

### Bài tập chương 2

2.1. *Tensor* ứng suất  $\sigma_{ij}$  của điểm được cho bởi

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 100\sqrt{3} \\ 0 & 100\sqrt{3} & 100 \end{bmatrix} \text{ (đơn vị ứng suất)}$$

Tìm:

- (a) Độ lớn ứng suất pháp và tiếp trên mặt nghiêng có pháp tuyến đơn vị là  $\bar{n} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ .
- (b) Độ lớn các ứng suất chính.
- (c) Hướng của các trục chính ứng suất.
- (d) Các ứng suất bát diện.
- (e) Ứng suất tiếp cực đại.

2.2. Cho *tensor* ứng suất  $\sigma_{ij}$  của điểm

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{11}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{5}{4} & \frac{11}{4} \end{bmatrix} \text{ (đơn vị ứng suất)}$$

- (a) Tìm các ứng suất chính và các phương chính tương ứng.
- (b) Tìm *tensor* ứng suất lệch,  $s_{ij}$ , và các ứng suất lệch chính  $s_1, s_2$  và  $s_3$ .
- (c) Xác định các bất biến ứng suất lệch  $J_1, J_2$ , và  $J_3$ .

2.3.

- (a) Nếu  $s_1 > s_2 > s_3, s_3$  có thể bằng không không? Hãy giải thích.
- (b)  $J_2$  có thể âm không? Hãy giải thích.
- (c)  $J_3$  có thể dương không? Hãy giải thích.

2.4. Hãy chứng tỏ rằng tỷ số  $\tau_{oct} / \tau_{max}$  được giới hạn bởi

$$\frac{\sqrt{6}}{3} \leq \frac{\tau_{oct}}{\tau_{max}} \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

2.5. Hãy chứng minh các quan hệ sau đây:

- (a)  $J_2 = \frac{1}{3}|I_1|^2 - I_2$ .
- (b)  $J_3 = I_3 - \frac{1}{3}|I_1|I_2 + \frac{2}{27}|I_1|^3$ .

## Lý thuyết déo kỹ thuật

- (c)  $\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} (I_1^2 - 3I_2)^{1/2}$ .  
 (d)  $J_2 = -(S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_1)$ .

2.6. Công thức ứng suất *Cauchy* ở một điểm được cho như

$$T_i = \sigma_{ij}n_j$$

ở đây  $T_i$  là vector ứng suất tác động trên mặt nghiêng có pháp tuyến đơn vị  $n_i$ , hãy chứng tỏ rằng các thành phần ứng suất  $\sigma_{ij}$  tạo thành tensor bậc hai bằng cách dùng định nghĩa của tensor.

2.7. Hãy chứng tỏ rằng trừ ứng suất thủy tĩnh khỏi trạng thái ứng suất đã cho không làm thay đổi các phương chính.

2.8. Hãy chứng minh rằng thành phần ứng suất tiếp  $S_n$  tác động trên mặt nghiêng bất kỳ đi qua điểm đã cho không bị thay đổi bởi việc thêm kéo hoặc nén thủy tĩnh vào trạng thái ứng suất ban đầu.

2.9. Trạng thái ứng suất của điểm được cho bởi

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 30 & 45 & 60 \\ 45 & 20 & 50 \\ 60 & 50 & 10 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

- (a) Hãy xác định các biến ứng suất  $I_1, J_2, J_3$ , và  $\theta$ .  
 (b) Dựa trên các biểu thức đổi với các ứng suất chính dưới dạng các biến ứng suất  $I_1, J_2$ , và  $\theta$ , hãy tìm độ lớn của các ứng suất chính  $\sigma_1, \sigma_2$ , và  $\sigma_3$ .

2.10.

(a) Hãy chứng tỏ rằng  $\frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} = S_k S_{kj} - \frac{2}{3} J_2 \delta_{ij}$ .

(b) Hãy tìm  $\partial \theta / \partial \sigma_{ij}$ .

2.11. Hãy chứng tỏ rằng nếu  $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0$ , trạng thái ứng suất  $\sigma_{ij}$  là trạng thái trượt thuần túy. Chú ý rằng trạng thái ứng suất được cho là trạng thái trượt thuần túy nếu tồn tại vài hệ tọa độ O'x'y'z' sao cho  $\sigma'_x = \sigma'_y = \sigma'_z = 0$ .

2.12. Nếu trạng thái ứng suất thu được bằng cách đặt chồng hai trạng thái ứng suất khác nhau, hãy chứng tỏ rằng:

- (a) Ứng suất chính cực đại không lớn hơn tổng các ứng suất chính cực đại riêng lẻ.  
 (b) Ứng suất tiếp cực đại không lớn hơn tổng các ứng suất tiếp cực đại riêng lẻ.

## Chương 2. Tiêu chuẩn chảy và tiêu chuẩn phá hủy

- (c) Thành phần áp lực thủy tĩnh tổng hợp là tổng đại số của các thành phần thủy tĩnh của hai trạng thái riêng lẻ, nhưng thành phần trượt tổng hợp là tổng vector của các thành phần trượt của hai trạng thái riêng lẻ.
- 2.13. Khảo sát phương trình (2.61) đối với các ứng suất lệch chính,  
 $s^3 - J_2 s - J_3 = 0$   
và thay thế  $s = r \sin \psi$  sẽ dẫn đến  
 $\sin^3 \psi - \frac{J_2}{r^2} \sin \psi - \frac{J_3}{r^3} = 0$
- (a) Khảo sát sự tương tự của phương trình lượng giác sau đây,  
 $\sin^3 \psi - \frac{3}{4} \sin \psi + \frac{1}{4} \sin 3\psi = 0$   
hãy chứng tỏ rằng  $r$  và  $\psi$  là những biến được liên hệ với  $J_2$  và  $J_3$  thông qua
- $$r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \quad \text{và} \quad \sin 3\psi = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}}$$
- (b) Sử dụng các kết quả thu được của câu (a) với các phương trình (2.111) và (2.118), hãy chứng minh rằng: (i)  $r = \sqrt{2/3}\rho$ ; (ii)  $\psi = [\theta - (\pi/6)]$  và  $\psi$  biến thiên trong miền  $-\pi/6 \leq \psi \leq \pi/6$  đối với  $0 \leq \theta \leq \pi/3$ .
- (c) Đối với trạng thái ứng suất bất kỳ được xác định bởi các ứng suất chính  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  và khảo sát hình chiếu trên mặt phẳng  $\pi$  (như được biểu diễn trong hình 2.9), hãy xác định các giá trị tương ứng của  $\theta$  và  $\psi$  đối với những trường hợp sau đây: (i)  $\sigma_2 = \sigma_3$ ;  $\sigma_2 = \sigma_1$ ; (iii)  $\sigma_2 = 0,5(\sigma_1 + \sigma_3)$ . Chú ý: trong nhiều trường hợp, các biến  $\psi$  hoặc  $\theta$  được dùng để thay thế  $J_3$  trong khi viết các biểu thức tổng quát cho những hàm chảy hay phá hủy.
- 2.14. Một kim loại chảy dẻo khi ứng suất tiếp cực đại,  $\tau_{max}$ , đạt đến giá trị 125 MPa. Một phân tử vật liệu của kim loại này chịu trạng thái ứng suất phẳng:
- $$\sigma_1 = \sigma, \quad \sigma_2 = \alpha\sigma, \quad \sigma_3 = 0$$
- ở đây  $\alpha$  là hằng số. Xác định các giá trị ( $\sigma, \alpha$ ) để phân tử chảy dẻo.
- 2.15. Một kim loại chảy dẻo ở trạng thái ứng suất phẳng với  
 $\sigma_x = 80$  MPa,  $\sigma_y = 40$  MPa,  $\tau_{xy} = 80$  MPa  
Giả sử vật liệu đẳng hướng, độc lập với áp lực thủy tĩnh, và các tính chất cơ học giống nhau trong kéo và nén.

## Lý thuyết dẻo kĩ thuật

- (a) Hãy tìm tất cả những trạng thái ứng suất phẳng khác lúc chảy dẻo trong không gian ứng suất ( $\sigma_1, \sigma_2$ ).
- (b) Hãy vẽ các kết quả trong phần (a) trong không gian ứng suất ( $\sigma_1, \sigma_2$ ) và đánh giá ứng suất chảy (i) trong kéo đơn trực và (ii) trong trượt đơn giản, và dựa trên tính lồi cho những giới hạn lồi có thể của các đánh giá này.
- (c) Hãy xác định các ứng suất chảy trong (b), được dựa trên (i) tiêu chuẩn *von Mises*; (ii) tiêu chuẩn *Tresca*; (iii)  $F(J_2, J_3) = J_2^3 - 2,25J_3^2 - k^6 = 0$ .
- 2.16. Một ống thép tròn dài, đường kính ngoài  $D_0 = 25,4$  cm và chiều dày  $t = 0,32$  cm. Ống chịu áp suất bên trong  $p_i = 4,83$  MPa. Các đầu cuối của ống được đóng kín. Ứng suất chảy của thép là 227 MPa. Hãy tìm tải kéo dọc trực  $P$  tác động thêm lên ống để làm chảy dẻo ống, dựa trên (i) tiêu chuẩn *von Mises*; (ii) tiêu chuẩn *Tresca*; (iii)  $f(J_2, J_3) = J_2^3 - 2,25J_3^2 - k^6 = 0$ .

- 2.17. Tensor ứng suất của điểm dưới điều kiện tải làm việc được cho bởi

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 25 & 50 & 0 \\ 50 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Ứng suất chảy của vật liệu là 250 MPa. Dựa trên (a) tiêu chuẩn *Tresca* và (b) tiêu chuẩn *von Mises*, hãy tính toán hệ số an toàn của trạng thái ứng suất theo sự phá hủy (i) nếu tất cả các ứng suất được gia tăng một cách tỉ lệ để đạt tới bề mặt chảy và (ii) nếu chỉ có ứng suất pháp  $\sigma_x$  được gia tăng đến giá trị phá hủy tới hạn ở bề mặt chảy.

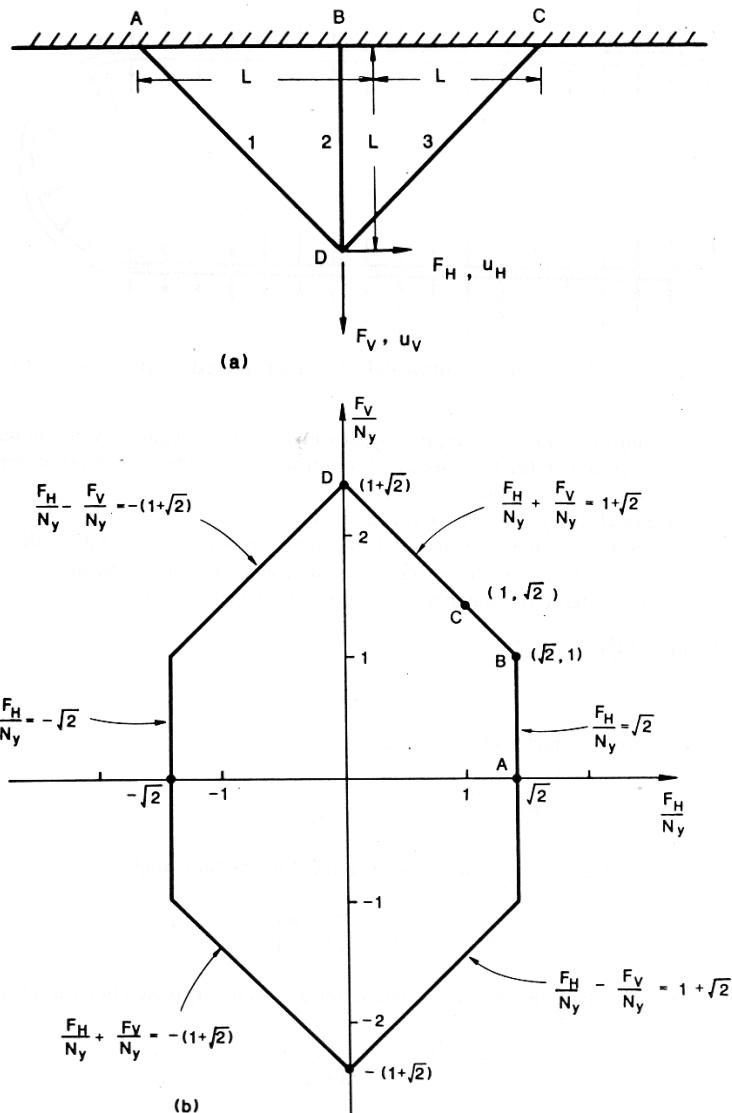
- 2.18. Một vật liệu hỏng dưới tác động của tải nén với các ứng suất  $\sigma_1 = \sigma_2 = -(1/3)f_c'$ ,  $\sigma_3 = -2f_c'$ , ở đây  $f_c'$  độ bền nén đơn trực của vật liệu.
- (a) Hãy xác định các hằng số  $c$  và  $\phi$  theo  $f_c'$  đối với tiêu chuẩn *Mohr-Coulomb*.
- (b) Hãy xác định các hằng số  $k$  và  $\alpha$  đối với tiêu chuẩn *Drucker-Prager*.
- (c) Hãy minh họa các bề mặt phá hủy *Mohr-Coulomb* và *Drucker-Prager* bằng cách vẽ các mặt cắt ngang của chúng trong mặt phẳng  $\pi$  và mặt cắt kinh tuyếng trong mặt phẳng kinh tuyếng  $\theta = 0^\circ$ .
- (d) Hãy tìm sự khác nhau lớn nhất trong mặt phẳng lệch giữa tiêu chuẩn *Mohr-Coulomb* và *Drucker-Prager*.

## Chương 2. Tiêu chuẩn chảy và tiêu chuẩn phá hủy

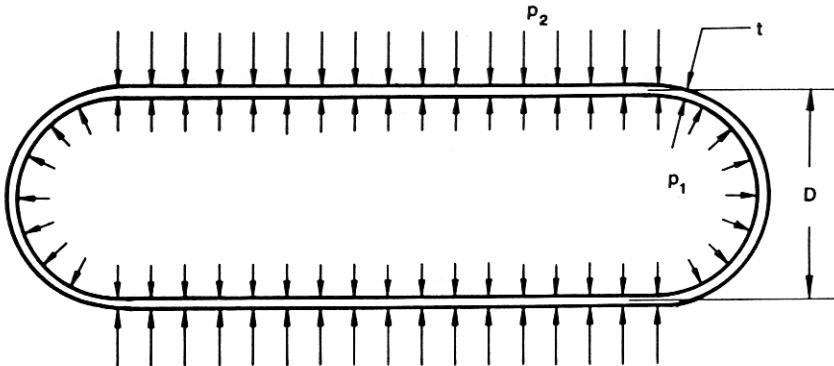
- (e) Hãy tìm độ bền kéo  $f_t'$  được dự đoán bởi hai tiêu chuẩn này.
- 2.19. Giả sử rằng vật liệu được mô tả trong bài tập 2.18 có độ bền kéo  $f_t' = 0,1f_c'$ . (a) Hãy vẽ các bề mặt phá hủy được định nghĩa bởi (i) tiêu chuẩn *Mohr-Coulomb* với giới hạn kéo; (ii) tiêu chuẩn *Drucker-Prager* với giới hạn kéo, trong mặt phẳng kinh tuyến  $\theta = 0^\circ$  và trong mặt phẳng lệch. (b) Hãy vẽ các giao tuyến của các bề mặt phá hủy với mặt phẳng  $(\sigma_1, \sigma_2)$  và với mặt phẳng  $(\sigma_x, \tau_{xy})$ .
- 2.20. Hãy tìm các hằng số  $\alpha$  và  $k$  của tiêu chuẩn *Drucker-Prager* theo lực dính kết,  $c$ , và góc ma sát nội,  $\phi$ , của tiêu chuẩn *Mohr-Coulomb* đối với những trường hợp sau đây:
- Để làm phù hợp kinh tuyến trượt.
  - Để làm phù hợp những điểm nén và kéo đơn giản.
  - Để làm phù hợp những điểm nén song trực như nhau và kéo đơn giản.
- 2.21. Hãy chứng minh (2.200) đối với các vật liệu đẳng hướng ngang.
- 2.22. Do có sự tương tự của ứng xử đòn-dẻo của hệ giàn với ứng xử đòn-dẻo của kim loại đa tinh thể, ta có thể mô phỏng ứng xử đòn-dẻo của một kim loại bằng cách phân tích hệ giàn đơn giản. Một hệ giàn ba thanh thẳng chịu tác động của một cặp lực,  $F_H$  và  $F_V$ , tại D như được vẽ trong hình P2.22a. Ba thanh có cùng diện tích mặt cắt ngang A, *Young's modulus* E, và ứng suất chảy  $\sigma_y$ , và A được xem đủ lớn để bất ổn định không xảy ra. Ta định nghĩa không gian lực hai chiều  $F_H - F_V$ . Một điểm với tọa độ  $(F_H/N_y, F_V/N_y)$ , ở đây  $N_y = A\sigma_y$ , trong không gian lực mô tả một cặp lực  $F_H$  và  $F_V$  tác động lên kết cấu. Định nghĩa trạng thái giới hạn đòn hồi trong không gian lực tương ứng với trạng thái lực mà một trong ba thanh bắt đầu chảy dẻo, và trạng thái giới hạn dẻo là trạng thái mà cấu trúc đạt đến trạng thái sụp đổ dẻo.
- Hãy viết một cách rõ ràng hệ phương trình cần thiết để giải bài toán này.
  - Hãy vẽ phác quỹ đạo giới hạn đòn hồi ban đầu trong không gian lực (sự mô phỏng bề mặt chảy ban đầu trong không gian ứng suất hai chiều).
  - Hãy chứng tỏ rằng đường gãy khúc kín trên hình P2.22b là quỹ đạo của đường bao giới hạn sụp đổ dẻo (sự mô phỏng bề mặt phá hủy trong không gian ứng suất hai chiều).
  - Hãy tính toán lịch sử ứng suất của ba thanh đối với chu kỳ đặt tải và cất tải:  $(F_H/N_y, F_V/N_y) = (0, 0) \rightarrow (0, 2) \rightarrow (0, 0)$ .

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

- (e) Hãy vẽ phác quỹ đạo giới hạn dàn hồi tiếp sau của cấu trúc sau khi nó hoàn thiện chu kỳ đặt và cất tải (biến cứng động học).
- (f) Các mối quan hệ và sự khác nhau giữa quỹ đạo giới hạn dàn hồi và quỹ đạo giới hạn sụp đổ dẻo là gì?



Hình P2.22. (a) Giàn ba thanh;  
(b) quỹ đạo trạng thái giới hạn của sụp đổ dẻo.



Hình P2.24. Ống trụ thành mỏng chịu áp suất trong và ngoài.

- 2.23. Như đã đề cập ở mục 2.3.3, khi tỷ số của hai chiều dài đặc trưng,  $\rho_{t0}/\rho_{c0}$  [phương trình (2.184)], của bề mặt phá hủy Mohr-Coulomb trên mặt phẳng  $\pi$  trở thành đơn vị, bề mặt Mohr-Coulomb sẽ được quy về bề mặt Tresca. Bề mặt Mohr-Coulomb sẽ được quy về bề mặt gì khi  $\rho_{t0}/\rho_{c0} = \frac{1}{2}$ ? Hãy thảo luận các đặc trưng của bề mặt phá hủy và vẽ quỹ đạo của bề mặt trên mặt phẳng lệch và cũng biểu thị các kinh tuyến kéo và nén trên mặt phẳng kinh tuyến.
- 2.24. Một bình trụ thành mỏng dài bằng thép, có đường kính  $D$  và chiều dày  $t$  chịu áp suất bên trong  $p_1$  và áp suất bên ngoài  $p_2$ , như được biểu diễn trong hình P2.24. Giả sử áp suất bên ngoài  $p_2$  không góp phần tạo ra ứng suất dọc trực của ống, và để cho  $p_2 = rp_1$ ,  $r \geq 0$ . Ống bắt đầu chảy dẻo dưới tác động  $p_1 = p_0$  và  $p_2 = 0$ .
- (a) Hãy tìm áp suất giới hạn,  $p_1 = p_y$ , làm ống bắt đầu chảy dẻo, dưới dạng  $p_0$  và  $r$  đối với trường hợp  $r > 0$ , theo (i) tiêu chuẩn von Mises và (ii) tiêu chuẩn Tresca.
  - (b) Hãy vẽ phác đường cong  $p_y$  theo  $r$  đối với hai tiêu chuẩn.
  - (c) Hãy tìm giá trị của  $r$  sao cho các áp lực giới hạn được dự đoán theo hai tiêu chuẩn có sự khác nhau lớn nhất, và cho biết nguyên nhân. Giả thiết rằng được làm phù hợp ở điểm chảy trượt thuần túy.
- 2.25. Hãy chứng tỏ rằng
- $$s_{ik}s_{kj}s_{il}s_{lj} = 2J_2^2$$
- 2.26. Một thông số đặc trưng của ứng suất được định nghĩa bởi
- $$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\tau_{12} - \tau_{23}}{\tau_{13}}, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$
- (a) Hãy chứng tỏ rằng thông số  $\mu_\sigma$  được liên hệ với góc  $\theta$  hoặc  $\psi$  như

## Lý thuyết dẻo kỹ thuật

$$\tan \psi = \tan \left( \theta - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\mu_\sigma}{\sqrt{3}}, \quad |\theta| \leq 60^\circ$$

- (b) Hãy chứng tỏ rằng tiêu chuẩn chảy von Mises có thể được biểu diễn dưới dạng  $\mu_\sigma$  như

$$\frac{2\tau_{\max}}{\sigma_0} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_0} = \frac{2}{\sqrt{3 + \mu_\sigma^2}}, \quad -1 \leq \mu_\sigma \leq 1$$

- (c) Hãy vẽ đường cong  $2\tau_{\max}/\sigma_0$  theo  $\mu_\sigma$  và thảo luận sự khác nhau giữa tiêu chuẩn von Mises và Tresca.

2.27. Giả sử rằng độ bền nén và kéo đơn trục của vật liệu bê tông là  $f_c'$  và  $f_t' = f_c'/10$ . Hãy dự đoán trạng thái ứng suất lúc phá hủy

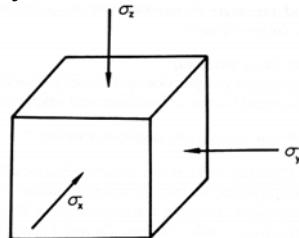
- (a) Đặt tải tỉ lệ,  $\sigma_x = \sigma_y = -p$ ,  $\sigma_z = -Ap$ , ở đây A là hằng số lớn hơn một. Hãy biểu diễn trạng thái ứng suất lúc phá hủy theo  $f_c'$  và A. Giá trị cực tiểu của A,  $A_{\min}$ , để mà nếu  $A \leq A_{\min}$ , mẫu sẽ không bao giờ bị phá hủy là gì?

- (b) Trước tiên tăng  $\sigma_x = \sigma_y$  cho đến khi trạng thái ứng suất  $\sigma_x = \sigma_y - Rf_c'$ ,  $\sigma_z = 0$ , ở đây R là hằng số lớn hơn không, được đạt tới; rồi mới tăng  $\sigma_z$ . Hãy biểu diễn trạng thái ứng suất lúc phá hủy theo  $f_c'$  và R. Giá trị cực đại của R,  $R_{\max}$ , để mà nếu  $R \geq R_{\max}$ , mẫu sẽ bị phá hủy trước khi đạt đến trạng thái  $\sigma_x = \sigma_y - Rf_c'$  là gì?

2.28. Sự đáp ứng  $\sigma-\varepsilon$  trong thí nghiệm kéo đơn trục đối với vật liệu chảy dẻo biến cứng đòn tuyến tính được xấp xỉ bởi biểu thức sau

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_0 + m\varepsilon^p, & \text{khi } \sigma \geq \sigma_0 \\ E\varepsilon, & \text{khi } \sigma < \sigma_0 \end{cases}$$

ở đây  $\sigma_0$  là ứng suất chảy kéo ban đầu. Một mẫu vật liệu đầu tiên được kéo tới trạng thái có biến dạng dẻo tích lũy  $\varepsilon^p = \varepsilon_0^p$  và rồi được cất tải và đặt tải nghịch đảo tới trạng thái nén sao cho biến dạng dẻo tích lũy  $\varepsilon_p = 0$ . Theo (i) quy luật biến cứng đẳng hướng, (ii) quy luật biến cứng động học, và (iii) quy luật biến cứng độc lập, hãy xác định các độ bền chảy kéo và nén hiện hành của vật liệu ở trạng thái ứng suất này.



Hình P2.27. Một khối bê tông chịu trạng thái ứng suất nén khối.