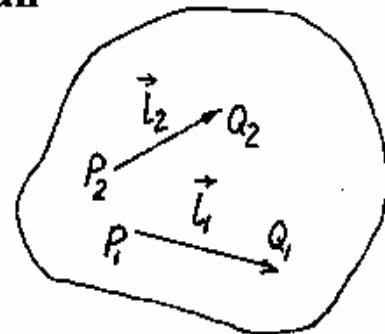


CHƯƠNG VIII

TOOCXO ĐỘNG HỌC

8-1. Trường vận tốc của một vật rắn

Giả sử cho vật rắn và các điểm P_1Q_1 , P_2Q_2 trên vật rắn như hình vẽ (h. 8-1). P_1Q_1 và P_2Q_2 xác định các vectơ $\vec{l}_1 \vec{l}_2$ trên vật rắn.



Trong quá trình vật rắn chuyển động tương quan vị trí của các điểm P_1Q_1 và P_2Q_2 là không thay đổi vì vậy tích vô hướng của hai vectơ \vec{l}_1 và \vec{l}_2 là một hằng số

Hình 8-1

$$\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2 = C^{\text{te}} \quad (8-1)$$

Chúng ta hãy tìm cách xác định trường vận tốc của các điểm thuộc vật rắn khi vật chuyển động. Vị trí tương đối giữa \vec{l}_1 và \vec{l}_2 trong vật rắn là không thay đổi nhưng khi vật rắn chuyển động thì \vec{l}_1 và \vec{l}_2 là các hàm số đối với thời gian. Tính đạo hàm của biểu thức (8-1) theo thời gian ta có :

$$\vec{l}_1 \frac{d\vec{l}_2}{dt} + \vec{l}_2 \frac{d\vec{l}_1}{dt} = 0 \quad (8-2)$$

Hay có thể viết dưới dạng khác :

$$\vec{l}_1 \cdot \frac{d\vec{l}_2}{dt} = - \vec{l}_2 \frac{d\vec{l}_1}{dt} \quad (8-3)$$

So sánh với biểu thức (11-10)

$$\vec{a} \cdot \mathcal{L}(\vec{b}) = - \vec{b} \mathcal{L}(\vec{a})$$

ta nhận thấy (8-3) có cùng tính chất toán học tương tự. Đạo hàm đối với thời gian trong trường hợp này đóng vai trò như một phép ánh xạ phản đối xứng. Trước đây phép ánh xạ đó được biểu diễn bằng tích hứu hướng của vectơ trường phản đối xứng $\vec{\varphi}$ với \vec{a} (7-25).

$$\vec{a}' = \mathcal{L}(\vec{a}) = \vec{\varphi} \wedge \vec{a}$$

thì nay trong phép tính đạo hàm ta cũng có thể viết :

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{l} \quad (8-4)$$

$\vec{\Omega}$ đóng vai trò như $\vec{\varphi}$ nên cũng được gọi là vectơ của phép ánh xạ phản đối xứng. Ở đây vectơ đó còn được gọi là vectơ quay. Ta có thể làm rõ điều đó như sau :

Chọn một điểm O là chuẩn, ta có :

$$\vec{l} = \vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$$

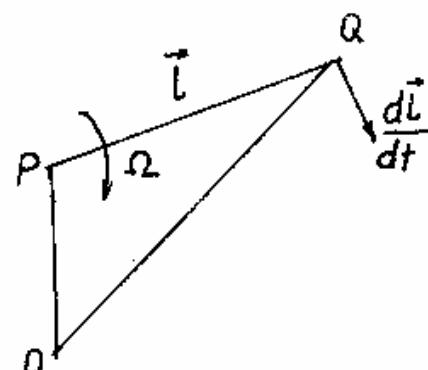
Tính đạo hàm của hai vế ta được :

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d\vec{OQ}}{dt} - \frac{d\vec{OP}}{dt} \quad (8-5)$$

vì \vec{l} có độ dài không đổi vậy $\frac{d\vec{l}}{dt}$ biểu thị

sự quay của \vec{l} trong phép quay với vận tốc góc $\vec{\Omega}$. Nếu biểu thị phép quay đó bằng vectơ vận tốc quay $\vec{\Omega}$ vuông góc với mặt phẳng quay của \vec{l} thì đạo hàm $\frac{d\vec{l}}{dt}$ là tích hứu hướng giữa $\vec{\Omega}$ và \vec{l} . Ta có :

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{l}$$



Hình 8-2a

Theo định nghĩa các đạo hàm $\frac{d\vec{OQ}}{dt}$ và $\frac{d\vec{OP}}{dt}$ là vận tốc của các điểm P và Q vậy (8-5) được viết lại như sau :

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{l} = \vec{v}(Q) - \vec{v}(P)$$

Hay :

$$\vec{v}(Q) = \vec{v}(P) + \vec{\Omega} \wedge \vec{PQ} \quad (8-6)$$

Biểu thức (8-6) cho ta thấy quan hệ giữa các vận tốc của các điểm P và Q. Tính chất của (8-6) là tính chất của một toocxơ. Ta có thể phát biểu như sau :

Trường vận tốc của các điểm trong vật rắn khi vật này chuyển động là một trường phản đối xứng. Trường đó cùng với véc-tơ quay $\vec{\Omega}$ lập thành một toocxơ mà được gọi là *toocxơ động học*. Mômen của toocxơ là vận tốc của các điểm và véc-tơ của toocxơ là véc-tơ vận tốc góc $\vec{\Omega}$.

Nếu xác định được vận tốc tại một điểm bất kỳ của vật rắn và véc-tơ quay $\vec{\Omega}$ thì trường vận tốc trong vật rắn là hoàn toàn xác định.

8-2. Tính chất của trường vận tốc trong vật rắn chuyển động

Vì đó là một toocxơ nên trường vận tốc cũng có tính chất đẳng chiếu. Thực vậy nếu ta đem nhân vô hướng cả hai vế (8-6) với \vec{PQ} ta sẽ được :

$$\vec{v}(Q) \cdot \vec{PQ} = \vec{v}(P) \cdot \vec{PQ} + \vec{PQ} \cdot (\vec{\Omega} \wedge \vec{PQ})$$

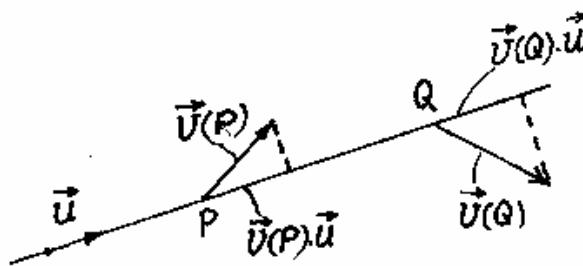
Vì ràng $\vec{PQ} \cdot (\vec{\Omega} \wedge \vec{PQ}) = 0$ vậy :

$$\vec{v}(Q) \cdot \vec{PQ} = \vec{v}(P) \cdot \vec{PQ} \quad (8-7)$$

Nếu gọi \vec{u} là véc-tơ đơn vị trên giá PQ, véc-tơ $\vec{PQ} = \vec{PQ} \cdot \vec{u}$, sau khi thay vào (8-7) ta sẽ được :

$$\vec{v}(Q) \cdot \vec{u} = \vec{v}(P) \cdot \vec{u}$$

$\vec{v}(Q) \cdot \vec{u}$ và $\vec{v}(P) \cdot \vec{u}$ là các hình chiếu của $\vec{v}(Q)$ và $\vec{v}(P)$ lên PQ. Các hình chiếu đó bằng nhau (h. 8-2b).



Hình 8-2b

8-3. Chuyển động song phẳng

Xét trường hợp đặc biệt thường gặp trong kĩ thuật là khi vật rắn có chuyển động song phẳng.

1. Định nghĩa. Một vật rắn S có một chuyển động song phẳng khi một mặt phẳng π_2 thuộc về S luôn tì lên một mặt phẳng π_1 được xem là cố định trong quá trình vật rắn di động.

Như vậy để xác định vị trí của vật rắn chúng ta chỉ cần xét vị trí tương đối của π_2 so với π_1 (h. 8-3).

2. Tâm quay tức thời của π_2 đối với π_1

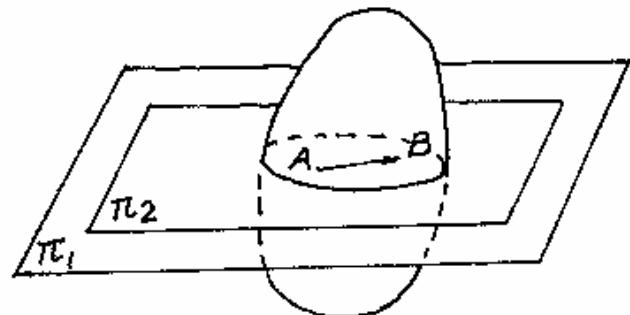
a) *Điểm có vận tốc tức thời bằng không*

Ta hãy xét đoạn thẳng AB thuộc vật rắn trên mặt π_2 (h. 8-3). Trên hình 8-4 ta xem π_1 là mặt phẳng của hình vẽ và π_2 luôn luôn tựa trên đó. Vậy vận tốc $\vec{v}(A)$ và $\vec{v}(B)$ cũng nằm trong mặt phẳng của hình vẽ.

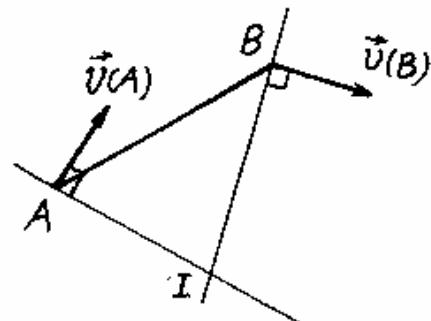
Từ A và B ta vạch hai đường thẳng vuông góc với $\vec{v}(A)$ và $\vec{v}(B)$. Giao điểm của hai đường thẳng này được kí hiệu là I.

Theo tính chất đẳng chiếu ta thấy ngay rằng mọi điểm trên AI đều có vận tốc mà phương của chúng là vuông góc với AI vì hình chiếu của chúng lên phương của AI phải bằng không bằng hình chiếu của $\vec{v}(A)$.

Tương tự như vậy đối với các điểm trên BI. Vậy tại I vận tốc tại đó có hai thành phần hình chiếu lên hai trục khác nhau đều bằng không. Điều đó có nghĩa là $\vec{v}(I) = 0$.



Hình 8-3



Hình 8-4

Ta nói rằng I là điểm duy nhất ở thời điểm t của mặt phẳng π_2 có vận tốc bằng không.

Thực vậy giả sử ta còn một điểm K nào đó trong π_2 mà vận tốc tức thời tại đó cũng bằng không thì ta sẽ chứng minh rằng vận tốc tại A và B cũng bằng không. Nối A với K và B với K. Hình chiếu của $\vec{v}(A)$ và $\vec{v}(B)$ lên phương KA và KB cũng phải bằng không. Nghĩa là $\vec{v}(A)$ và $\vec{v}(B)$ có hai hình chiếu trên hai phương khác nhau bằng không. Vận tốc đó phải bằng không.

b) *Sự quay tức thời*

Như vậy chuyển động của π_2 trên π_1 ở mỗi thời điểm được xem là sự quay của π_2 chung quanh I. Chúng ta kí hiệu tâm quay tức thời này là I_{21} (để chỉ chuyển động của π_2 đối với π_1).

3. Đường nền và đường lăn.

a) *Định nghĩa* : Ở mỗi thời điểm đang xét ta phải phân biệt ba điểm I : Một điểm nằm trên π_2 với vận tốc $\vec{v}_2(I) = \vec{0}$ (vận tốc của π_2 đối với π_1). Điểm này, như đã nói ở trên, là điểm I_{21} .

Một điểm nằm ở trên π_1 có vận tốc $\vec{v}_1(I) = \vec{0}$. Kí hiệu điểm này là I_{11} .

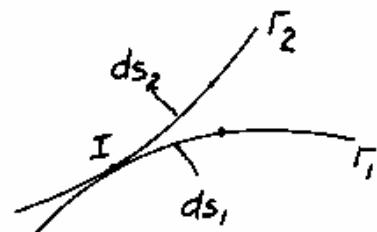
Điểm thứ ba là điểm hình học I. Khi thời gian trôi đi thì điểm tâm quay tức thời sẽ di chuyển từ điểm này sang điểm khác cả trong π_2 và π_1 . Từ đó ta có định nghĩa sau đây :

Tập hợp các tâm quay tức thời trên mặt phẳng cố định π_1 được gọi là đường nền (Γ_I).

Tập hợp các tâm quay tức thời trên mặt phẳng chuyển động π_2 được gọi là đường lăn (Γ_2).

Ta có định lí sau đây :

b) *Định lí* : Đường lăn (Γ_2) lăn không trượt trên đường nền (Γ_1), trong khi π_2 chuyển động trên π_1 . Thực vậy, giả sử ta có đường nền (Γ_1) và đường lăn (Γ_2) như trên hình vẽ (h. 8-5)



Hình 8-5

Gọi $\vec{v}_1^{(1)}$ là tốc độ của I trên (Γ_1) và $\vec{v}_1^{(2)}$ là tốc độ của I trên đường lăn (Γ_2) so với mặt π_2 .

Như ta đã biết quy luật hỗn hợp vận tốc trong hệ trục cố định và hệ trục di động là :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \quad (8-8)$$

\vec{v}_a là vận tốc tuyệt đối

\vec{v}_r là vận tốc tương đối

\vec{v}_e là vận tốc kéo theo

Do đó ta có thể viết :

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1^{(2)} + \vec{v}_2^{(1)}(I) \quad (8-9)$$

Trong đó $\vec{v}_2^{(1)}(I)$ là vận tốc kéo theo của I trên Γ_2 so với Γ_1 . Ta biết rằng tốc độ này là bằng không vì I là tâm quay tức thời. Vậy ta có :

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1^{(2)} \quad (8-10)$$

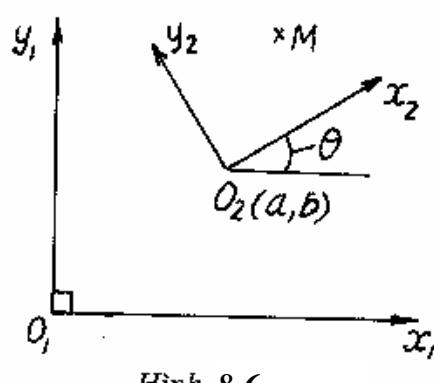
Điều đó có nghĩa là :

$$ds_1 = ds_2 = \vec{v}_1^{(1)} \cdot dt = \vec{v}_1^{(2)} \cdot dt \quad (8-11)$$

Đường lăn lăn không trượt trên đường nền.

c) Phương pháp giải tích để xác định đường nền và đường lăn.

Trên hình 8-6 mặt cố định π_1 được biểu diễn bằng hệ trục tọa độ $O_1x_1y_1$ và mặt di động π_2 được biểu diễn bởi $O_2x_2y_2$. O_2 được xác định bởi các tọa độ (a, b) trong hệ trục $O_1x_1y_1$. Gọi θ là góc tạo bởi O_1x_1 và O_2x_2 và M là một điểm thuộc vào mặt phẳng π_2 .



Hình 8-6

Các điểm O_1O_2M liên quan với nhau bởi biểu thức :

$$\vec{O_1M} = \vec{O_1O_2} + \vec{O_2M} \quad (8-12)$$

Chiếu xuống các trục tọa độ ta có :

$$x_1 = a + x_2 \cos\theta - y_2 \sin\theta \quad (8-13)$$

$$y_1 = b + x_2 \sin\theta + y_2 \cos\theta$$

Tọa độ của điểm có tốc độ bằng không (nếu điểm đó tồn tại) phải thỏa mãn các điều kiện sau đây :

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{da}{dt} - x_2 \sin\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} - y_2 \cos\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (8-14)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{db}{dt} + x_2 \cos\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} - y_2 \sin\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = 0$$

Từ đó ta có :

$$\frac{da}{d\theta} = x_2 \sin\theta + y_2 \cos\theta \quad (8-15)$$

$$-\frac{db}{d\theta} = x_2 \cos\theta - y_2 \sin\theta$$

Vậy phương trình thông số của đường nền và đường lăn là như sau :

Với đường nền. Đem (8-15) thay vào (8-13) Ta có :

$$x_1 = a - \frac{db}{d\theta} \quad (8-16)$$

$$y_1 = b + \frac{da}{d\theta}$$

Với đường lăn. Đem nhân phương trình đầu của (8-15) cho $\sin\theta$ và phương trình thứ hai cho $\cos\theta$ rồi thực hiện phép cộng vế với vế. Tương tự như vậy nhưng với cách ngược lại. Nhân

phương trình đầu với $-\cos\theta$ và phương trình thứ hai với $\sin\theta$ rồi cộng vế với vế ta sẽ được :

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{da}{d\theta} \sin\theta - \frac{db}{d\theta} \cos\theta \\y_2 &= \frac{da}{d\theta} \cos\theta + \frac{db}{d\theta} \sin\theta\end{aligned}\quad (8-17)$$

8-4. Trường gia tốc trong vật rắn

Ta hãy xét xem trường gia tốc trong vật rắn có phải là một toocxơ hay không.

Tính đạo hàm biểu thức (8-6) ta có :

$$\frac{d\vec{v}(Q)}{dt} = \frac{d\vec{v}(P)}{dt} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{PQ} + \vec{\Omega} \wedge \frac{d\vec{PQ}}{dt} \quad (8-18)$$

Dùng kí hiệu γ để biểu diễn cho gia tốc và chú ý

$$\frac{d\vec{PQ}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{PQ}$$

biểu thức (8-18) có thể viết lại như sau :

$$\vec{v}(Q) = \vec{v}(P) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{PQ} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{PQ}) \quad (8-19)$$

Hay :

$$\vec{v}(Q) = \vec{v}(P) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{PQ} + (\vec{\Omega} \cdot \vec{PQ}) \vec{\Omega} - \vec{\Omega}^2 \cdot \vec{PQ} \quad (8-20)$$

Ta nhận thấy trường gia tốc không phải là một toócxơ.

8-5. Một số chuyển động thường gặp của vật rắn

1. Chuyển động tịnh tiến

Vật rắn chuyển động tịnh tiến khi $\vec{l} = \vec{PQ} = C^te$. Điều đó có nghĩa là \vec{l} luôn luôn giữ song song với vị trí ban đầu của nó. Ta có :

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = 0 \quad (8-21)$$

Hay nói một cách khác

$$\vec{v}(Q) = \vec{v}(P)$$

Từ đó ta có các kết luận sau đây :

Trong chuyển động tịnh tiến тоocxơ động học có các tọa độ là $[\vec{\Omega} = 0, \vec{v} = C^t]$

Trường vận tốc là đều ở mọi nơi ở thời điểm t đang xét.

Vì rằng $\vec{\Omega}$ là bằng không nên trường gia tốc cũng là một trường đều. $\vec{y}(Q) = \vec{y}(P)$.

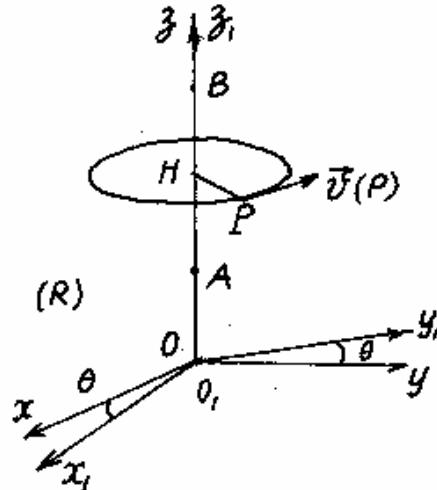
Nếu ta biết vị trí ban đầu của vật rắn và quỹ đạo của một điểm thuộc vật rắn thì vị trí của vật rắn hoàn toàn được xác định.

2. Chuyển động quay của vật rắn quanh một trục

Ta nói vật rắn chuyển động quay quanh một trục khi ta có hai điểm phân biệt A và B của vật rắn đứng yên trong hệ quy chiếu cố định (R).

Ta dễ dàng nhận thấy rằng mọi điểm nằm trên đường AB cũng đứng yên và AB được gọi là trục quay của vật rắn.

Xác định một hệ trục tọa độ Oxyz với Oz trùng với trục quay AB trong hệ quy chiếu cố định (R). Sử dụng một hệ quy chiếu thứ hai $O_1x_1y_1z_1$ gắn liền với vật rắn. O_1z_1 cũng trùng với Oz, như vậy vị trí của vật rắn hoàn toàn được xác định khi ta có góc gом giữa Ox và O_1x_1 (h.13-7), nếu gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ là các vectơ đơn vị trên $O_1x_1y_1z_1$ thì thông số duy nhất của chuyển động là :



Hình 8-7

$$\theta = (\vec{i}, \vec{i}_1) \quad (8-22)$$

θ là một hàm đối với thời gian t. Trong khoảng thời gian từ t_0 đến t vật rắn quay chung quanh AB một góc

$$\alpha = \theta(t) - \theta(t_0) \quad (8-23)$$

a) *Trường vận tốc*

Vì trường vận tốc trong vật rắn là một toocxơ nên ta có thể viết :

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(O_1) + \vec{\Omega} \wedge \vec{O_1 P} \quad (8-24)$$

trong đó véctơ quay $\vec{\Omega}$ là véctơ của toócxơ.

Vì O_1 thuộc vật rắn nằm trên trục quay nên $\vec{v}(O_1) = 0$. Do đó biểu thức (8-24) có dạng là :

$$\vec{v}(P) = \vec{\Omega} \wedge \vec{O_1 P} \quad (8-25)$$

Ta phải xác định véctơ quay $\vec{\Omega}$.

Ta hãy tính vận tốc của P theo một cách khác. Vì rằng :

$$\vec{O_1 P} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \quad (8-26)$$

Vậy :

$$\vec{v}(P) = \frac{d\vec{O_1 P}}{dt} = x_1 \frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1 \frac{d\vec{j}_1}{dt} \quad (8-27)$$

Các đạo hàm của các véctơ đơn vị là :

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{j}_1 \cdot \frac{d\theta}{dt} \text{ và } \frac{d\vec{j}_1}{dt} = -\vec{i}_1 \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (8-28)$$

Đem (8-28) thay vào (8-27) ta được :

$$\vec{v}(P) = (x_1 \vec{j}_1 - y_1 \vec{i}_1) \frac{d\theta}{dt} \quad (8-29)$$

Biểu thức trong ngoặc là tích hữu hướng của hai véctơ \vec{k}_1 và $\vec{O_1 P}$. Thực vậy :

$$\vec{k}_1 \wedge \vec{O_1 P} = x_1 \vec{j}_1 - y_1 \vec{i}_1 \quad (8-30)$$

Do đó ta có :

$$\vec{v}(P) = \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{k}_1 \wedge \vec{O_1 P} \quad (8-31)$$

Đem so sánh (13-31) với (13-25) ta được :

$$\vec{\Omega} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{k}_1 \quad (8-32)$$

Vậy véctơ $\vec{\Omega}$ của toocxσ được đặt trên trục quay.

Bây giờ phải xác định phương và chiêu của $\vec{v}(P)$.

Biểu thức (8-31) có thể viết lại như sau :

$$\vec{v}(P) = \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{k}_1 \wedge [O_1H + HP] \quad (8-33)$$

H là chân của đường thẳng góc hạ từ P xuống trục quay.
Sau khi khai triển ta có :

$$\vec{v}(P) = \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{k}_1 \wedge \vec{HP} \quad (8-34)$$

Nếu gọi t là véctơ đơn vị trên đường tiếp tuyến với vòng tròn đi qua P tâm H và t, \vec{k}_1 và \vec{HP} lập thành một tam diện thuận thì vận tốc tại P sẽ là :

$$\vec{v}(P) = \frac{d\theta}{dt} \cdot r_P \cdot t \quad r_P \text{ là độ dài P.H.}$$

b) *Gia tốc tại P*

Tính đạo hàm của (8-31), ta được :

$$\vec{\gamma}(P) = \frac{dv(P)}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot \vec{k}_1 \wedge \vec{O_1P} + \frac{d\theta}{dt} \vec{k}_1 \wedge \frac{d\vec{O_1P}}{dt}$$

Hay :

$$\vec{\gamma}(P) = \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{k}_1 \wedge \vec{O_1P} + \frac{d\theta}{dt} \vec{k}_1 \wedge \left(\frac{d\theta}{dt} \vec{k}_1 \wedge \vec{O_1P} \right) \quad (8-35)$$

Khai triển biểu thức cuối cùng ta được :

$$\vec{\gamma}(P) = \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{k}_1 \wedge \vec{O_1P} + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 [\vec{k}_1 \cdot \vec{O_1P}] \vec{k}_1 - \vec{O_1P} \quad (8-36)$$

Vì rằng

$$(\vec{k}_1 \cdot \vec{O_1 P}) \vec{k}_1 = \vec{O_1 H} \text{ và } \vec{O_1 H} - \vec{O_1 P} = \vec{PH}$$

Nên ta viết lại (8-36) như sau :

$$\vec{\gamma}(P) = \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot \vec{k}_1 \wedge \vec{O_1 P} + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cdot \vec{PH} \quad (8-37)$$

Hay :

$$\vec{\gamma}(P) = r_P \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot \vec{t} - r_P \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cdot \vec{n} \quad (8-38)$$

Trong đó \vec{n} là vectơ đơn vị hướng theo chiều pháp tuyến \vec{HP} . Thành phần thứ nhất là gia tốc tiếp tuyến $\vec{\gamma}_t$ và thành phần thứ hai là gia tốc hướng tâm $\vec{\gamma}_n$. Ta có :

$$\vec{\gamma}_t = r_P \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot \vec{t} \quad (8-39)$$

$$\vec{\gamma}_n = -r_P \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cdot \vec{n} \quad (8-40)$$

3. Chuyển động xoáy tịnh tiến.

Khi vật rắn đang quay trục quay $O_1 z_1$ của vật rắn trượt dọc theo trục Oz thì lúc đó ta nói rằng vật rắn có chuyển động xoáy tịnh tiến hình 8-8. Tốc độ của một điểm P nào đó trên vật rắn được cho bởi biểu thức v_{cx} :

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(O_1) + \vec{\Omega} \wedge \vec{O_1 P} \quad (8-41)$$

Hay

$$\vec{v}(P) = \frac{dh}{dt} \cdot \vec{k} + \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{k} \wedge \vec{OP} \quad (8-42)$$

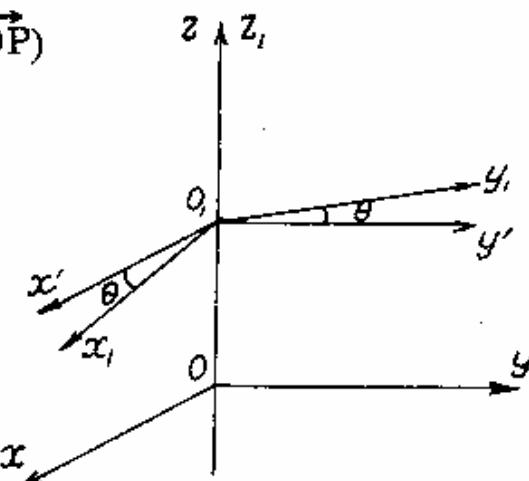
$\frac{dh}{dt}$ là tốc độ trượt của O_1 so với O, h là khoảng cách $\overline{OO_1}$.

Chú ý trong biểu thức (8-42) ta đã thay $\vec{k}_1 = \vec{k}$ và $\vec{O_1 P} = \vec{OP}$. Điều đó là hoàn toàn cho phép. Thực vậy, ta có :

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} \vec{k} \wedge \vec{O_1P} &= \frac{d}{dt} \vec{k} \wedge (\vec{O_1O} + \vec{OP}) \\ &= \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{k} \wedge \vec{OP}.\end{aligned}$$

Như vậy tọa độ của toocxđ động học tại O_1 sẽ là :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} = \frac{d\theta}{dt} \vec{k} \\ \vec{v}(O_1) = \frac{dh}{dt} \cdot \vec{k} \end{cases} \quad (8-43)$$



Hình 8-8

Ta dễ dàng nhận thấy rằng trục quay cũng là trục trung tâm của toocxđ vì mọi điểm trên trục đó véctơ và mômen của toocxđ là song song với nhau. Chúng cùng nằm trên Oz.

4. Chuyển động xoáy tịnh tiến tức thời

Trong trường hợp chuyển động bất kì của vật rắn, tại một thời điểm t nào đó, tương quan vận tốc giữa hai điểm K và M, theo liên kết toocxđ, là như sau :

$$\vec{v}(K) = \vec{v}(M) + \vec{\Omega} \wedge \vec{MK} \quad (8-44)$$

$[\vec{\Omega}$ và $\vec{v}(M)]$ là các tọa độ của toocxđ động học tại M.

Tại mọi điểm P nằm trên trục trung tâm của toocxđ ta có điều kiện :

$$\vec{v}(P) = \alpha(\vec{\Omega}) \quad (8-45)$$

Tương quan vận tốc giữa P và M là :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(P) + \vec{\Omega} \wedge \vec{PM} \quad (8-46)$$

Đem (8-45) vào (8-46) ta có :

$$\vec{v}(M) = \alpha \vec{\Omega} + \vec{\Omega} \wedge \vec{PM}$$

Vậy $\vec{v}(M)$ gồm có hai phần : một phần tịnh tiến $\alpha \vec{\Omega}$ và phần quay $\vec{\Omega} \wedge \vec{PM}$. Từ đó ta đưa ra kết luận sau đây :

Ở một thời điểm t trục trung tâm của toocxđ động học là trục quay của một chuyển động xoáy tịnh tiến tức thời trong chuyển động bất kì của vật rắn.

Vị trí của trục trung tâm là một hàm số đối với thời gian. Cũng vì vậy trục trung tâm của toocxô động học được xem là trục quay tức thời. Quỹ tích của những trục quay tức thời được gọi là mặt trục (surface axoidale).

5. Chuyển động của vật rắn quay một điểm cố định

Giả sử vật rắn có một điểm cố định O và nó chuyển động quanh điểm đó.

Vận tốc một điểm bất kỳ M trên vật rắn ở thời điểm t là :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(O) + \vec{\Omega} \wedge \vec{OM} \quad (8-47)$$

vì $\vec{v}(O) = 0$ nên (8-47) có dạng :

$$\vec{v}(M) = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM} \quad (8-48)$$

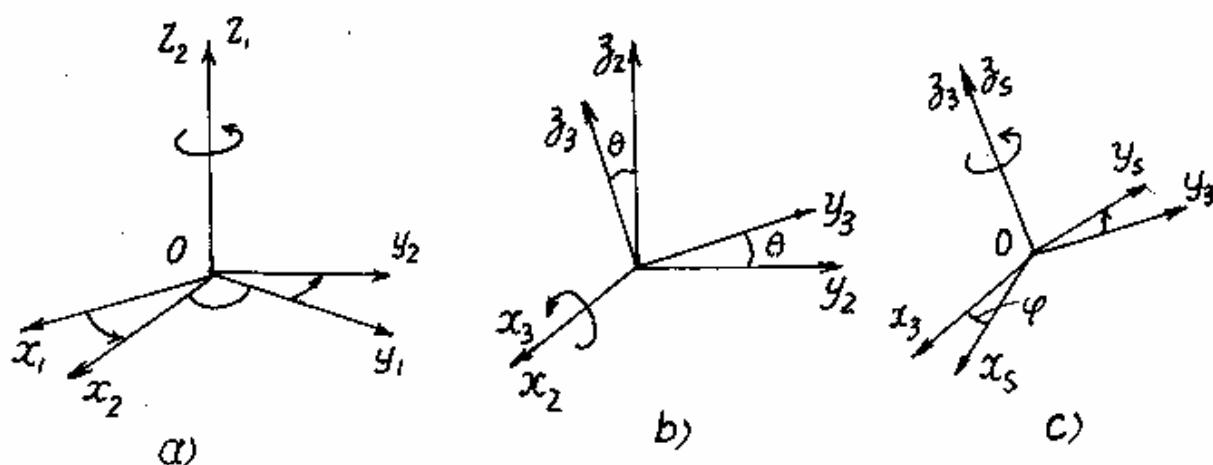
Vấn đề của chúng ta là phải xác định $\vec{\Omega}$.

Ta có nhận xét sau đây : $\vec{\Omega}$ luôn nằm trên trục quay tức thời của vật rắn. Trục quay tức thời đó luôn đi qua O và mặt trục là một mặt cố định nhọn tại O.

a) Các góc Ole (Euler).

Để xác định được $\vec{\Omega}$ chúng ta sử dụng bốn hệ trục tọa độ vuông góc sau đây :

- Hệ trục $Ox_1y_1z_1$ với Oz_1 thẳng đứng (hình 8-9a) ta xem hệ trục này là hệ quy chiếu cố định.



Hình 8-9

- Hệ trục $Ox_2y_2z_2$ với Oz_2 trùng với Oz_1 nhưng xoay đi một góc ψ chung quanh Oz_1 (hình 8-9a). Góc ψ được gọi là góc chương động (precession).

- Hệ trục thứ ba $Ox_3y_3z_3$ có Ox_3 trùng với Ox_2 và là vị trí của $Ox_2y_2z_2$ quay đi chung quanh Ox_3 một góc θ . Góc này được gọi là góc tuế sai (nutation) (hình 8-9b).

- Hệ trục thứ tư là $Ox_sy_sz_s$ được gắn liền với vật rắn và sao cho Oz_s trùng với Oz_3 . Góc φ gồm giữa Ox_3 và Ox_s được gọi là góc quay thực (hình 8-9c).

Ta nhận thấy rằng nếu biết được ba góc ψ , θ và φ thì vị trí của vật rắn là hoàn toàn xác định. Các góc đó được gọi là các góc Ole.

b) Ma trận chuyển đổi

Chúng ta phải tìm các biểu thức tương quan giữa các tọa độ của một điểm M trong vật rắn qua các hệ quy chiếu khác nhau được định bởi ba góc Ole trên đây.

Trước tiên hãy xét các tương quan giữa x_1 , y_1 , z_1 và x_2 , y_2 , z_2 . Vì $Ox_2y_2z_2$ là hệ trục chuyển từ $Ox_1y_1z_1$ bằng phép quay chung quanh Oz_1 , một góc ψ nên các tọa độ $x_1y_1z_1$ và $x_2y_2z_2$ của M tương quan với nhau bởi biểu thức ma trận như sau :

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (8-49)$$

Ma trận

$$A = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8-50)$$

được gọi là ma trận chuyển đổi từ hệ quy chiếu (R_1) với $Ox_1y_1z_1$ sang hệ quay chiếu (R_2) với $Ox_2y_2z_2$. Phép chuyển ngược lại từ (R_2) sang (R_1) ma trận chuyển đổi sẽ có dạng như sau :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8-51)$$

Chú ý : Chỉ có sự di chuyển đối xứng của $-\sin\psi$.

Ta có thể nghiệm ngay được rằng

$$A \cdot A^{-1} = [1] \quad (8-52)$$

Một cách tương tự chúng ta có các ma trận chuyển đổi khác nhau sau.

Trong phép chuyển đổi từ (R_2) sang (R_3) trong phép quay góc θ chung quanh trục Ox_2 ma trận chuyển đổi là :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (8-53)$$

Phép chuyển ngược lại sẽ là :

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (8-54)$$

Các ma trận chuyển đổi từ (R_3) sang (R_s) hoặc ngược lại sẽ là :

$$C = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8-55)$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8-56)$$

Phép chuyển đổi qua nhiều hệ quy chiếu thì ma trận chuyển đổi sẽ là tích của các ma trận chuyển đổi liên tục từ hệ quy

chiếu này sang hệ khác. Ví dụ việc chuyển đổi từ (R_1) sang (R_s) sẽ thực hiện như sau :

$$(R_s) = C.B.A.(R_1) \quad (8-57)$$

Việc làm đó có thể thực hiện từng bước như trong ví dụ mà ta lấy sau đây Ta quay lại công thức (8-48)

Ở đây ta có bốn hệ quy chiếu. Áp dụng luật hợp vận tốc qua các hệ quy chiếu khác nhau ta có thể viết :

$$\vec{v}_{(M)}^{(1)} = \vec{v}_{(M)}^{(3)} + \vec{v}(M)^{(2)}_{(3)} + \vec{v}(M)^{(1)}_{(2)} \quad (8-58)$$

$\vec{v}_{(M)}^{(3)}$ là vận tốc tương đối trong hệ quy chiếu $Ox_3y_3z_3$.

$$\vec{v}(M)^{(3)} = \vec{\Omega}^{(3)} \wedge \vec{OM} \quad (8-59)$$

$\vec{v}(M)^{(2)}_{(3)}$ là tốc độ của (R_3) đối với (R_2)

$$\vec{v}(M)^{(2)}_{(3)} = \vec{\Omega}_{(3)}^{(2)} \wedge \vec{OM} \quad (8-60)$$

$\vec{v}(M)^{(1)}_{(2)}$ là tốc độ của (R_2) so với (R_1) . Ta có :

$$\vec{v}(M)^{(1)}_{(2)} = \vec{\Omega}_{(2)}^{(1)} \wedge \vec{OM} \quad (8-61)$$

Các vectơ vận tốc góc ở trong mỗi hệ quy chiếu là :

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}^{(3)} &= \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{z}_3 \\ \vec{\Omega}_{(3)}^{(2)} &= \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{x}_2 \\ \vec{\Omega}_{(2)}^{(1)} &= \frac{d\psi}{dt} \cdot \vec{z}_1 \end{aligned} \quad (8-62)$$

Trong đó \vec{z}_3 , \vec{x}_2 và \vec{z}_1 là các vectơ đơn vị trên các trục Oz_3 , Ox_2 và Oz_1 (các trục quay). Vậy vận tốc tuyệt đối của M đối với hệ quy chiếu cố định sẽ là :

$$\vec{v}(M)^{(1)} = \left(\frac{d\varphi}{dt} \vec{z}_3 + \frac{d\theta}{dt} \vec{x}_2 + \frac{d\psi}{dt} \cdot \vec{z}_1 \right) \wedge \vec{OM} \quad (8-63)$$

So sánh (8-63) và (8-48) chúng ta có :

$$\vec{\Omega} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{z}_3 + \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{x}_2 + \frac{d\psi}{dt} \cdot \vec{z}_1 \quad (8-64)$$

Trong công thức đó có nhiều hệ quy chiếu khác nhau. Muốn tính được ta phải chuyển về chung một hệ quy chiếu. Thường được đưa về $Ox_1y_1z_1$ hoặc $Ox_sy_sz_s$. Ví dụ ta chuyển về hệ quy chiếu $Ox_sy_sz_s$.

Trong công thức (8-64) ta đã có $\vec{z}_3 = \vec{z}_s$. Vậy ta chỉ còn phải chuyển \vec{x}_2 và \vec{z}_1 về $Ox_sy_sz_s$ chuyển từ (R_2) sang (R_3) .

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad (8-65)$$

Như vậy ta có :

$$\begin{aligned} x_2 &= x_3 \\ y_2 &= \cos\theta \cdot y_3 - \sin\theta \cdot z_3 \\ z_2 &= \sin\theta \cdot y_3 + \cos\theta \cdot z_3 \end{aligned} \quad (8-66)$$

Chuyển tiếp từ (R_3) sang (R_s)

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy : } x_3 &= \cos\varphi \cdot x_s - \sin\varphi \cdot y_s \\ y_3 &= \sin\varphi \cdot x_s + \cos\varphi \cdot y_s \\ z_3 &= z_s \end{aligned} \quad (8-67)$$

Vậy ta có :

$$\vec{x}_2 = \vec{x}_3 = \cos\varphi \cdot \vec{x}_s - \sin\varphi \cdot \vec{y}_s \quad (8-68)$$

Ta chuyển từ \vec{z}_1 sang (R_s)

Trước tiên thực hiện sự chuyển đổi từ (R_1) sang (R_2)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Vậy

$$z_1 = z_2 = \sin\theta y_3 + \cos\theta z_3 \quad (8-69)$$

Thay giá trị của y_3 và z_3 được tính theo (13-67) ta sẽ được :

$$z_1 = \sin\theta[\sin\varphi x_s + \cos\varphi y_s] + \cos\theta.z_s$$

Vậy :

$$\vec{z}_1 = \sin\theta \sin\varphi \cdot \vec{x}_s + \sin\theta \cos\varphi \cdot \vec{y}_s + \cos\theta \cdot \vec{z}_s \quad (8-70)$$

Đem (8-67), (8-68) và (8-70) thay vào (13-64) và sau khi rút gọn ta có :

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} = & \left(\frac{d\theta}{dt} \cos\varphi + \frac{d\psi}{dt} \sin\theta \sin\varphi \right) \vec{x}_s + \\ & + \left(\frac{d\psi}{dt} \sin\theta \cos\varphi - \frac{d\theta}{dt} \sin\varphi \right) \vec{y}_s + \\ & + \left(\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \cos\theta \right) \vec{z}_s \end{aligned} \quad (8-71)$$