

## Chương 4, 5. Phương pháp phần tử hữu hạn

**BÀI 1:** Thiết lập phương trình biến phân (dạng biến phân) của phương trình vi phân sau, xác định phiếm hàm bậc II:  $I(u)$  nếu tồn tại:

a) 
$$-\frac{d}{dx} \left( a \frac{du}{dx} \right) - cu + x^2 = 0 \quad 0 < x < 1$$

ĐK:  $u(0) = 0; \left( a \frac{du}{dx} \right)_{x=1} = 1$

b) Dâm trên nền đàn hồi:

$$-\frac{d^2}{dx^2} \left( b \frac{dw}{dx^2} \right) + kw + f = 0 \quad 0 < x < L$$

ĐK:  $\begin{cases} w(0) = w(L) = 0 & : \text{đk biên cần thiết} \\ b \frac{d^2w}{dx^2}(0) = b \frac{d^2w}{dx^2}(L) = 0 & : \text{đk biên tự nhiên} \end{cases}$

$b, f$ : hàm của  $x$  (tuyến tính)

$k = \text{const.}$

c) 
$$-\frac{d}{dx} \left( u \frac{du}{dx} \right) + f = 0 \quad 0 < x < 1$$

ĐK:  $\frac{du}{dx}(0) = 0; u(1) = \sqrt{2}$

d) Trong  $\Omega$ :

$$\begin{cases} c_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{12} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + f = 0 \\ c_{21} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + c_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + g = 0 \end{cases} \quad v \text{ không là hàm thử}$$

ĐK:

$$\begin{aligned} c_{11} \frac{\partial u}{\partial x} n_x + c_{12} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y &= \hat{s} & \text{trên } \Gamma_1; & \quad \begin{cases} u = \hat{u} \\ v = \hat{v} \end{cases} & \text{trên } \Gamma_2 \\ c_{21} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x + c_{22} \frac{\partial v}{\partial y} n_y &= \hat{t} \\ c_{12} = c_{21}; c_{ij} : \text{hằng số} \end{aligned}$$

### **BÀI 2:**

1) Cho phương trình vi phân và những điều kiện biên:

$$-\frac{d}{dx} \left( (1+x) \frac{du}{dx} \right) = 0 \quad 0 < x < 1$$

$$u(0) = 0, u(1) = 1$$

## Chương 4, 5. Phương pháp phần tử hữu hạn

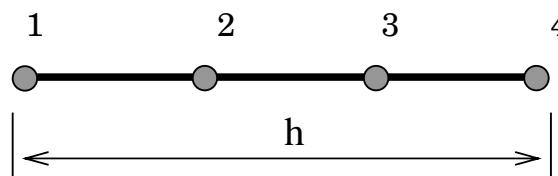
- a- Hãy tính những phần tử của ma trận hệ số  $[B]$  và vector cột  $\{F\}$  theo phương pháp biến phân Ritz với  $N$  tham số, các hàm xấp xỉ là đa thức.
- b- Tìm nghiệm xấp xỉ theo Ritz với  $N = 2$ .
- 2)** Cho phương trình vi phân của dầm gối tựa hai đầu chịu tải trọng phân bố đều  $f = f_0$  như sau:
- $$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2w}{dx^2} \right) + f_0 = 0 \quad 0 < x < L$$
- ĐK biên:
- $$w = EI \frac{d^2w}{dx^2} = C \text{ tại } x = 0 \text{ và } x = L \quad (C = 0; 1)$$
- Tìm nghiệm xấp xỉ theo Ritz với hai tham số theo 2 hướng:
- a- Các hàm xấp xỉ là đa thức.
  - b- Các hàm xấp xỉ là hàm lượng giác.
- Rồi so sánh với nghiệm chính xác.
- 3)** Tìm nghiệm xấp xỉ theo Galerkin của các phương trình sau:

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{v}{a} - f = 0 \\ \frac{d^2v}{dx^2} + g = 0 \end{cases} \quad 0 < x < 1$$

ĐK biên:  $\begin{cases} u(0) = \frac{du}{dx}(0) = 0 \\ v(1) = \frac{dv}{dx}(1) = 1 \end{cases}$

Trong đó:  $a, f, g$  là những hằng số

**BÀI 3:** Tìm hàm nội suy Lagrange bậc 3 của phần tử:

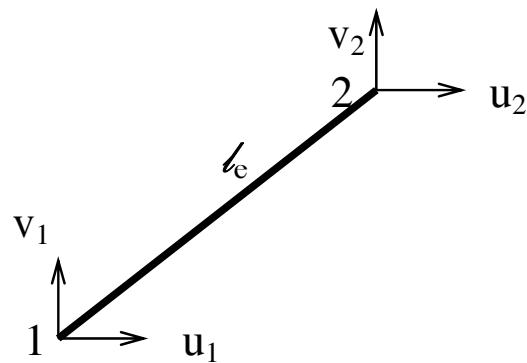


**BÀI 4:**

Tìm phương trình phần tử dạng ma trận:

$$[K^{(e)}]\{u\} = \{F\}$$

## Chương 4, 5. Phương pháp phân tử hữu hạn



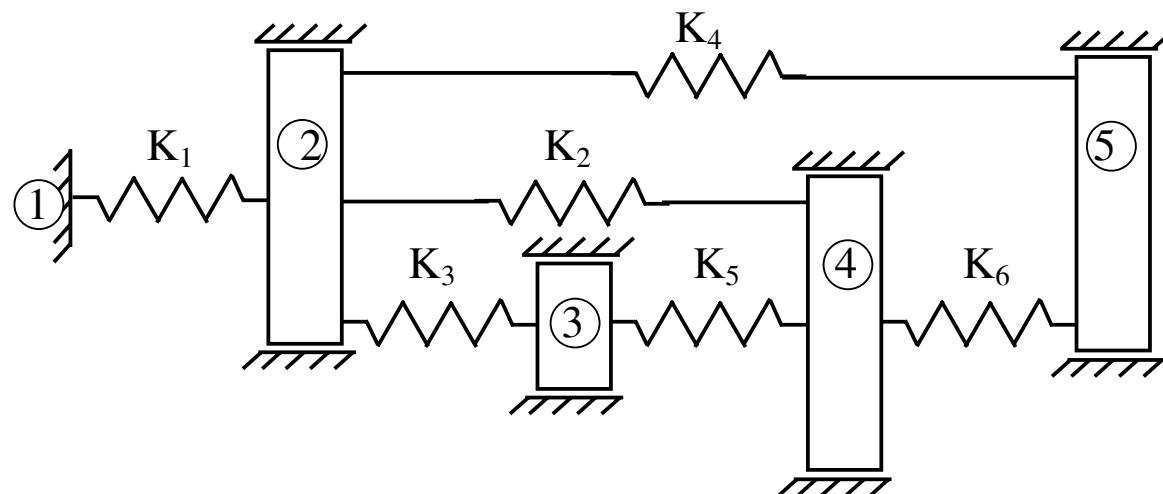
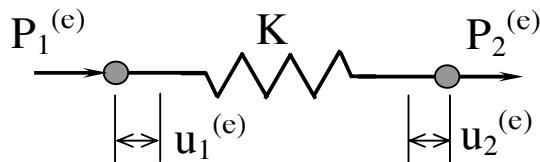
**BÀI 5:** Có phương trình vi phân trên phần tử mẫu:

$$-\frac{d}{dx} \left( a \frac{du}{dx} \right) + b \frac{du}{dx} + cu = f \quad x_A < x < x_B$$

Hãy thiết lập phương trình phân tử với trường hợp a, b, c, f là không đổi và lấy biến chính là xấp xỉ tuyến tính.

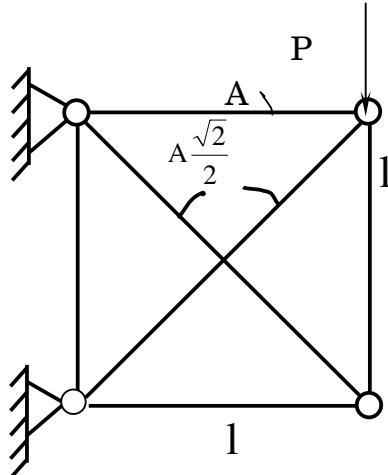
**BÀI 6:** Cho hệ lò xo đàn hồi tuyến tính.

Hãy tính các chuyển vị  $U_1, U_2, U_3, U_4$  và các lực trong lò xo. Biết  $K_i$  là độ cứng của lò xo thứ i và  $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = K_5 = K$ . Phần tử mẫu với những biến chính và phụ như hình vẽ.

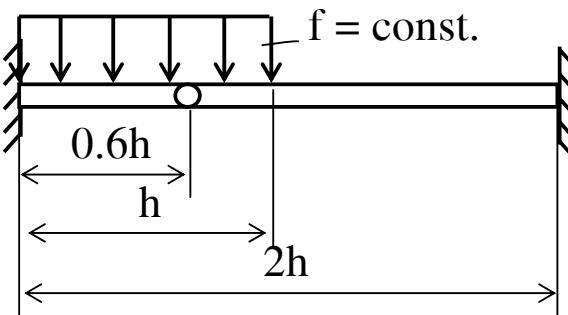


## Chương 4, 5. Phương pháp phần tử hữu hạn

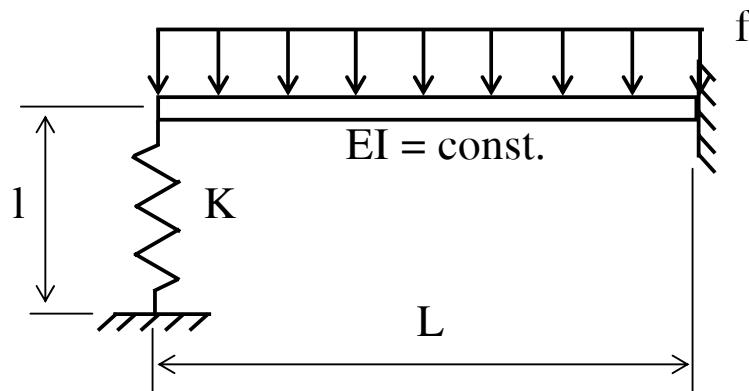
**BÀI 7:** Xác định chuyển vị tại những mắt dàn có kích thước và tải trọng như hình vẽ. Các thanh xiên có tiết diện ngang kà  $A \frac{\sqrt{2}}{2}$ , các thanh còn lại có tiết diện là A.



**BÀI 8:** Cho dầm như hình vẽ. Tìm moment tại C (dùng sơ đồ 2 phần tử).  
 $EJ = \text{const.}$



**BÀI 9:** Xác định lực đặt vào lò xo và độ lún của nó. Biết độ cứng K của lò xo là  $K = \frac{EJ}{L^3}$ . (dùng 1 phần tử)



## Chương 4, 5. Phương pháp phần tử hữu hạn

**BÀI 10:** Cho hệ như hình vẽ:

- a- Thiết lập phương trình phần tử (dạng ma trận) đã được biến đổi về hệ tọa độ tổng thể.
- b- Hệ phương trình tổng thể.
- c- Hệ phương trình để giải (sau khi đã áp đặt những điều kiện biên) đối với chuyển vị tổng quát, lực tổng quát chưa biết.

