CHƯƠNG IX

TOOCXƠ ĐỘNG LƯỢNG

9-1. Biểu thức tổng quát của mômen động lượng

1. Định nghĩa

a) *Động lượng*. Gọi P là một chất điểm có khối lượng m. Vận tốc của P trong hệ quy chiếu (R) ở thời điểm t là $\vec{v}_P^{(R)}$. Ta gọi động lượng của chất điểm P là véctơ

$$\vec{q}_m = m\vec{v}_P^{(R)} \tag{9-1}$$

Nếu P là một điểm của vật rắn S thì động lượng của cả vật rắn sẽ là :

$$\vec{Q} = \int_S \vec{v}_P^{(R)}\,dm \tag{9-2}$$

Đại lượng đó còn được gọi là tổng động lượng của hệ.

Gọi O là gốc tọa độ trong quy chiếu (R) và G là trọng tâm của vật rắn, vận tốc $\vec{v}_P^{(R)}$ được biểu diễn dưới dạng sau đây :

$$\vec{v}_P^{(R)} = \frac{d\vec{OP}}{dt} = \frac{d\vec{OG}}{dt} + \frac{d\vec{GP}}{dt}$$

Hay :

$$\vec{v}_P^{(R)} = \vec{v}_G^{(R)} + \frac{d\vec{GP}}{dt} \tag{9-3}$$

Đem (9-3) vào (9-2) ta có :

$$\vec{Q} = \int_S \vec{v}_G^{(R)}dm + \frac{d}{dt}\int_S \vec{GP}dm$$

Số hạng cuối cùng của đẳng thức đó là bằng 0 theo định nghĩa trọng tâm, vậy :

$$\vec{Q} = M \, . \, \vec{v}_G^{(R)} \tag{9-4}$$

trong đó M là khối lượng của vật rắn.

b) Mômen động lượng tại C

Gọi C là một điểm trong hệ quy chiếu (R). Mômen động lượng của toàn thể vật rắn đối với C là biểu thức véctơ :

$$\vec{\mu}_c = \int_S \vec{CP} \wedge \vec{v}_P^{(R)} \, . \, dm \tag{9-5}$$

Ta hãy xét tương quan giữa hai mômen động lượng tại hai điểm C và K. Theo định nghĩa ta có :

$$\vec{\mu}_K = \int_S \vec{KP} \wedge \vec{v}_P^{(R)} \, . \, dm \tag{9-6}$$

Hay có thể viết :

$$\vec{\mu}_K = \int_S (\vec{KC} + \vec{CP}) \wedge \vec{v}_P^{(Q)} dm =$$

$$= \int_S \vec{KC} \wedge \vec{v}_P^{(R)} dm + \int_S \vec{CP} \wedge \vec{v}_P^{(R)} dm \tag{9-7}$$

Vì $\vec{KC}$ không phụ thuộc vào dấu tích phân nên ta có thể đưa ra khỏi dấu tích phân và chú ý đến (9-2) ta có thể viết lại (9-7) dưới dạng :

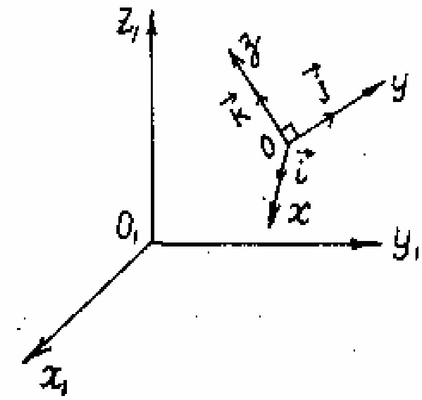
$$\vec{\mu}_K = \vec{\mu}_C + \vec{Q} \wedge \vec{CK} \tag{9-8}$$

Vậy trường véctơ $\vec{\mu}$ là một trường phản đối xứng. Trường đó cùng với $\vec{Q}$ lập thành một toocxơ và toocxơ đó được gọi là *toocxơ động lượng*.

9-2. Tính mômen động lượng $\vec{\mu}$

1. Trường hợp tổng quát. Ta tìm cách xác định trị số của $\vec{\mu}_C$ theo tích phân (9-5).

Gọi (R_1) là hệ quy chiếu Galilê với các trục tọa độ $O_1x_1y_1z_1$ (h. *9-1*) và hệ quy chiếu thứ hai (R) gắn liền với vật rắn thể hiện bởi các trục tọa độ Oxyz. Kí hiệu $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các véctơ trên các trục Ox, Oy, Oz và $\vec{\Omega}^{(1)}$ là véctơ tốc độ quay tức thời của vật rắn đối với hệ quy chiếu cố định (R_1).



Hình 9-1 .

Tốc độ của P trong hệ quy chiếu (R_1) tính theo toocxơ động học là :

$$\vec{v}_P^{(R_1)} = \vec{v}_0^{(R_1)} + \vec{\Omega}^{(1)} \wedge \vec{OP} \qquad \textbf{(9-9)}$$

Đem (14–9) vào (14–5) ta có :

$$\vec{\mu}_C = \int_S \vec{CP} \wedge \vec{v}_o^{(R_1)} . \mathrm{dm} + \int_S \vec{CP} \wedge (\vec{\Omega}^{(1)} \wedge \vec{OP})\mathrm{dm}$$

Vì ta có $\vec{CP} = \vec{CO} + \vec{OP}$ nên số hạng cuối có thể tách thành hai

$$\vec{\mu}_c = \int_S \vec{CP} \wedge \vec{v}_o^{(R_1)}\mathrm{dm} + \int_S \vec{CO} \wedge (\vec{\Omega}^{(1)} \wedge \vec{OP})\mathrm{dm} +$$

$$+ \int_S \vec{OP} \wedge (\vec{\Omega}^{(1)} \wedge \vec{OP})\mathrm{dm} \qquad \textbf{(9-10)}$$

Chúng ta lần lượt tính các số hạng tích phân đó.

a) Tích phân I_1

$$I_1 = \int_S \vec{CP} \wedge \vec{v}_o^{(R_1)}\mathrm{dm} \qquad \textbf{(9-11)}$$

Gọi G là trọng tâm của vật rắn, ta có thể tách tích phân đó làm hai như sau :

$$I_1 = \int_S \vec{CG} \wedge \vec{v}_o^{(R_1)}\mathrm{dm} + \int_S \vec{GP} \wedge v_o^{(R_1)}\mathrm{dm} \qquad \textbf{(9-12)}$$

Theo định nghĩa của trọng tâm, ta có :

$$\int_S \overrightarrow{GP} \, . \, dm = 0 \tag{9-13}$$

Vậy số hạng thứ hai trong (9-12) là triệt tiêu. Tích phân I_1 sẽ là :

$$I_1 = \int_S \overrightarrow{CG} \wedge \overrightarrow{v_O}^{(R_1)} dm = \overrightarrow{CG} \int \overrightarrow{v_O}^{(R_1)} dm = \overrightarrow{CG} \wedge \overrightarrow{v_O}^{(R_1)} M \tag{9-14}$$

Chú ý. $\overrightarrow{CG}$ và $v_O^{(R_1)}$ không phụ thuộc vào dấu của tích phân.

b) Tích phân I_2

$$I_2 = \int_S \overrightarrow{CO} \wedge (\overrightarrow{\Omega}^{(1)} \wedge \overrightarrow{OP}) dm \tag{9-15}$$

Có thể viết lại như sau :

$$I_2 = \overrightarrow{CO} \wedge \overrightarrow{\Omega}^{(1)} \wedge \int_S \overrightarrow{OP} dm =$$

$$= \overrightarrow{CO} \wedge \overrightarrow{\Omega}^{(1)} \wedge \left(\int_S \overrightarrow{OG} dm + \int \overrightarrow{GP} dm \right)$$

Hay :

$$I_2 = \overrightarrow{CO} \wedge (\overrightarrow{\Omega}^{(1)} \wedge \overrightarrow{OG}) \, . \, M \tag{9-16}$$

c) Tích phân I_3

$$I_3 = \int_S \overrightarrow{OP} \wedge (\overrightarrow{\Omega}^{(1)} \wedge \overrightarrow{OP}) dm \tag{9-17}$$

Khai triển biểu thức trong ngoặc ta có :

$$I_3 = \int_S (\overrightarrow{OP})^2 \, . \, \overrightarrow{\Omega}^{(1)} dm - \int (\overrightarrow{OP} \, . \, \overrightarrow{\Omega}^{(1)}) \overrightarrow{OP} dm \tag{9-18}$$

Nhưng như ta có :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \overrightarrow{\Omega}^{(1)} &= p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k} \end{aligned} \tag{9-19}$$

p, q, r là các thành phần của $\vec{\Omega}^{(1)}$ trong Oxyz. Đem (9-19) thay vào (9-18) ta có :

$$I_3 = \int_S (x^2 + y^2 + z^2)(p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k})dm -$$

$$- \int_S (xp + yq + zr)(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})dm \tag{9-20}$$

Sau khi khai triển ta có :

$$I_3 = \left[\int_S (y^2 + z^2)pdm - q\int_S xydm - r\int_S xzdm\right]\vec{i} +$$

$$+ \left[\int_S (z^2 + x^2)qdm - r\int_S yzdm - p\int_S yxdm\right]\vec{j} +$$

$$+ \left[\int_S (x^2 + y^2)rdm - p\int_S zxdm - q\int_S zydm\right]\vec{k} \tag{9-21}$$

Chú ý các tích phân trong ngoặc là các mômen quán tính hoặc mômen quán tính li tâm của vật rắn đối với các trục tọa độ Oxyz. Nếu kí hiệu các thành phần của ma trận quán tính tại O của vật rắn như sau :

$$(I_o) = \begin{bmatrix} A & F & E \\ -F & B & -D \\ -E & D & C \end{bmatrix} \tag{9-22}$$

Thì biểu thức của I_3 được viết dưới dạng :

$$I_3 = (I_o)\vec{\Omega}^{(1)} \tag{9-23}$$

Mang (9-14) , (9-16) và (9-23) vào (9-10) ta có :

$$\vec{\mu}_c = \vec{CG} \wedge \vec{v}_o^{(R_1)}.M + \vec{CO} \wedge (\vec{\Omega}^{(1)} \wedge \vec{OG})M +$$

$$+ (I_o)\vec{\Omega}^{(1)} \tag{9-24}$$

2. Các trường hợp đặc biệt. Định lí Koening

a) Nếu O trùng với G và điểm C cũng trùng vào đó thì biểu thức $\vec{\mu}_G$ trở thành mômen động lượng của hệ đối với trọng tâm của nó. Trong trường hợp này ta có $\vec{CG} = \vec{CO} = \vec{O}$. Vậy :

$$\vec{\mu}_G = (I_G)\vec{\Omega}^{(1)} \tag{9-25}$$

(I_G) là ma trận quán tính được tính tại tâm G.

b) Nếu O trùng với G và là cố định nghĩa là vật rắn chỉ quay chung quanh G. Khi đó ta có đồng thời hai điều kiện : $\vec{v}_O^{(R_1)} = 0$ và $\vec{OG} = 0$. Như vậy mômen động lượng đối với bất kì điểm C nào trong không gian cũng bằng mômen động lượng đối với trọng tâm G. Ta có :

$$\vec{\mu}_C = \vec{\mu}_G = (I_G)\vec{\Omega}^{(1)} \tag{9-26}$$

Ta có một trường mômen động lượng đều. Vectơ $\vec{Q} = 0$. Thực vậy vì $\vec{Q} = M \cdot \vec{v}_G^{(R_1)} = 0$

c) Định lí Koening

Nếu gốc tọa độ O trùng với trọng tâm G của vật rắn thì ta sẽ có :

$$\vec{\mu}_C = \vec{CG} \wedge M\vec{v}_G^{(R_1)} + (I_G)\vec{\Omega}^{(1)} \tag{9-27}$$

Ta có thể phát biểu định lí sau đây :

Mômen động lượng của một hệ chất điểm đối với một điểm C nào đó trong không gian quy chiếu của hệ điểm là bằng tổng mômen động lượng của hệ đối với trọng tâm G của hệ và mômen động lượng đối với C của một chất điểm có khối lượng là bằng cả khối lượng của hệ đặt tải trọng tâm G của hệ gây nên.

Với (14–25) ta có thể viết (14–27) lại dưới dạng :

$$\vec{\mu}_C = \vec{\mu}_G + \vec{CG} \wedge M\vec{v}_G^{(R_1)} \tag{9-28}$$