuộc vào hướng. Vật liệu trực hướng là vật liệu có ba mặt phẳng đối xứng đàn hồi vuông góc với nhau.

Khái niệm mặt phẳng đối xứng đàn hồi: nếu các hệ số đàn hồi tại một điểm có giá trị không đổi đối với một cặp hệ tọa độ bất kỳ mà hệ nọ nhận được từ hệ kia bằng phép chiếu gương đối với mặt phẳng đã cho thì mặt phẳng này gọi là **mặt phẳng đối xứng đàn hồi**. Các trục của hệ tọa độ như thế gọi là “hướng của các tính chất đàn hồi tương đương”.

a) Vật liệu đàn hồi trực hướng.

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

Vật thể trực hướng thường gấp trong kỹ thuật như: gỗ, tấm bê tông cốt thép có đặt cốt thép không đồng đều theo hai phương, tấm sàn có hệ dầm trực giao, tấm vật liệu lượn sóng, ...

Xét vật thể có mặt phẳng đối xứng đàn hồi, giả sử là $x_1 - x_2$, nghĩa là khi thay đổi chiều trục x_3 để thành hệ trục tọa độ mới x'_i với $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_2$, $x'_3 = -x_3$, thì giá trị các hằng số đàn hồi không thay đổi. Phép biến đổi này viết theo ma trận là:

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.94)$$

Trong đó $[a_{ij}]$ là ma trận biến đổi tọa độ từ x_i sang x'_i .

Tensor ứng suất biến đổi theo phép biến đổi *tensor*:

$$\begin{aligned} \sigma'_{11} &= \sigma_{11}, & \sigma'_{22} &= \sigma_{22}, & \sigma'_{33} &= \sigma_{33}, & \sigma'_{12} &= \sigma_{12} \\ \sigma'_{13} &= -\sigma_{13}, & \sigma'_{23} &= -\sigma_{23} \end{aligned} \quad (1.95)$$

Tương tự, đối với *tensor* biến dạng ta có:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{11} &= \varepsilon_{11}, & \varepsilon'_{22} &= \varepsilon_{22}, & \varepsilon'_{33} &= \varepsilon_{33}, & \gamma'_{12} &= \gamma_{12} \\ \gamma'_{13} &= -\gamma_{13}, & \gamma'_{23} &= -\gamma_{23} \end{aligned} \quad (1.96)$$

Định luật *Hooke* trong hệ tọa độ mới:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{33} \\ \sigma'_{12} \\ \sigma'_{23} \\ \sigma'_{31} \end{array} \right\} = \text{Sym} \left[\begin{array}{cccccc} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & -C_{15} & -C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & -C_{25} & -C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & -C_{35} & -C_{36} \\ & & & C_{44} & -C_{45} & -C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{33} \\ \gamma'_{12} \\ \gamma'_{23} \\ \gamma'_{31} \end{array} \right\} \quad (1.97)$$

Vì quan hệ ứng suất và biến dạng trong hai hệ trục phải đồng nhất nên ma trận cứng $[C_{ij}]$ phải bằng ma trận cứng trong (1.91), có nghĩa là những thành phần mang dấu âm trong (1.97) phải bằng 0, suy ra ma trận cứng $[C_{ij}]$ phải có dạng:

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

$$\left[C_{ij} \right] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 & 0 \\ & & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ \text{Sym} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1.98)$$

Như vậy, trong trường hợp có một mặt phẳng đàn hồi, số hệ số đàn hồi là 13. Giả sử có thêm mặt phẳng đối xứng đàn hồi, chẳng hạn x_2-x_3 , ma trận $[C_{ij}]$ trên rút gọn còn chín hằng số đàn hồi như sau:

$$\left[C_{ij} \right] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ \text{Sym} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1.99)$$

Khi có hai mặt phẳng tọa độ vuông góc là đối xứng đàn hồi thì mặt phẳng còn lại cũng sẽ là đối xứng đàn hồi. Như vậy, trong trường hợp đàn hồi trực hướng, số hằng số đàn hồi là chín và không thể rút gọn thêm.

Đặc điểm của phương trình xác định đối với vật liệu này là ứng suất pháp chỉ liên quan đến biến dạng dài, ứng suất tiếp chỉ liên quan đến biến dạng góc. Nói cách khác, trong trường hợp này, *trục chính ứng suất và trục chính biến dạng trùng nhau*.

Để thấy được tính chất này, ta chọn hệ trục tọa độ x_j ban đầu trùng với các phương chính biến dạng. Do đó, ta có:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0 \quad (1.100)$$

Từ (1.91) ta được :

$$\sigma_{23} = C_{51}\varepsilon_1 + C_{52}\varepsilon_2 + C_{53}\varepsilon_3 \quad (1.101)$$

Bây giờ ta xoay hệ trục tọa độ x_j sang x'_k , sao cho trong hệ trục mới trục x'_3 trùng với trục x_3 cũ, còn hai trục x'_1 và x'_2 tương ứng ngược chiều với hai trục cũ x_1 và x_2 . Ta sẽ có:

$$\begin{aligned} n'_{11} &= n'_{22} = -1; \quad n'_{33} = 1; \\ n'_{12} &= n'_{13} = n'_{21} = n'_{23} = n'_{31} = n'_{32} = 0 \end{aligned} \quad (1.102)$$

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

Các trục tọa độ mới cũng trùng với các trục chính biến dạng. Các hằng số đàn hồi C_{ij} không phụ thuộc vào việc chọn hệ trục tọa độ. Vì thế trong hệ trục mới x'_k ta cũng có hệ thức:

$$\sigma'_{23} = C_{51}\varepsilon'_1 + C_{52}\varepsilon'_2 + C_{53}\varepsilon'_3 \quad (1.103)$$

Áp dụng công thức biến đổi (1.40) và (1.60) và chú ý đến (1.102), ta được:

$$\varepsilon'_k = \varepsilon_j n'_{kj} n'_{kj} = \varepsilon_k; \quad k = 1, 2, 3 \quad (1.104)$$

$$\sigma'_{23} = \sigma_{ij} n'_{2i} n'_{3j} = -\sigma_{23} \quad (1.105)$$

Thay (1.104), (1.105) vào (1.103):

$$-\sigma_{23} = C_{51}\varepsilon_1 + C_{52}\varepsilon_2 + C_{53}\varepsilon_3 \quad (1.106)$$

So sánh (1.101) với (1.106) ta thấy:

$$\sigma_{23} = 0 \quad (1.107)$$

Tương tự ta cũng có:

$$\sigma_{12} = \sigma_{31} = 0 \quad (1.108)$$

Như vậy, trong trường hợp đàn hồi trực hướng, *trục chính ứng suất và trục chính biến dạng trùng nhau*.

Vật thể trực hướng được gọi là đối xứng lập phương, nếu tính chất đàn hồi không đổi theo cả ba hướng. Lúc đó, chỉ còn ba hằng số đàn hồi:

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} \text{ và } C_{12} = C_{23} = C_{31} \text{ và } C_{44} = C_{55} = C_{66} \quad (1.109)$$

b) Vật liệu đẳng hướng.

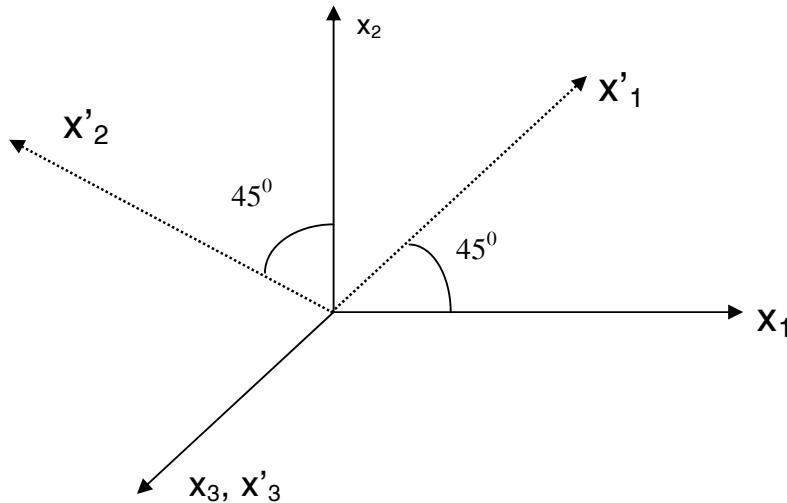
Do tính chất của vật liệu theo mọi phương là như nhau, ta có thể xoay trực theo một phương bất kỳ, các hằng số đàn hồi vẫn không thay đổi. Chẳng hạn quay hệ quanh trục x_3 một góc 45° như hình 1.6.

Ma trận biến đổi tọa độ có dạng:

$$\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.110)$$

Số hằng số độc lập còn lại hai và được ký hiệu là: $C_{12} = \lambda$ và $C_{44} = \mu$, gọi là hai hằng số Lamé. Ma trận cứng cho vật thể đàn hồi đẳng hướng:

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát



Hình 1.6

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (1.111)$$

Như vậy định luật *Hooker* được viết dưới dạng chỉ số như sau:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} = \lambda \Theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (1.112)$$

với $\Theta = \varepsilon_{kk}$ là biến dạng thể tích.

hay biểu diễn biến dạng theo ứng suất:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \sigma_{kk} \right) \quad (1.113)$$

Đặt:

$$\lambda = \frac{vE}{(1+v)(1-2v)} ; \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+v)} \quad (1.114)$$

Ta thu được:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+v}{E} \sigma_{ij} - \frac{v}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (1.115)$$

Nghiên cứu trạng thái kéo đơn giản chỉ theo trục x_1 có thể đưa ra các *modulus* đàn hồi kỹ thuật E (*Young's modulus*) và v (hệ số *Poisson*):

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= E\varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} &= \varepsilon_{33} = -v\varepsilon_{11}\end{aligned}\tag{1.116}$$

Từ quan sát thực nghiệm, ta thấy σ_{11} và ε_{11} cùng dấu, nhưng khác dấu với ε_{22} , ε_{33} . Suy ra $E > 0$ và $v > 0$.

Xét trạng thái ứng suất đặc biệt là áp suất thủy tĩnh, xác định bằng:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}.$$

Ta có $p = -K\varepsilon_{kk}$, với $K = E/[3(1 - 2v)]$. Vì áp suất thủy tĩnh $p > 0$ và ứng suất pháp gây nén nên $K > 0$, suy ra :

$$0 \leq v \leq \frac{1}{2}\tag{1.117}$$

khi $v = \frac{1}{2}$ thì vật liệu không nén được.

Trong trạng thái trượt thuần túy, quan hệ giữa *modulus* trượt G và các *modulus* khác được thiết lập dễ dàng như sau:

$$\mu = G = E/[2(1+v)]\tag{1.118}$$

Quan hệ giữa các *modulus* đàn hồi được cho trong bảng 1.5:

Bảng 1.5

	λ, μ	E, v	μ, K	μ, v
λ	λ	$\frac{vE}{(1+v)(1-2v)}$	$\frac{3K-2\mu}{3}$	$\frac{2\mu v}{1-2v}$
μ	μ	$\frac{E}{2(1+v)}$	μ	μ
K	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$	$\frac{E}{3(1-2v)}$	K	$\frac{2\mu(1+v)}{3(1-2v)}$
E	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	E	$\frac{9K\mu}{3K+\mu}$	$2\mu(1+v)$
v	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	v	$\frac{3K-2\mu}{2(3K+\mu)}$	v

1.5. Giải bài toán vật rắn đàn hồi theo chuyển vị hoặc theo ứng suất.

Như vậy ta đã định nghĩa được 15 đại lượng cần và đủ để đặc trưng cho biến dạng và nội lực tại điểm (ứng suất): 3 thành phần chuyển vị, 6 thành phần biến dạng và 6 thành phần ứng suất. Chúng là các hàm liên tục của các tọa độ điểm bất kỳ trong vật và việc xác định các hàm này là nhiệm vụ của bài toán vật rắn biến dạng đàn hồi.

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

Muốn xác định 15 đại lượng này ta phải giải hệ 15 phương trình vi phân đã thiết lập được, bao gồm 3 phương trình cân bằng (1.53), 6 phương trình quan hệ ứng suất - biến dạng (1.112) hay (1.113) và 6 phương trình biểu diễn quan hệ biến dạng - chuyển vị (1.39). Ngoài ra, các đại lượng trên còn phải thỏa các điều kiện biên động học và điều kiện biên tĩnh học. Ví dụ các điều kiện biên tĩnh học về lực bề mặt có dạng (1.50) hay:

$$q_j = \sigma_{ij} n_i; \quad j = 1, 2, 3$$

Thông thường người ta tách 15 ẩn ra làm hai nhóm: nhóm ẩn cơ bản (sơ cấp) và nhóm ẩn còn lại (thứ cấp). Nhóm ẩn cơ bản sẽ được xác định trước một cách độc lập với các ẩn còn lại để làm cơ sở xác định các ẩn còn lại.

Nếu chọn *3 thành phần chuyển vị* làm nhóm ẩn cơ bản, thì bài toán vật rắn đàn hồi được gọi là *giải theo chuyển vị*; còn nếu chọn *6 thành phần ứng suất* làm nhóm ẩn cơ bản, thì bài toán vật rắn đàn hồi được gọi là *giải theo ứng suất*.

Trường hợp *giải theo chuyển vị*, ta sẽ nhận được hệ 3 phương trình vi phân với 3 ẩn là ba thành phần chuyển vị từ hệ 15 phương trình trên bằng cách khử đi các thành phần của *tensor* ứng suất và của *tensor* biến dạng. Diễn tiến của công việc này có thể chi tiết theo các bước như sau.

Thay (1.39) vào (1.112), ta được:

$$\sigma_{ij} = \lambda \Theta \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.119)$$

Đạo hàm riêng (1.119) theo x_i rồi lập tổng theo chỉ số i , ta thu được:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} + \mu \nabla^2 u_j \quad (1.120)$$

với:

$$\Theta = \varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (1.121)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad \text{là toán tử Laplace} \quad (1.122)$$

Thay (1.120) vào phương trình cân bằng (1.53) ta sẽ được hệ phương trình vi phân Lamé đối với các thành phần chuyển vị dưới dạng:

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

$$\mu \nabla^2 u_j + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} + X_j = 0 \quad (1.123)$$

với: $X_j = \rho b_j$ là lực thế tích.

Nếu trên bề mặt vật rắn đã biết chuyển vị, thì các điều kiện biên đối với hệ phương trình (1.123):

$$q_j = \lambda \Theta n_j + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_i \quad (1.124)$$

Nghiệm của hệ phương trình (1.123), đã thỏa các điều kiện biên (1.124), xác định trường chuyển vị trong vật rắn. Trường biến dạng sẽ được xác định tiếp dựa vào các hệ thức *Cauchy* (1.39), và cuối cùng trường ứng suất sẽ được xác định từ hệ thức (1.112).

Trường hợp trên bề mặt vật rắn đã biết lực tác động thì *giải theo ứng suất* sẽ thuận lợi hơn.

Ba phương trình vi phân cân bằng (1.53) chưa đủ để xác định nhóm ẩn cơ bản gồm 6 thành phần ứng suất, mà cần phải dựa vào các hệ thức *Cauchy* (1.39) và định luật *Hooke* (1.112) hoặc (1.113) để có đủ số phương trình bổ sung chỉ chứa các ẩn cơ bản.

Các thành phần biến dạng sẽ là các hàm ba biến và được tính theo các hệ thức *Cauchy* (1.39) như sau:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.125)$$

Từ (1.125) ta có:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}; \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

Do đó:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1.125a)$$

Tương tự cho hai mối quan hệ còn lại:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (1.125b)$$

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \quad (1.125c)$$

Mặt khác, ta cũng có:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}; \quad \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \end{aligned}$$

Ta rút ra được:

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (1.126a)$$

Tương tự cho hai mối quan hệ còn lại:

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (1.126b)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (1.126c)$$

Sáu mối quan hệ vi phân giữa các thành phần biến dạng được gọi là các điều kiện tương thích *Saint-Venant*.

Đặt biến dạng thể tích là Θ và tổng các ứng suất pháp là θ , chúng được xác định như sau:

$$\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (1.127)$$

$$\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

Dùng định luật *Hooke*, các điều kiện tương thích (1.125) và (1.126) sẽ chuyển thành mối quan hệ giữa các thành phần ứng suất. Thí dụ, một mối quan hệ như thế sẽ thu được bằng cách thay ba biểu thức của định luật *Hooke*:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [(1+v)\sigma_y - v\theta]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [(1+v)\sigma_z - v\theta]$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1+v)\tau_{yz}}{E}$$

vào điều kiện tương thích (1.125b), ta thu được:

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

$$(1+v) \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} \right) - v \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) = 2(1+v) \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (1.128)$$

Mặt khác, từ ba phương trình cân bằng ta có được:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - Z \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - Y \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - X \\ \text{hay: } \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} &= -\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial Z}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} &= -\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial Y}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial X}{\partial x} \end{aligned}$$

Cộng hai phương trình đầu với nhau và kết hợp với phương trình thứ ba:

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial z}$$

Thay kết quả này vào (1.128) và dùng toán tử:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ta tìm được:

$$\begin{aligned} (1+v) \left(\nabla^2 \theta - \nabla^2 \sigma_x - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) - v \left(\nabla^2 \theta - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) &= \\ = (1+v) \left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.129)$$

Hai phương trình tương tự (1.129) có thể thu được từ hai phương trình tương thích thứ nhất và thứ ba.

Cộng ba phương trình loại (1.129) (trong đó hai phương trình tương tự thu được từ phương trình tương thích thứ nhất và thứ ba), ta có:

$$(1-v) \nabla^2 \theta = -(1+v) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right)$$

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

Thay thế biểu thức này đổi với $\nabla^2\theta$ vào (1.129):

$$\nabla^2\sigma_x + \frac{1}{1+v} \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = -\frac{v}{1-v} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial X}{\partial x} \quad (1.130)$$

Ta có thể thu được ba phương trình loại này tương ứng với ba phương trình tương thích đầu tiên. Tương tự ba phương trình tương thích còn lại có thể được chuyển thành các phương trình có dạng như sau:

$$\nabla^2\tau_{yz} + \frac{1}{1+v} \frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} = -\left(\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \quad (1.131)$$

Trường hợp lực thể tích là hằng, (1.130) và (1.131) sẽ có dạng:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1+v)\nabla^2\sigma_x + \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 0 \\ (1+v)\nabla^2\sigma_y + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0 \\ (1+v)\nabla^2\sigma_z + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = 0 \\ (1+v)\nabla^2\tau_{xy} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} = 0 \\ (1+v)\nabla^2\tau_{yz} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} = 0 \\ (1+v)\nabla^2\tau_{xz} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (1.132)$$

Ta thấy rằng thêm vào ba phương trình cân bằng (1.53) và ba điều kiện biên (1.50), các thành phần ứng suất phải thỏa sáu điều kiện tương thích (1.129) và (1.130) hoặc (1.132). Hệ thống các phương trình này, nói chung, đủ để xác định các thành phần ứng suất.

Các điều kiện tương thích chỉ chứa những đạo hàm bậc hai của các thành phần ứng suất. Do đó, nếu ngoại lực tác động sao cho các phương trình cân bằng (1.53) cùng với các điều kiện biên (1.50) có thể được thỏa khi lấy các thành phần ứng suất như là hằng số hay là các hàm tuyến tính theo tọa độ, các phương trình tương thích được thỏa một cách tương tự và hệ thống ứng suất này là lời giải chính xác của bài toán.

1.6. Ví dụ giải bài toán vật rắn đàn hồi.

1.6.1. Ví dụ 1.

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

Tìm trường chuyển vị và trường ứng suất trong thanh hình trụ tròn chịu xoắn thuận túy.

Giải:

Chọn trục thanh làm trục tọa độ z, hai trục x và y nằm trong mặt cắt ngang ở giữa thanh. Khảo sát một điểm trong thanh. Các thành phần chuyển vị là u, v, w; các thành phần ứng suất là σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} ; các thành phần biến dạng là ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , ϵ_{xy} , ϵ_{yz} , ϵ_{zx} .

Ta sẽ giải bài toán theo chuyển vị, và thử chọn các thành phần chuyển vị là các hàm có dạng:

$$u = -\tau_{zy}; \quad v = \tau_{zx}; \quad w = 0 \quad (a)$$

trong đó $\tau = \text{const}$ sẽ được xác định sau.

Theo (a) ta có:

$$\nabla^2 u = 0; \quad \nabla^2 v = 0; \quad \nabla^2 w = 0 \quad (b)$$

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (c)$$

Thay (b), (c) vào hệ phương trình vi phân (1.123) ta thấy các phương trình đó sẽ được thỏa mãn chỉ khi các thành phần lực khói:

$$X = Y = Z = 0 \quad (d)$$

Tại điểm bất kỳ trên mặt trụ ngoài của thanh, do $n_3 = 0$ nên các điều kiện biên (1. 124) còn lại:

$$\begin{aligned} q_x &= \left(\lambda \Theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) n_1 + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) n_2 \\ q_y &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) n_1 + \left(\lambda \Theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_2 \\ q_z &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) n_1 + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) n_2 \end{aligned} \quad (e)$$

Từ đó, theo (a) và (c) ta suy ra:

$$q_x = q_y = 0 \quad (f)$$

$$q_z = \mu \tau (-y n_1 + x n_2) = -\frac{\mu \tau}{ds} (y dy + x dx) = 0 \quad (g)$$

trong đó ds là độ dài vô cùng bé trên đường tròn chu vi mặt cắt ngang của thanh, x và y là tọa độ điểm bất kỳ trên đường tròn đó.

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

Tại điểm bất kỳ trên hai mặt cắt ở hai đầu thanh: $n_1 = n_2 = 0$, $n_3 = \pm 1$. Trên mặt cắt đầu thanh có tọa độ $z = \ell/2$, các điều kiện biên (1. 124) còn lại:

$$\begin{aligned} q_x &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ q_y &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ q_z &= \left(\lambda \Theta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (h)$$

Kết hợp (h) với (a) và (c) ta được:

$$q_x = -\mu \tau y; \quad q_y = \mu \tau x; \quad q_z = 0 \quad (i)$$

Gọi M_z là *moment* đối với trục tọa độ z (*moment xoắn*) của các thành phần lực bề mặt trên diện tích F của mặt cắt đầu thanh, ta có:

$$M_z = \int_F (-q_x dF y + q_y dF x) \quad (k)$$

Thay (i) vào (k) ta nhận được:

$$M_z = \mu \tau \int_F (x^2 + y^2) dF = \mu \tau I_o \quad (\ell)$$

trong đó $I_o = \int_F (x^2 + y^2) dF$ là *moment* quán tính (*moment* diện tích bậc hai) đối với tâm O của diện tích F .

Vector chính của các thành phần lực bề mặt trên diện tích F của mặt cắt đầu thanh:

$$\begin{aligned} \int_F (\vec{q}_x + \vec{q}_y) dF &= \int_F (-y \vec{i} + x \vec{j}) \mu \tau dF = \\ &= -\mu \tau \vec{i} \int_F y dF + \mu \tau \vec{j} \int_F x dF = 0 \end{aligned} \quad (m)$$

Các tích phân ở vế phải biểu diễn *moment* tĩnh (*moment* diện tích bậc nhất) của F đối với các *trục trung tâm* x và y đi qua trọng tâm O , do vậy các tích phân này bằng không! Điều này làm cho *vector* chính của các thành phần lực bề mặt trên diện tích F của mặt cắt đầu thanh bằng không.

Tương tự cho mặt cắt đầu thanh có tọa độ $z = -\ell/2$.

Như vậy, các hàm chuyển vị đã chọn có dạng (a) biểu diễn trường chuyển vị trong thanh chỉ chịu tác động của các lực bề mặt trên mặt cắt hai đầu thanh.

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

Các lực bề mặt này tương đương với hai *moment* tập trung M_z đặt ở hai đầu thanh và ngược chiều nhau. Vậy các hàm chuyển vị đã chọn có dạng (a) đúng là nghiệm của bài toán xoắn thuần túy thanh hình trụ tròn.

Từ (ℓ) ta xác định được hằng số τ :

$$\tau = \frac{M_z}{GI_o} \quad (n)$$

trong đó $\mu = G = E/2(1+\nu)$ là *modulus* đàn hồi trượt.

Ta dùng 6 phương trình quan hệ biến dạng - chuyển vị (1. 39) và 6 phương trình quan hệ ứng suất - biến dạng (1.122) để xác định trường ứng suất trong thanh:

$$\varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = 0, \varepsilon_z = 0, \varepsilon_{xy} = 0, \varepsilon_{yz} = \tau x, \varepsilon_{zx} = -\tau y \quad (o)$$

$$\sigma_x = 0, \sigma_y = 0, \sigma_z = 0, \tau_{xy} = 0, \tau_{yz} = G\tau x, \tau_{zx} = -G\tau y \quad (p)$$

hay, thay τ bởi (n) :

$$\tau_{zy} = \frac{M_z}{I_o} x; \quad \tau_{zx} = -\frac{M_z}{I_o} y \quad (q)$$

Trên mặt cắt ngang bất kỳ của thanh, ứng suất tiếp toàn phần tại điểm tùy ý $P(x,y)$ ký hiệu $\vec{\tau}_z$ và có độ lớn xác định bởi công thức:

$$\tau_z = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = \frac{M_z}{I_o} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{M_z}{I_o} \rho \quad (t)$$

Vector ứng suất $\vec{\tau}_z$ có phương vuông góc với bán kính $\vec{\rho}$ của điểm P .

1.6.2. Ví dụ 2.

Cho tensor sau đây:

$$T = \begin{Bmatrix} -Cx_3 & 0 & 0 \\ 0 & -Cx_3 & 0 \\ 0 & 0 & -D \end{Bmatrix}$$

trong đó C và D là các hằng số dương. Tensor này có thể dùng biểu diễn trường ứng suất trong khối trụ bị biến dạng được không? Nếu được, hãy xác định trường lực khối và trường lực bề mặt tương ứng tác động vào khối trụ đó, biết rằng phương trình của mặt trụ có dạng:

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - a^2 = 0$$

Giải:

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

Giả sử thừa nhận:

$$T_{ij} = \sigma_{ij} = \begin{cases} -Cx_3 & 0 & 0 \\ 0 & -Cx_3 & 0 \\ 0 & 0 & -D \end{cases} \quad (a)$$

Ta suy ra các phương trình vi phân cân bằng (1.53) sẽ được thỏa mãn nếu các thành phần lực khối bằng không: $X_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$). Với (a) và $X_j = 0$ thì 6 phương trình tương thích (1.130) và (1.131) đều được thỏa.

Như vậy có thể nhận *tensor* (a) biểu diễn trường ứng suất với điều kiện lực khối bằng không.

Việc xác định các lực bề mặt tiến hành như sau.

Trên mặt trụ đã cho $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - a^2 = 0$ vector đơn vị trên pháp tuyến ngoài đọc theo một đường sinh có dạng:

$$\vec{n} = \frac{x_1}{a} \vec{i}_1 + \frac{x_2}{a} \vec{i}_2 + 0 \vec{i}_3 \quad (b)$$

do đó, các lực bề mặt đọc theo một đường sinh, dựa theo điều kiện biên (1.50) được xác định như sau:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -Cx_3 & 0 & 0 \\ 0 & -Cx_3 & 0 \\ 0 & 0 & -D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{x_1}{a} \\ \frac{x_2}{a} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{Cx_1x_3}{a} \\ -\frac{Cx_2x_3}{a} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (c)$$

hay:

$$\vec{q}^n = -\frac{C}{a} x_1 x_3 \vec{i}_1 - \frac{C}{a} x_2 x_3 \vec{i}_2 + 0 \vec{i}_3 \quad (d)$$

do đó:

$$|\vec{q}^n| = \frac{C}{a} |x_3| \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = C |x_3| \quad (e)$$

Theo (c) ta có:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{x_1}{x_2} \quad (f)$$

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

Hệ thức (f) và (e) chứng tỏ *vector* lực bề mặt \vec{q}^n nằm trên pháp tuyến và sẽ cùng chiều với pháp *vector* đơn vị \vec{n} nếu $x_3 < 0$ hoặc ngược lại.

Như vậy, tại mặt cắt có tọa độ $x_3 > 0$ trên đường tròn chu vi của mặt cắt $x_1^2 + x_2^2 - a^2 = 0$ các lực bề mặt \vec{q}^n đều hướng tâm và có độ lớn bằng hằng.

Trên hai mặt cắt đầu mút của khối trụ, vì $\vec{n} = \pm \vec{i}_3$, nên:

$$\vec{q}^n = 0\vec{i}_1 + 0\vec{i}_2 \pm D\vec{i}_3 \quad (g)$$

$$|\vec{q}^n| = D = \text{const} \quad (h)$$

1.7. Thiết lập bài toán vật rắn đàn hồi và các phương pháp giải gần đúng.

Các bài toán vật rắn đàn hồi nếu muốn thiết lập một cách chặt chẽ thì phải biết đầy đủ : hình dáng của vật thể, các hằng số đàn hồi của vật liệu, các lực khói, ba điều kiện biên trên khắp vật thể.

Vì việc giải bài toán loại này cần xác định trường chuyển vị, trường biến dạng và trường ứng suất, do đó gặp nhiều khó khăn về toán học. Lời giải giải tích chính xác chỉ có được trong một số ít trường hợp đơn giản nên không đáp ứng hết nhu cầu ứng dụng trong kỹ thuật.

Nhằm làm cho bài toán đơn giản hơn người ta thường dùng nguyên lý *Saint-Venant* sau đây: *nếu một hệ lực tác động lên một phần nhỏ của bề mặt hoặc của thể tích vật rắn đàn hồi được thay thế bởi một hệ lực khác cũng tác dụng trên phần nhỏ của bề mặt hoặc của thể tích vật rắn và hai hệ lực có chung vector chính và moment chính, thì trạng thái ứng suất tại các điểm của vật rắn không quá gần miền đặt lực hâu như không đổi.*

Với việc ứng dụng nguyên lý này ta có thể mở rộng đáng kể lớp các bài toán trong đó có thể tích phân được các phương trình liệt kê trong mục 1.5. Tuy nhiên, vẫn còn một lượng rất lớn các bài toán không thể tìm được nghiệm giải tích chính xác. Trong những trường hợp này người ta ứng dụng rộng rãi các phương pháp giải gần đúng khác nhau và chúng được chia ra làm hai nhóm.

Nhóm thứ nhất bao gồm các phương pháp gần đúng có chung đặc điểm là các phương trình vi phân chính xác của bài toán được thay thế bởi các phương trình gần đúng. Quan trọng nhất trong số các phương pháp này là người ta thường căn cứ vào các nguyên nhân vật lý hoặc dựa vào các lời giải đã biết cho những trường hợp tương tự mà có thể phân chia các ứng suất trong bài toán thành các ứng suất cơ bản và các ứng suất thứ yếu.

Chương 1. Hệ phương trình tổng quát

Các ứng suất thứ yếu là các ứng suất có trị số bé so với các ứng suất cơ bản và sẽ không được kể đến khi tính các biến dạng.

Trong nhóm thứ nhất còn kể đến việc thừa nhận các giả thiết về sự phân bố các ứng suất hoặc về đặc điểm của trạng thái biến dạng.

Khi giải các phương trình vi phân của bài toán vật rắn đàn hồi (chính xác hay gần đúng), trước tiên người ta tìm cách giảm số hàm ẩn phải xác định. Đôi khi có thể biểu diễn tất cả các ẩn phải tìm theo các đạo hàm của một đại lượng nào đó có ý nghĩa vật lý tự nhiên (ví dụ, trong lý thuyết tấm mỏng đại lượng đó là độ võng). Trong những bài toán khác người ta đưa vào những hàm ẩn mới của các tọa độ, thường có tên gọi là các *hàm ứng suất*, thông qua các đạo hàm riêng của chúng theo các tọa độ ta sẽ biểu diễn tất cả các ứng suất phải tìm.

Trong nhiều lớp bài toán ta có thể biểu diễn tất cả các ẩn theo các đạo hàm riêng của cùng hàm ứng suất, và việc giải bài toán qui về tìm hàm đó.

Trong nhóm thứ hai, việc giải gần đúng các bài toán vật rắn đàn hồi chung qui lại là các phương trình vi phân xác định hàm ẩn sẽ được giải một cách xấp xỉ. Trong các phương pháp phổ biến nhất thuộc nhóm này, biểu thức gần đúng của hàm ẩn Φ được đa thức hóa dưới dạng :

$$\Phi = C_0\varphi_0 + C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \dots + C_n\varphi_n \quad (1.133)$$

trong đó:

$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ là các hàm nào đó của các tọa độ

$C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ là các hệ số hằng.

Các hàm $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sẽ được chọn sao cho các điều kiện biên của bài toán được thỏa mãn; việc chọn các hàm φ_k như thế vẫn còn rất tùy ý nhưng để thuận lợi trong quá trình giải người ta thường chọn chúng có dạng đa thức. Sau đó sẽ tìm các trị số của các hệ số $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ sao cho nghiệm gần đúng (1.133) gần với nghiệm chính xác nhất.