

Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng

Bài tập chương 4

- 4.1. Một bình áp lực thành mỏng tròn dài chịu áp lực bên trong p và bị chảy dẻo. Tìm hệ số của các gia số biến dạng dẻo theo ba hướng chính theo phương trình *Prandtl–Reuss*.
- 4.2. Một ống thành mỏng chịu kéo dọc trực hằng và xoắn thay đổi. Ứng suất pháp hướng trực là $\sigma_z = 0,5\sigma_0$. Theo tiêu chuẩn *von Mises*, hãy tìm độ lớn của ứng suất tiếp τ để ống bắt đầu chảy dẻo. Hãy xác định hệ số của các gia số biến dạng dẻo $d\varepsilon_{ij}^p$ khi ống được chảy dẻo.
- 4.3. Một phân tử vật liệu chịu ba quá trình đặt tải tỷ lệ. Các hệ số của các ứng suất chính đối với ba trường hợp gia tải được cho như (1) $(2\sigma, \sigma, 0)$; (2) $(\sigma, \sigma, 0)$; (3) $(0, -\sigma, -\sigma)$. Theo
 - (a) Tiêu chuẩn *von Mises*: $J_2 = k^2$;
 - (b) Tiêu chuẩn *Tresca*: $\tau_{\max} = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2 = k$;
 - (c) Tiêu chuẩn *Drucker–Prager*: $cd_1 + \sqrt{J_2} = k$;
 - (d) Tiêu chuẩn *Mohr–Coulomb*: $(m\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2 = k$,
 hãy tìm độ lớn của σ đối với mỗi trường hợp đặt tải để vật liệu bắt đầu chảy dẻo. Hãy tìm vector gia số biến dạng dẻo chính $(d\varepsilon_1^p, d\varepsilon_2^p, d\varepsilon_3^p)$ trong quá trình chảy dẻo dựa trên định luật chảy kết hợp.
- 4.4. Hãy chứng tỏ rằng gia số biến dạng dẻo ở đỉnh hình chóp lục giác *Mohr–Coulomb* có thể được biểu diễn như

$$d\varepsilon_1^p = (d\lambda_1 + d\lambda_2)m - (d\lambda_4 + d\lambda_5)$$

$$d\varepsilon_2^p = (d\lambda_5 + d\lambda_6)m - (d\lambda_2 + d\lambda_3)$$

$$d\varepsilon_3^p = (d\lambda_3 + d\lambda_4)m - (d\lambda_1 + d\lambda_6)$$

Hãy chứng tỏ rằng các phương trình (4.34) và (4.36) vẫn đúng trong trường hợp này (xem hình 4.5).

- 4.5. Bề mặt chảy được *Mohr–Coulomb* hiệu chỉnh là bề mặt *Mohr–Coulomb* $m\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = f_c$ được kết hợp với mặt phẳng giới hạn kéo $\sigma_{\max} = f_t$.

Bề mặt chảy này gồm chín mặt phẳng, chín cạnh, và bảy đỉnh. Hãy phân tích gia số biến dạng dẻo ở các mặt phẳng giới hạn và các cạnh và các đỉnh có liên quan. Hãy chứng tỏ rằng

- (a) Các gia số biến dạng dẻo thỏa

$$\frac{\sum d\varepsilon_t^p}{\sum |d\varepsilon_c^p|} > m$$

- (b) Gia số công dẻo có thể được biểu diễn bởi

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

$$dW_p = f'_c \sum |d\varepsilon_c^p| + f'_t (\sum d\varepsilon_t^p - m \sum d\varepsilon_c^p)$$

4.6. Một ống dày đầu tiên được đặt tải đến miền đàn-dẻo với áp suất bên trong p , $p_e \leq p \leq p_c$, và rồi được cắt tải hoàn toàn.

(a) Hãy tìm các ứng suất dư.

(b) Hãy xác định áp suất cao nhất để vật liệu của ống sẽ không chảy dẻo lại khi cắt tải.

(c) Hãy chứng tỏ rằng nếu tỷ số của bán kính ngoài và bán kính trong của ống, b/a , nhỏ hơn 2,2; vật liệu sẽ lỏng xuống ứng xử đàn hồi đối với việc tạo áp lực giữa $p = 0$ và $p = p_c$.

4.7. Một ống dày làm bằng vật liệu chảy dẻo lý tưởng chịu đựng áp suất bên trong chảy dẻo hoàn toàn được cho bởi phương trình (4.73). Hãy khảo sát bề mặt chảy Tresca của các điểm ứng suất đối với những bán kính khác nhau, áp dụng tính pháp tuyến để thu được thông tin về biến dạng dẻo dương, và kiểm chứng rằng biến dạng dẻo như thế tương thích với mô hình phá hủy của ống.

4.8. Một ống composite bao gồm n ống được làm cùng vật liệu lồng lên nhau. Bán kính trong và ngoài của n ống tương ứng là $(r_i, r_1), (r_1, r_2), \dots, (r_{n-1}, r_e)$. Ống composite chịu áp suất bên trong p . Vật liệu tuân theo tiêu chuẩn chảy Tresca. Giả sử rằng chảy dẻo xảy ra một cách đồng thời ở những mặt trong của mỗi ống. Hãy chứng tỏ rằng

(a) Áp suất bên trong đối với chảy dẻo đầu tiên được cho bởi

$$p = \frac{\sigma_0}{2} \left\{ n - \left[\left(\frac{r_i}{r_1} \right)^2 + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{r_{n-1}}{r_e} \right)^2 \right] \right\}$$

trong đó σ_0 là ứng suất chảy trong kéo đơn trực.

(b) Nếu tỷ số của các bán kính ngoài và trong của mỗi ống là

$$\frac{r_k}{r_{k-1}} = \left(\frac{r_e}{r_i} \right)^{1/n} \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad r_0 = r_i, r_n = r_e$$

áp lực p lấy giá trị cực đại đối với chảy dẻo đầu tiên, và

$$(p_e)_{\max} = \frac{n\sigma_0}{2} \left[1 - \left(\frac{r_i}{r_e} \right)^{2/n} \right]$$

(c) Áp suất chảy dẻo hoàn toàn p được cho bởi

$$p_c = \sigma_0 \ln(r_e/r_i)$$

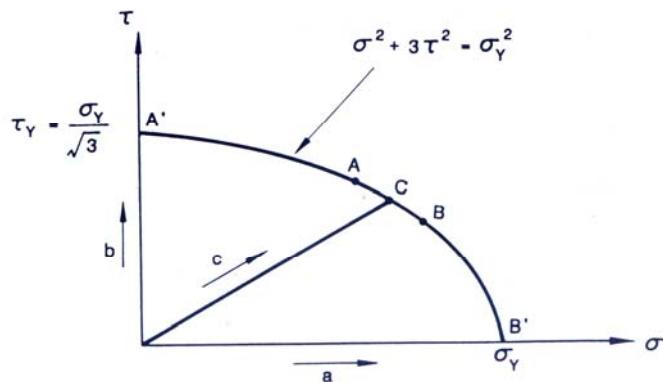
4.9. Cho hình cầu rỗng có bán kính trong a và bán kính ngoài b . Hãy phân tích ứng xử của hình cầu dưới áp suất bên trong.

Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng

- (a) Hãy tìm các ứng suất và chuyển vị đàn hồi. Hãy xác định áp suất cực đại p_e để lời giải đàn hồi này đúng.
- (b) Hãy tìm lời giải đàn-dẻo và áp suất cực đại p_e để lời giải này này đúng.
- (c) Nếu vật liệu được giả thiết không nén trong cả miền đàn hồi và chảy dẻo, những trường hợp đơn giản hóa nào sẽ xảy ra?
- (d) Hãy tìm các ứng suất dư sau quá trình cất tải hoàn toàn và xác định áp suất cao nhất để sự lăng xuống xảy ra.
- (e) Hãy tìm các ứng suất và các suất biến dạng đối với chảy dẻo không kiềm chế.

4.10. Trong thí nghiệm kéo/xoắn kết hợp ống thành mỏng tiết diện tròn, gọi σ và ϵ tương ứng là ứng suất pháp và biến dạng dài theo phương dọc trực, τ và γ tương ứng là ứng suất tiếp và biến dạng trượt. Giả sử rằng ống được làm bằng vật liệu Prandtl-Reuss với $v = 0,5$. Hãy tính các ứng suất σ và τ tương ứng với trạng thái biến dạng $(\epsilon, \gamma) = (\sigma_y/E, \sigma_y/\sqrt{3}G)$ đối với ba lô trình đặt tải sau đây (hình P4.10):

- (a) Biến dạng dài dọc trực ϵ đầu tiên được tăng lên giá trị chảy dẻo $\epsilon = \sigma_y/E$, rồi được giữ không đổi, trong khi biến dạng trượt được tăng lên đến giá trị cuối cùng của nó $\gamma = \sigma_y/\sqrt{3}G$.
- (b) Nghịch đảo lô trình đặt tải trên: biến dạng trượt đầu tiên được tăng lên đến giá trị cuối cùng của nó $\gamma = \sigma_y/\sqrt{3}G$, rồi được giữ hằng số, trong khi biến dạng dài dọc trực ϵ được tăng lên giá trị cuối cùng của nó σ_y/E .
- (c) Cả hai biến dạng ϵ và γ được gia tăng một cách tỷ lệ với tỷ số $\epsilon/\gamma = \sqrt{3}G/E = 1/\sqrt{3}$, cho đến khi giá trị cuối cùng của chúng đạt đến.

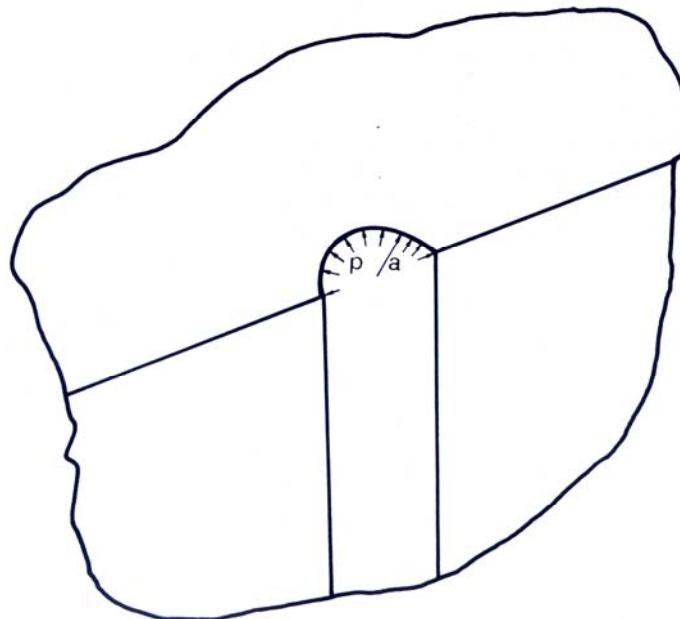


Hình P4.10.

Lý thuyết dẻo kỹ thuật

Gợi ý: Chú ý rằng $\sigma_{mn}d\epsilon_{mn} = \sigma_{mn}d\varepsilon_{mn}$, do đó $d\lambda$ có thể thu được theo k , σ , $d\varepsilon$, τ và $d\gamma$. Do điều kiện không nén, các phương trình (4.91) hoặc (4.92) sẽ dẫn đến một nhóm các phương trình vi phân liên hệ với $\sigma(\varepsilon, \gamma)$ và $\tau(\varepsilon, \gamma)$. Hãy cho $d\varepsilon = 0$ hay $d\gamma = 0$; các phương trình vi phân có thể được tích phân đối với các trường hợp (a) và (b).

- 4.11. Hãy khảo sát ứng xử của vật liệu Prandtl-Reuss và Drucker-Prager dưới điều kiện ứng suất phẳng được định nghĩa bởi $\sigma_{ij} = [\sigma_1, 0, \sigma_3]$. So sánh các kết quả.
- 4.12. Hãy chứng minh các phương trình (4.145).
- 4.13. Hãy chứng minh các phương trình (4.152) và (4.153).
- 4.14. Một ống bê tông thành dày dài không đáy ($\sigma_2 = 0$) chịu áp suất bên trong p . Các bán kính bên trong và ngoài tương ứng là a và b . Giả sử vật liệu bê tông tuân theo tiêu chuẩn Rankine với độ bền kéo đơn trục f_t .
 - (a) Hãy xác định áp suất bên trong giới hạn đàn hồi.
 - (b) Hãy xác định mối quan hệ giữa biên đàn-dẻo $r = c$ và áp suất bên trong p đối với $p > p_c$.
 - (c) Hãy xác định áp suất bên trong giới hạn dẻo.



Hình P4.15

Chương 4. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đối với vật liệu chảy dẻo lý tưởng

- (d) Đối với trường hợp $b/a = 2$, hãy vẽ các đường cong σ_r và σ_θ theo r đổi với biên đần–dẻo tương ứng ở $c = a$, $c = (a + b)/2$, và $c = b$.
- 4.15. Một lõi hình trụ đứng dài với bán kính trong a trong nửa không gian của đá chịu áp suất bên trong p như được biểu diễn trong hình P4.15. Giả sử rằng vật liệu đá tuân theo tiêu chuẩn *Rankine*, với độ bền kéo đơn trực f_t . Hãy xác định mối quan hệ giữa bán kính c của vùng dẻo với áp suất bên trong.
- 4.16. Giải lại bài tập 4.15 bằng cách dùng tiêu chuẩn chảy *Tresca*. Chứng tỏ rằng mối quan hệ giữa bán kính c của vùng dẻo với áp suất bên trong có thể thu được bằng cách cho $b \rightarrow \infty$ trong phương trình (4.68).
- 4.17. Giả sử rằng vật liệu bê tông tuân theo tiêu chuẩn *Mohr-Coulomb*, giải lại bài tập 4.14. Các độ bền kéo và nén đơn trực của vật liệu tương ứng là f_t và f_c . Hãy vẽ các đường cong σ_r và σ_θ theo r bằng cách dùng $f_c/f_t = 10$.
- 4.18. Giải lại bài tập 4.15 bằng cách dùng tiêu chuẩn *Mohr-Coulomb*. Giả sử các độ bền kéo và nén đơn trực của đá tương ứng là f_t và f_c .
- 4.19. Chú ý rằng tiêu chuẩn *Tresca* và *Rankine* là những trường hợp đặc biệt của tiêu chuẩn *Mohr-Coulomb*, hãy chứng tỏ rằng
- (a) Các lời giải đần–dẻo của ống trụ thành dày được mô tả trong mục 4.7 và bài tập 4.14 là những trường hợp đặc biệt của lời giải bài tập 4.17.
- 4.20. Hãy tìm biểu thức hệ số vô hướng $d\lambda$ đối với vật liệu đần–dẻo lý tưởng tổng quát bằng cách dùng định luật chảy kết hợp
- $$d\varepsilon_j^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$
- ở đây $f = f(\sigma_{ij})$ là hàm chảy. Giả sử rằng ứng xử đần hồi của vật liệu là tuyến tính và đẳng hướng, hãy biểu diễn hệ số vô hướng $d\lambda$ theo hai hằng số đần hồi K và G .
- 4.21. Hãy viết chương trình để tính ma trận cứng vật liệu $[C^{ep}]$ của phương trình (4.156) đối với bốn hàm chảy được cho trong bảng 4.1.