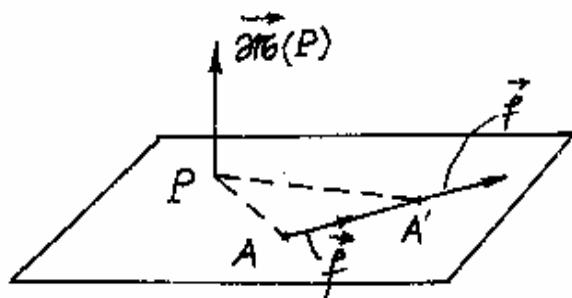


## CHƯƠNG VII

# TOOCXO LỰC

### 7-1. Véc-tơ trượt

*1. Định nghĩa.* Lấy một điểm A trong không gian kết hợp ( $\xi$ ) và một véc-tơ  $\vec{f}$  thuộc E tại A. A và  $\vec{f}$  xác định đường thẳng D đi qua A của ( $\xi$ ). Ta gọi véc-tơ trượt  $(A, \vec{f})$  là bao gồm lớp tương đương của đôi điểm biểu diễn  $\vec{f}$  nằm trên giá D (h. 7-1).



Hình (7-1)

Ta dễ dàng nhận thấy ngay, một trong những đại lượng vật lí mà vectơ trượt tượng trưng là lực. Lực có thể thay đổi điểm đặt trên giá của chúng mà không hề thay đổi tác dụng của lực.

Một cách khái quát hóa, trong chương này ta đề cập đến các vectơ trượt. Nhưng mọi điều chúng ta nói về vectơ trượt cũng đúng với vectơ lực.

#### 2. Mômen của vectơ trượt đối với một điểm

Gọi P là một điểm trong không gian kết hợp ( $\xi$ ). Mômen của  $\vec{f}$  đối với P là vectơ :

$$\vec{M}(P) = \vec{f} \wedge \vec{AP} \quad (\text{hay } \vec{PA} \wedge \vec{f}) \quad (7-1)$$

Định nghĩa đó không phụ thuộc vị trí của A ở trên giá. Thực vậy ví dụ lấy một điểm A' khác A (h.12-1). Theo định nghĩa ta có :

$$\begin{aligned} \vec{M}(P)_{A'} &= \vec{f} \wedge \vec{A'P} = \vec{f} \wedge (\vec{A'A} + \vec{AP}) \\ &= \vec{f} \wedge \vec{AP} + \vec{f} \wedge \vec{A'A} \end{aligned}$$

Vì ràng  $\vec{f} \wedge \vec{A'A} = 0$   
 nên  $\vec{\mathcal{M}}(P)_{A'} = \vec{\mathcal{M}}(P)_A$

3. Xét tương quan giữa hai mômen của  $\vec{f}$  đối với hai điểm  $P, Q$  bất kì trong không gian kết hợp ( $\xi$ )

Theo định nghĩa ta có :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}(Q) &= \vec{f} \wedge \vec{AQ} \\ \text{Nhưng } \vec{AQ} &= \vec{AP} + \vec{PQ} \\ \text{Vậy : } \vec{\mathcal{M}}(Q) &= \vec{f} \wedge (\vec{AP} + \vec{PQ}) = \vec{f} \wedge \vec{AP} + \vec{f} \wedge \vec{PQ} \\ \text{hay : } \vec{\mathcal{M}}(Q) &= \vec{\mathcal{M}}(P) + \vec{f} \wedge \vec{PQ} \end{aligned} \quad (7-2)$$

Vậy trường véc-tơ  $\vec{\mathcal{M}}$  là một trường phản đối xứng. Véc-tơ của trường là  $\vec{f}$ . Tập hợp  $\vec{f}$  và  $\vec{\mathcal{M}}$  tạo thành một toá-cxô. Toá-cxô đó được gọi là *toá-cxô trượt*. Nếu  $\vec{f}$  là một lực thì toá-cxô đó được gọi là *toá-cxô lực*.

Toá-cxô trượt còn thường được gọi là *gò-lis-xô* (glisseur).

## 7-2. Hệ thống véc-tơ trượt

1. *Phần tử rút gọn*. Cho một tập hợp nhiều véc-tơ trượt  $(A_i, \vec{f}_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Gọi phần tử rút gọn của tập hợp đó là hệ vectô với :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i \\ \vec{\mathcal{M}}(Q) = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i \wedge \vec{A_iQ} \end{array} \right. \quad (7-3)$$

Ta hãy xét tương quan giữa  $\vec{F}$  và  $\vec{\mathcal{M}}$  của tập hợp đó.

Tính tổng mômen của  $(A_i, \vec{f}_i)$  đối với P. Theo định nghĩa ta có :

$$\vec{\mathcal{M}}(P) = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i \wedge \vec{A_iP}$$

Nhưng vì

$$\vec{AP} = \vec{AQ} + \vec{QP}$$

nên

$$\vec{\mathcal{M}}(P) = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i \wedge \vec{AQ} + \sum_{i=1}^n \vec{f}_i \wedge \vec{QP}$$

Hay

$$\vec{\mathcal{M}}(P) = \vec{\mathcal{M}}(Q) + \vec{f} \wedge \vec{QP} \quad (7-4)$$

Vậy  $\vec{f}$  và  $\vec{\mathcal{M}}$  lập thành một toocxơ mới, nó là tổng của các toocxơ trượt ( $A_i \vec{f}_i$ ).

*Trường hợp riêng quan trọng*

Khi tổng  $\vec{f} = \vec{0}$  từ (12-4) ta có :

$$\vec{\mathcal{M}}(P) = \vec{\mathcal{M}}(Q) \quad (7-5)$$

Nghĩa là mômen tại mọi điểm là bằng nhau. Ta gọi nhau đó là một trường ngẫu lực đều.

## 2. Phân tích một toocxơ.

Ta có định nghĩa về sự tương đương như sau :

Nếu hai hệ thống véctơ trượt khác nhau có cùng các thành phần rút gọn tại một điểm như nhau thì hai hệ thống véctơ trượt đó là tương đương với nhau. Nói một cách khác khi hai hệ thống véctơ trượt có cùng một toocxơ kết hợp chung thì chúng tương đương. Như vậy để phân tích một toocxơ chúng ta chỉ cần căn cứ vào các thành phần rút gọn  $\vec{f}$  và  $\vec{\mathcal{M}}$  của nó.

Ta xét các trường hợp cụ thể sau đây.

a) Khi biến vô hướng của toocxơ là bằng không.

Sau khi rút gọn ta có điều kiện :

$$J = \vec{f} \cdot \vec{\mathcal{M}}(O) = 0 \quad (7-6)$$

Điều đó chỉ có thể xảy ra trong các trường hợp sau đây :

a)  $\vec{f} = 0$  và  $\vec{\mathcal{M}}(O) = 0$

Như vậy ta có một toocxơ không.

Trường hợp này lại là trường hợp hết sức quan trọng. Nếu các véc-tơ trượt  $\vec{F}$  là các lực thì đây là các điều kiện cân bằng của các lực. Muốn một hệ lực được cân bằng thì toocxơ lực của hệ lực đó phải là một toocxơ không. Nghĩa là phải có một lúc hai điều kiện :

$$\begin{cases} \vec{F} = 0 \\ \vec{M}(O) = 0 \end{cases} \quad (7-7)$$

Sử dụng một hệ trục tọa độ vuông góc trong không gian kết hợp ( $\xi$ ) với  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  là các véc-tơ đơn vị trên các trục tọa độ thì ta có thể viết :

$$\begin{cases} \vec{F} = s_1 \vec{i} + s_2 \vec{j} + s_3 \vec{k} \\ \vec{M} = M_1 \vec{i} + M_2 \vec{j} + M_3 \vec{k} \end{cases} \quad (7-8)$$

( $\vec{M}$  đối với bất cứ điểm nào)

Điều kiện  $\vec{F} = 0$  và  $\vec{M} = 0$  dẫn đến sáu phương trình hình chiếu

$$\begin{array}{ll} s_1 = 0 & M_1 = 0 \\ s_2 = 0 & M_2 = 0 \\ s_3 = 0 & M_3 = 0 \end{array} \quad (7-9)$$

Đó cũng là sáu điều kiện của hệ lực cân bằng.

$\beta)$   $\vec{F} = 0$  và  $\vec{M}(0) \neq 0$

Đó là một trường ngẫu lực đều. Mômen ở mọi nơi là bằng nhau.

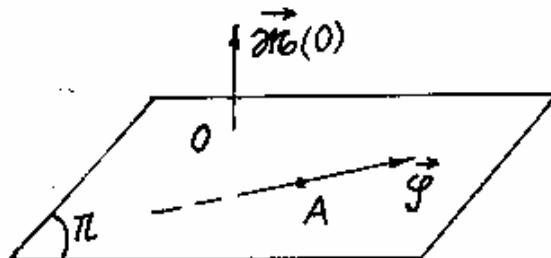
Khi các véc-tơ trượt là các lực thì hệ được thu về thành hai lực song song bằng nhau và ngược chiều nhau.

$\gamma)$   $\vec{F} \neq 0$  và  $\vec{M}(0) = 0$

Hệ thống được thu về thành một véc-tơ trượt đi qua O.

$\eta)$   $\vec{F} \neq 0$  và  $\vec{M}(0) \neq 0$

Vậy  $\vec{F}$  và  $\vec{M}(0)$  phải vuông góc với nhau (h.12-2).



Hình 7-2

Khi đó ta luôn luôn tìm thấy một điểm A sao cho

$$\overrightarrow{OA} \wedge \vec{f} = \vec{M}(O)$$

Từ biểu thức (7-9) ta có :

$$\overrightarrow{OA} = \frac{\vec{f} \wedge \vec{M}(O)}{|\vec{f}|^2} + \lambda \vec{f}$$

Vậy hệ thu gọn về thành một vectơ trượt  $\vec{f}$  tại A.

b) Khi bắt biến vô hướng J của toocxơ là khác không

Giả sử khi thu gọn một hệ thống vectơ trượt về ta được một toocxơ ( $\tau$ ) với các tọa độ tại Q là  $[\vec{f}, \vec{M}(Q)]$  và ta có điều kiện :

$$J = \vec{f} \cdot \vec{M}(Q) \neq 0 \quad (7-10)$$

Khi đó ta có thể tách ( $\tau$ ) thành hai toocxơ ( $\tau_1$ ) và ( $\tau_2$ ). Các toocxơ này có các tọa độ tại Q như sau :

$$(\tau_1)[0, \vec{M}(Q)] \quad (7-11)$$

$$(\tau_2)[\vec{f}, 0] \quad (7-12)$$

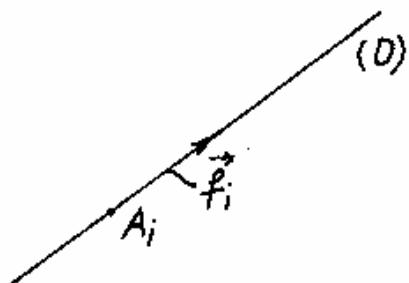
Như vậy ( $\tau_1$ ) là một toocxơ ngẫu lực đều (trường hợp  $\beta$ ) và ( $\tau_2$ ) là một vectơ trượt đi qua Q (glis-xơ) (trường hợp  $\gamma$ )

3. Các trường hợp đặc biệt của các hệ vectơ trượt

a. Khi các vectơ trượt cùng nằm  
trên một giá. (h. 7-3.)

Giả sử các vectơ trượt  $\vec{f}_i$  cùng  
nằm trên giá D.

Hệ tương đương sẽ là một vectơ  
trượt duy nhất nằm trên giá D với



Hình 7-3

$$\vec{f} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i \quad (7-13)$$

Điểm đặt của  $\vec{f}$  là một điểm P bất kì trên D.

b) Các véctơ trượt có giá đồng quy tại một điểm. (h. 7-4)

Giả sử O là điểm đồng quy của các giá. Trên hình vẽ (h. 7-4) ta vẽ hai giá thứ i và j nào đó của hệ.

Các phần tử rút gọn tại O của hệ là :

$$\vec{f} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i \quad (7-14)$$

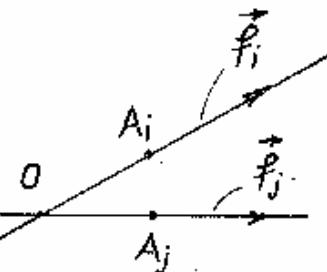
$$\vec{M}(O) = 0$$

Như vậy hệ tương đương với một véctơ trượt duy nhất qua O.

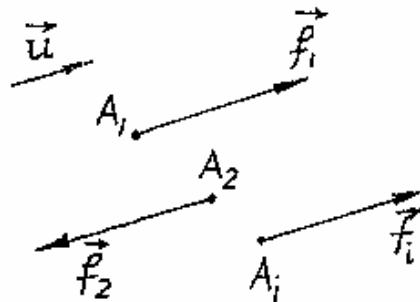
c) Hệ các véctơ trượt song song

Gọi  $\vec{u}$  là vectơ đơn vị song song với các véctơ trượt  $\vec{f}_i$  (h. 7-4).

Vectơ tổng sẽ là :



Hình 7-4



Hình 7-5

$$\vec{f} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i = \vec{u} \cdot \sum_{i=1}^n f_i \quad (7-15)$$

\* Nếu

$$\sum_{i=1}^n f_i = 0 \quad (7-16)$$

thì ta có hai khả năng.

a) Nếu tổng mômen của hệ đối với một điểm nào đó là bằng không

$$\vec{M}(O) = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i \wedge \vec{A}_i O = 0 \quad (7-17)$$

Ta suy ra mômen ở mọi nơi là bằng không và ta có một тоocxơ không.

$\beta)$  Nếu tổng mômen của hệ đối với một điểm nào đó là khác không

$$\vec{M}(O) = \sum_{i=1}^n f_i \wedge \vec{A}_i O \neq 0 \quad (7-18)$$

Khi đó mômen ở mọi điểm là như nhau, ta có một trường ngẫu lực đều.

\* Nếu

$$\sum_{i=1}^n f_i = 0 \quad (7-19)$$

Khi đó trị số mômen tại O sẽ là :

$$\vec{M}(O) = \sum_{i=1}^n f_i \wedge \vec{A}_i O \quad (7-20)$$

Có thể viết (12-20) lại dưới dạng :

$$\vec{M}(O) = \sum_{i=1}^n f_i (\vec{u} \wedge \vec{A}_i O) = \sum_{i=1}^n f_i \vec{OA}_i \wedge \vec{u} \quad (7-21)$$

Vì  $\sum_{i=1}^n f_i$  là khác không nên ta luôn luôn tìm thấy một điểm

G sao cho :

$$\vec{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \vec{OA}_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \quad (7-22)$$

Từ đó ta có :

$$\vec{M}(O) = [\vec{OG}, \sum_{i=1}^n f_i] \wedge \vec{u} = \vec{OG} \wedge \vec{f} \quad (7-23)$$

Hệ có thể thu gọn về một vectơ trượt duy nhất  $\vec{F}$  đi qua G. Ta dễ dàng nhận thấy rằng nếu  $f_i$  là các lực song song thì công thức (7-22) cho phép ta xác định được tọa độ của hợp lực của những lực song song đó.

Cũng trong công thức (7-22) ta chú ý rằng  $f_i$  là số đo vô hướng của  $\vec{f}_i$  (độ lớn của  $\vec{f}_i$ ). Như vậy  $f_i$  phụ thuộc vào điểm đặt lực  $A_i$  vì mỗi điểm tương ứng với một lực. Vậy nếu xem  $f_i = m_i$  ( $m_i$  là một khối lượng nào đó) thì (7-22) được viết lại như sau :

$$\sum_{i=1}^n f_i \vec{OA}_i - \sum_{i=1}^n f_i \cdot \vec{OG} = 0$$

hay  $\sum_{i=1}^n f_i \vec{GA}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{GA}_i = 0 \quad (7-24)$

Theo định nghĩa G là trung điểm của hệ khối lượng  $m_i$ . Trong trường hợp một vật thể rắn thì (7-24) được viết lại dưới dạng :

$$\int_V \vec{GA}_i \cdot \rho_i dV = 0 \quad (7-25)$$

V là thể tích của vật rắn  $dV$  là vi phân thể tích tại  $A_i$  và  $\rho_i$  là khối lượng riêng tại  $A_i$ .

Khi do (7-22) trở thành công thức để xác định vị trí trung điểm của hệ. Khi hệ nằm trong một trọng trường thì trung điểm đó là trọng tâm của hệ. Cũng có thể sử dụng (7-22) để xác định trọng tâm của một hệ phẳng (một diện tích phẳng). Tương tự như hệ phẳng hay diện tích đó đặt vuông góc với phương của trọng trường Oz. Các trục Ox, Oy nằm trong mặt phẳng của hệ. Kí hiệu diện tích phẳng là S. Tại  $A_i$  ta có vi phân diện tích  $dS$ . Xem trọng lượng riêng của S là như nhau ở mọi nơi. Công thức (7-22) sẽ được viết lại dưới dạng :

$$\vec{OG} = \frac{\int_S \vec{OA}_i \cdot dS}{S} \quad (7-26)$$

Chiếu xuống các trục tọa độ ta được các phương trình đại số để xác định tọa độ trọng tâm G của hệ phẳng.

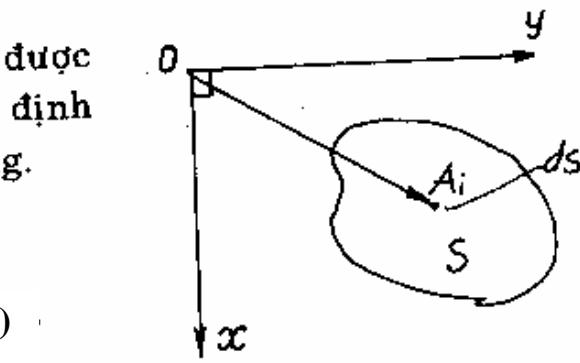
$$\left. \begin{aligned} X_G &= \frac{\int x dS}{S} \\ Y_G &= \frac{\int y dS}{S} \end{aligned} \right\} \quad (7-27)$$

trong đó x, y là tọa độ của  $A_i$ .

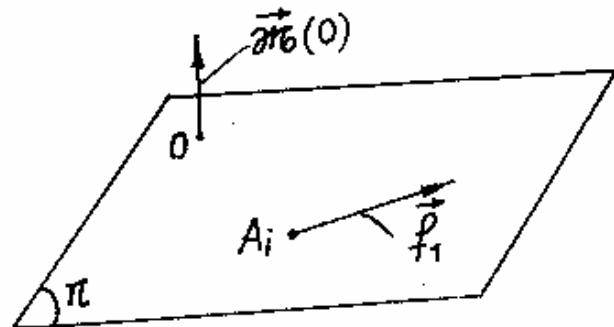
Các tích phân ở tử số (7-27) được gọi là các mômen tĩnh của diện tích đối với các trục Oy và Ox.

d. Hệ véctơ trượt đồng phẳng. (h. 7-7)

Ta gọi  $\vec{f}_i$  là đồng phẳng khi mọi điểm  $A_i$  nằm trong mặt phẳng ( $\pi$ ) và  $\vec{f}_i$  là các véctơ song song với ( $\pi$ ). Khi đó các véctơ mômen phải vuông góc với  $\pi$ .



Hình 7-6



Hình 7-7

Nếu  $\vec{f} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i$  là bằng không và  $\vec{M}(O)$  là khác không thì hệ tương đương với trường ngẫu lực đều. Hệ được thu về hai véctơ trượt trong  $\pi$  song song và ngược chiều.

Nếu  $\vec{f}$  là khác không thì tích vô hướng

$$J = \vec{f} \cdot \vec{M}(O) = 0$$

Hệ có thể đưa về một véctơ trượt duy nhất có điểm đặt P trên đường :

$$\vec{OP} = \frac{\vec{f} \wedge \vec{M}(O)}{|\vec{f}|^2} + \lambda \vec{f} \quad (7-28)$$

e. Điều kiện cần để ba véc-tơ trượt tạo thành một toóc-xơ không.

Giả sử có hệ ba véc-tơ trượt  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$  với các điểm đặt  $A_1 A_2 A_3$  (h. 7-8). Ta tìm điều kiện để ba véc-tơ đó tạo thành một toóc-xơ không.

Nghĩa là ta phải có hai điều kiện.

1.  $\vec{f}_3$  phải triệt tiêu

Hình 7-8

2.  $\vec{f}_1$  cũng phải triệt tiêu

Ta hãy xét điều kiện  $\vec{f}_1$  phải triệt tiêu.

Chọn ngay điểm  $A_3$  để thu gọn mô-men về đó.

Ta có :

$$\vec{M}(A_3) = \vec{f}_1 \wedge \vec{A}_1\vec{A}_3 + \vec{f}_2 \wedge \vec{A}_2\vec{A}_3 = 0 \quad (7-29)$$

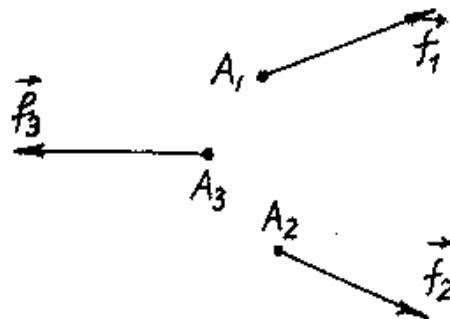
$\vec{f}_3$  đã đi qua  $A_3$  nên mô-men của nó là bằng không. Điều kiện (12-29) nói lên rằng các mô-men do  $\vec{f}_1$  và  $\vec{f}_2$  gây nên phải thẳng hàng. Mô-men  $\vec{f}_1 \wedge \vec{A}_1\vec{A}_3$  phải vuông góc với mặt phẳng tạo bởi  $A_3$  và  $\vec{f}_1$ . Mô-men  $\vec{f}_2 \wedge \vec{A}_2\vec{A}_3$  phải vuông góc với mặt phẳng tạo bởi  $\vec{f}_2$  và  $A_3$ . Nếu hai mô-men đó phải thẳng hàng có nghĩa là mặt phẳng  $(\vec{f}_1, A_3)$ , phải trùng với mặt phẳng  $(\vec{f}_2, A_3)$ .

Các véc-tơ  $\vec{f}_1$  và  $\vec{f}_2$  phải nằm trong mặt phẳng  $A_1 A_2 A_3$ .

Với điều kiện thứ hai. Ta phải có :

$$\sum_{i=1}^3 \vec{f}_i = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 = 0 \quad (7-30)$$

Điều kiện này cho ta kết luận rằng  $\vec{f}_3$  cũng phải nằm trong mặt phẳng  $A_1 A_2 A_3$ . Có thể xảy ra hai khả năng.



$\alpha)$   $\vec{f}_1$  và  $\vec{f}_2$  có phương giao nhau tại một điểm trong mặt phẳng  $A_1A_2A_3$ . Vậy  $\vec{f}_3$  cũng phải qua điểm đó để cân bằng với tổng của  $\vec{f}_1$  và  $\vec{f}_2$ .

$\beta)$   $\vec{f}_1$  và  $\vec{f}_2$  song song với nhau. Như vậy  $\vec{f}_3$  cũng phải song song với chúng. Ta có hệ ba véctơ trượt song song đồng phẳng.  $\vec{f}_3$  phải có giá trị bằng tổng của  $\vec{f}_1$  và  $\vec{f}_2$  và phải có chiều ngược lại.

*Kết luận.* Để một hệ ba véctơ trượt tạo nên một toocxơ không là ba véctơ phải đồng phẳng và phải có

$$\vec{r} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 = \vec{0}$$

Xem  $\vec{f}_i$  là các lực thì các điều kiện trên cũng là điều kiện để ba lực cân bằng.