

### Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi

#### Bài tập chương 3

3.1. *Tensor* chuyển vị tương đối  $\varepsilon'_{ij}$  ở một điểm được cho như sau:

$$\varepsilon'_{ij} = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,20 & -0,40 \\ -0,20 & 0,25 & -0,15 \\ 0,40 & 0,30 & 0,30 \end{bmatrix}$$

Hãy xác định:

- (a) *Tensor* biến dạng  $\varepsilon_{ij}$ .
- (b) *Tensor* quay  $\omega_{ij}$ .
- (c) Các biến dạng chính  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , và  $\varepsilon_3$ , và các phương chính.
- (d) Đổi với phân tố thứ theo hướng  $\bar{n} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1/\sqrt{2}\right)$ , hãy tìm *vector* biến dạng  $\hat{\delta}$ , *vector* quay  $\hat{\Omega}$ , và *vector* chuyển vị tương đối  $\hat{\delta}'$ .

3.2. Trạng thái biến dạng ở một điểm được biểu diễn bởi *tensor* biến dạng đã cho  $\varepsilon_{ij}$ .

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} -0,005 & -0,004 & 0 \\ -0,004 & 0,001 & 0 \\ 0 & 0 & 0,001 \end{bmatrix}$$

Hãy xác định:

- (a) *Tensor* biến dạng lệch  $e_{ij}$ .
- (b) Các giá trị của các bất biến  $J'_2$  và  $J'_3$ .
- (c) Sự thay đổi thể tích trên đơn vị thể tích  $\varepsilon_v$ .

3.3. Các thành phần chuyển vị  $u_i$  ở một điểm trong vật thể được cho bởi các thành phần dạng hàm

$$u_1 = 10x_1 + 3x_2, \quad u_2 = 3x_1 + 2x_2, \quad u_3 = 6x_3$$

Hãy chứng tỏ rằng không có sự quay cứng nếu các biến dạng được giả định là nhỏ.

3.4. Hãy xác định các quan hệ trong số các hằng số  $a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1$ , và  $c_2$  để mà các biểu thức sau đây là một trạng thái biến dạng:

$$\varepsilon_x = a_0 + a_1(x^2 + y^2) + (x^4 + y^4)$$

$$\varepsilon_y = b_0 + b_1(x^2 + y^2) + (x^4 + y^4)$$

$$\gamma_{xy} = c_0 + c_1xy(x^2 + y^2 + c_2)$$

$$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

3.5. Bằng cách sử dụng phương trình (3.70a) và các quan hệ ứng suất–biến dạng của vật liệu đàn hồi tuyến tính đẳng hướng, hãy chứng tỏ rằng các phương trình cân bằng (3.70a) có thể được viết dưới dạng sau đây

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

$$u_{i,jj} + \frac{1}{1-2v} u_{j,ji} + \frac{F_i}{G} = 0$$

trong đó  $v$  và  $G$  lần lượt là hệ số Poisson và modulus trượt.

- 3.6. Hãy chứng minh các quan hệ sau đây giữa các *modulus* đàn hồi  $E$ ,  $v$  và  $K$ ,  $G$ :

$$E = \frac{9KG}{3K+G}; \quad v = \frac{3K-2G}{2(3K+G)}$$

- 3.7. Đối với vật liệu đàn hồi tuyến tính đẳng hướng, các thành phần ứng suất,  $\sigma_{ij}$ , ở một điểm được cho bởi

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 10 & 1 & -8 \\ 1 & -6 & 6 \\ -8 & 6 & 20 \end{bmatrix} \text{ ksi}$$

Các hằng số đàn hồi là  $E = 30.000$  ksi và  $v = 0,3$ . Hãy xác định:

- (a) *Tensor* lêch biến dạng,  $e_{ij}$ , ở điểm đã cho.
- (b) Các giá trị của mật độ năng lượng biến dạng,  $W$ , và mật độ năng lượng bù,  $\Omega$ , tương ứng với trạng thái ứng suất đã cho.
- (c) Các biến dạng chính  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ , và  $\varepsilon_3$  ở điểm này.

- 3.8. Một phân tố vật liệu chưa có ứng suất và chưa có biến dạng chịu một lịch sử đặt tải tổ hợp theo những lộ trình đường thẳng kế tiếp nhau trong không gian ( $\sigma, \tau$ ) [các đơn vị là psi]:

- Lộ trình 1: từ  $(0, 0)$  đến  $(0, 10)$
- Lộ trình 2: từ  $(0, 10)$  đến  $(30, 10)$
- Lộ trình 3: từ  $(30, 10)$  đến  $(30, -10)$
- Lộ trình 4: từ  $(30, -10)$  đến  $(0, 0)$

Phân tố được giả sử là vật liệu đàn hồi phi tuyến đẳng hướng với mật độ năng lượng bù  $\Omega$  được cho như

$$\Omega = a(J_2^3 + J_3^2)$$

ở đây  $a$  là một hằng số vật liệu. Quan hệ ứng suất–biến dạng của nó trong kéo đơn trực là

$$10^9 \varepsilon = \left( \frac{\sigma}{1000} \right)^5$$

ở đây  $\sigma$  có đơn vị là psi.

- (a) Hãy xác định biến dạng giãn dài dọc trực và biến dạng trượt ở cuối lộ trình 3.
- (b) Hãy tìm tất cả các thành phần biến dạng pháp và tiếp ở cuối các lộ trình 1 và 2.

### Chương 3. Các mối quan hệ ứng suất–biến dạng đàn hồi

- (c) Hãy vẽ đường cong  $\Omega = \text{constant}$  trong không gian  $(\sigma, \tau)$  đi qua điểm  $(30, 100)$ . Hãy chứng minh bằng giải tích rằng đường cong  $\Omega = \text{constant}$  có tính lồi.
- (d) Hãy chứng minh bằng hình tượng rằng câu trả lời cho phần (b) thỏa điều kiện pháp tuyến (3.118).
- (e) Hãy biến đổi lô trình 1 thành lô trình trong không gian ứng suất chính. Hãy tính toán các biến dạng ở cuối của lô trình này bằng cách dùng các quan hệ ứng suất–biến dạng được biểu thị theo các ứng suất chính, và so sánh kết quả một cách chi tiết với các kết quả thu được theo  $\sigma$  và  $\tau$  trong câu (b).
- (f) Hãy liệt kê tất cả các lô trình đường thẳng trong không gian ứng suất chính của những lô trình đã cho ở trên.
- (g) Hãy vẽ lô trình 2 trong không gian ứng suất chính.

3.9. Khảo sát một vật liệu đàn hồi phi tuyến được dựa trên hàm mật độ bù  $\Omega$  được cho bởi

$$\Omega(I_1, J_2) = aI_1^2 + bJ_2^2$$

ở đây  $a$ , và  $b$  là những hằng số vật liệu. Mối quan hệ ứng suất–biến dạng của vật liệu trong kéo đơn trực được cho bởi

$$10^3 \varepsilon = \frac{\sigma}{10} + \frac{1}{9} \left( \frac{\sigma}{10} \right)^3$$

ở đây  $\sigma$  có đơn vị là ksi.

- (a) Hãy xác định các hằng số  $a$  và  $b$ .
- (b) Hãy viết quan hệ ứng suất–biến dạng của vật liệu đối với trạng thái nén song trực.
- (c) Hãy viết quan hệ ứng suất–biến dạng của vật liệu đối với trạng thái trượt thuần túy.

3.10. Hãy liệt kê và giải thích bằng giải tích và bằng hình tượng các hạn chế được áp đặt bởi định đề ổn định vật liệu của Drucker và các hàm ý đối với vật liệu đàn hồi.