

PHẦN II

TOOCXO

CHƯƠNG VI

ĐỊNH NGHĨA TOOCXO

6-1. Phép chia hữu hướng

Cho hai véctơ \vec{a} và \vec{p} trong không gian véctơ E ba chiều. Tìm một véctơ \vec{u} trong không gian đó để sao cho

$$\vec{u} \wedge \vec{a} = \vec{p} \quad (6-1)$$

Nếu tồn tại một véctơ \vec{u} như vậy thì ta nói rằng \vec{u} là kết quả của phép chia hữu hướng giữa \vec{p} và \vec{a} .

Bất luận véctơ \vec{u} như thế nào ta luôn luôn có

$$\vec{a} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{p} = 0 \quad (6-2)$$

Vậy nếu $\vec{a} \cdot \vec{p} \neq 0$ thì phương trình (6-1) không có nghiệm.

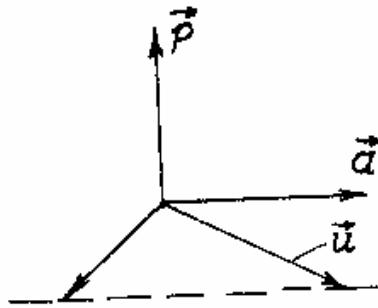
Ta hãy xét những khả năng để tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{p} = 0$. Có thể có hai khả năng

1 - Véctơ \vec{a} hoặc \vec{p} là bằng không. Khi đó \vec{u} là bất kì. Mọi véctơ của không gian E là nghiệm của (6-1)

2 - Cả hai véctơ \vec{a} và \vec{p} là khác không. Như vậy chỉ còn lại một khả năng duy nhất để tích $\vec{a} \cdot \vec{p} = 0$ là khi hai véctơ trực giao.

Ta hãy xét trường hợp cuối cùng này.

Gọi \vec{u}_o là một nghiệm riêng của (6-1) \vec{u}_o phải vuông góc với \vec{a} và \vec{p} và tạo với \vec{a} và \vec{p} một tam diện thuận (Hình 6-1).



Ta có :

$$\vec{u}_o \wedge \vec{a} = \vec{p} \quad (6-3)$$

Hình 6-1.

Nhân hữu hướng cả hai vế với \vec{a} ta có :

$$\vec{a} \wedge (\vec{u}_o \wedge \vec{a}) = \vec{a} \wedge \vec{p} \quad (6-4)$$

Khai triển vế trái ta có :

$$(\vec{a} \cdot \vec{a}) \vec{u}_o - (\vec{a} \cdot \vec{u}_o) \vec{a} = \vec{a} \wedge \vec{p} \quad (6-5)$$

Vậy :

$$\vec{a}^2 \cdot \vec{u}_o = \vec{a} \wedge \vec{p}$$

Do đó :

$$\vec{u}_o = \frac{\vec{a} \wedge \vec{p}}{\vec{a}^2} \quad (6-6)$$

Thực hiện một phép trừ vế với vế giữa (11-1) và (11-3) ta có :

$$(\vec{u} - \vec{u}_o) \wedge \vec{a} = 0 \quad (6-7)$$

Nghĩa là vectơ $\vec{u} - \vec{u}_o = \lambda \vec{a}$ (11-8)

λ là một số vô hướng nào đó. Vậy nghiệm tổng quát \vec{u} là :

$$\vec{u} = \vec{u}_o + \lambda \vec{a} \quad (6-8)$$

Hay :

$$\vec{u} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{p}}{\vec{a}^2} + \lambda \vec{a} \quad (6-9)$$

\vec{u} được biểu diễn như trên hình 11-1.

6-2. Phép ánh xạ phản đối xứng

1. *Định nghĩa.* Ta gọi \mathcal{L} là phép ánh xạ của không gian véctơ E và ở trong không gian đó. Nghĩa là \mathcal{L} tác dụng vào một véctơ trong không gian E sẽ cho ta một véctơ cũng thuộc về không gian đó. Không gian véctơ E luôn được kết hợp với một không gian affine (ξ). Nếu ta chọn trong (ξ) một hệ trục tọa độ thì mọi véctơ của E đều được xác định trong hệ tọa độ đó.

Cho một véctơ \vec{a} trong không gian E . Phép ánh xạ \mathcal{L} tác dụng lên \vec{a} cho ta véctơ $\mathcal{L}(\vec{a})$ cũng nằm trong E . Phép ánh xạ \mathcal{L} được gọi là phản đối xứng khi nó tác dụng lên hai véctơ bất kì \vec{a} và \vec{b} của E thì ta có điều kiện sau đây :

$$\vec{a} \cdot \mathcal{L}(\vec{b}) = -\vec{b} \cdot \mathcal{L}(\vec{a}) \quad (6-10)$$

2. Tính chất của phép ánh xạ phản đối xứng

\mathcal{L} là một phép ánh xạ tuyến tính. Thực vậy, cho hai véctơ \vec{a}_1 và \vec{a}_2 trong E và α_1, α_2 là hai số thực nào đó. Ta luôn luôn có thể biểu diễn một vectơ \vec{a} qua \vec{a}_1 và \vec{a}_2 bởi biểu thức :

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 \quad (6-11)$$

Theo định nghĩa (6-10) ta có thể viết :

$$(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2) \cdot \mathcal{L}(\vec{b}) = -\vec{b} \cdot \mathcal{L}(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2) \quad (6-12)$$

Ta có thể khai triển vế trái được :

$$\vec{a}_1 \vec{a}_1 \cdot \mathcal{L}(\vec{b}) + \alpha_2 \vec{a}_2 \cdot \mathcal{L}(\vec{b}) = -\vec{b} \cdot \mathcal{L}(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2) \quad (6-13)$$

Nhưng cũng từ (6-10) các số hạng của vế trái (6-13) được viết lại như sau :

$$\vec{a}_1 \vec{a}_1 \cdot \mathcal{L}(\vec{b}) = -\vec{b} \cdot \mathcal{L}(\alpha_1 \vec{a}_1) \quad (6-14)$$

$$\alpha_2 \vec{a}_2 \cdot \mathcal{L}(\vec{b}) = -\vec{b} \cdot \mathcal{L}(\alpha_2 \vec{a}_2)$$

Đem thay (6-14) vào (6-13) ta có :

$$-\vec{b} \cdot \mathcal{L}(\alpha_1 \vec{a}_1) + \mathcal{L}(\alpha_2 \vec{a}_2)] = -\vec{b} \cdot \mathcal{L}(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2) \quad (6-15)$$

Biểu thức đó luôn luôn đúng dù \vec{b} như thế nào, vậy ta có :

$$\mathcal{L}(\alpha_1 \vec{a}_1) + \mathcal{L}(\alpha_2 \vec{a}_2) = \mathcal{L}(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2) \quad (6-16)$$

(6-16) chứng tỏ rằng \mathcal{L} là một phép ánh xạ tuyến tính.

3. Biểu thức giải thích của \mathcal{L} trong một hệ nền trực giao

Xác định một hệ trục tọa độ Oxyz trong không gian ba chiều (ξ). Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị trên hệ trục tọa độ vuông góc Oxyz đó. Biểu thức của \mathcal{L} là một ma trận L với chín thành phần mà ta phải xác định.

$$L = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \quad (6-17)$$

Cho \mathcal{L} tác dụng lên các vectơ đơn vị của nền.

Vectơ $\vec{\mathcal{L}(i)}$ sẽ có các thành phần là :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{bmatrix}$$

Như vậy :

$$\mathcal{L}(\vec{i}) = \alpha_{11} \vec{i} + \alpha_{21} \vec{j} + \alpha_{31} \vec{k} \quad (6-18)$$

Một cách tương tự ta sẽ tìm thấy :

$$\mathcal{L}(\vec{j}) = \alpha_{12} \vec{i} + \alpha_{22} \vec{j} + \alpha_{32} \vec{k} \quad (6-19)$$

$$\mathcal{L}(\vec{k}) = \alpha_{13} \vec{i} + \alpha_{23} \vec{j} + \alpha_{33} \vec{k} \quad (6-20)$$

Vì \mathcal{L} là phép ánh xạ phản đối xứng nên theo (6-10) ta phải có :

$$\vec{i} \cdot \mathcal{L}(\vec{i}) = -\vec{i} \cdot \mathcal{L}(\vec{i}) \quad (6-21)$$

$$\vec{j} \cdot \mathcal{L}(\vec{j}) = -\vec{j} \cdot \mathcal{L}(\vec{j})$$

$$\vec{k} \cdot \mathcal{L}(\vec{k}) = -\vec{k} \cdot \mathcal{L}(\vec{k})$$

Nhưng $\vec{i} \cdot \mathcal{L}(\vec{i}) = \alpha_{11}$, $\vec{j} \cdot \mathcal{L}(\vec{j}) = \alpha_{22}$ và $\vec{k} \cdot \mathcal{L}(\vec{k}) = \alpha_{33}$.

Biểu thức (6-21) nói rằng :

$$\alpha_{11} = -\alpha_{11}, \alpha_{22} = -\alpha_{22}, \alpha_{33} = -\alpha_{33}$$

Điều đó có nghĩa là $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 0$.

Các thành phần không nằm trên đường tréo chính được cho bởi các tích vô hướng giữa các vectơ đơn vị và các vectơ ánh xạ của chúng. Ta có :

$$\vec{i} \cdot \vec{\mathcal{L}}(\vec{j}) = \alpha_{12}$$

$$\vec{j} \cdot \vec{\mathcal{L}}(\vec{i}) = \alpha_{21}$$

và vì rằng $\vec{i} \cdot \vec{\mathcal{L}}(\vec{j}) = -\vec{j} \cdot \vec{\mathcal{L}}(\vec{i})$ nên $\alpha_{12} = -\alpha_{21}$

Tương tự ta tìm thấy : $\alpha_{13} = -\alpha_{31}, \alpha_{23} = -\alpha_{32}$

Đặt $s_1 = \alpha_{32}, s_2 = \alpha_{13}, s_3 = \alpha_{21}$ ta sẽ có ma trận L như sau :

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6-22)$$

Gọi \vec{a}' là vectơ ánh xạ của \vec{a} qua $\vec{\mathcal{L}}$

$$\vec{a}' = \vec{\mathcal{L}}(\vec{a})$$

Các thành phần của \vec{a}' được xác định bởi các biểu thức :

$$\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 s_2 - a_2 s_3 \\ a_1 s_3 - a_3 s_1 \\ a_2 s_1 - a_1 s_2 \end{bmatrix} \quad (6-22)$$

Vậy có thể viết :

$$\vec{a}' = (a_3 s_2 - a_2 s_3) \vec{i} + (a_1 s_3 - a_3 s_1) \vec{j} + (a_2 s_1 - a_1 s_2) \vec{k} \quad (6-23)$$

Nếu đặt \vec{S} là một vectơ với các thành phần là s_1, s_2, s_3

$$\vec{f} = s_1 \vec{i} + s_2 \vec{j} + s_3 \vec{k} \quad (6-24)$$

Thì ta dễ nhận ra rằng

$$\vec{a}' = \vec{f} \wedge \vec{a} \quad (6-25)$$

\vec{g} được gọi là vectơ của phép ánh xạ phản đối xứng \mathcal{L}

Chú ý. Chúng ta luôn luôn có biểu thức sau :

$$\vec{a} \cdot \mathcal{L}(\vec{a}) = 0 \quad (6-26)$$

Thực vậy, vì

$$\vec{a} \cdot \mathcal{L}(\vec{a}) = -\vec{a} \cdot \mathcal{L}(\vec{a})$$

do đó

$$\vec{a} \cdot \mathcal{L}(\vec{a}) = 0$$

Ta cũng có thể suy luận theo một cách khác sau đây :

Vì :

$$\mathcal{L}(\vec{a}) = \vec{g} \wedge \vec{a} \text{ Vậy : } \vec{a} \cdot \mathcal{L}(\vec{a}) = \vec{a} \cdot (\vec{g} \wedge \vec{a}) = 0$$

6-3. Trường phản đối xứng

1. Định nghĩa. Một trường vectơ xác định bởi phép ánh xạ $\vec{a}(M)$ là trường mà với mỗi điểm M của (ξ) được kết hợp bằng một vectơ \vec{a} của E.

Cho hai điểm M và P của không gian (ξ). Ta có hai vectơ tương ứng $\vec{a}(M)$ và $\vec{a}(P)$ của E. Ta định nghĩa một trường phản đối xứng là khi trong trường đó có một phép ánh xạ phản đối xứng \mathcal{L} sao cho tương quan giữa $\vec{a}(M)$ và $\vec{a}(P)$ là như sau :

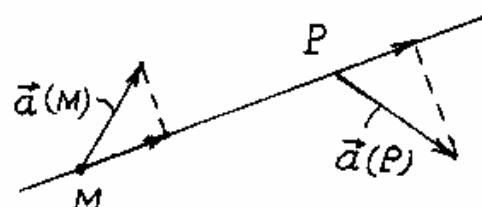
$$\vec{a}(M) = \vec{a}(P) + \mathcal{L}(\vec{PM}) \quad (6-27)$$

Nếu \vec{S} là vectơ của phép ánh xạ \mathcal{L} thì biểu thức (6-27) được viết lại như sau :

$$\vec{a}(M) = \vec{a}(P) + \vec{g} \wedge \vec{PM} \quad (6-28)$$

Khi đó \vec{g} cũng được gọi là vectơ của trường phản đối xứng.

2. Tính chất. Một trường phản đối xứng là một trường đẳng chiếu. Nghĩa là hình chiếu của các vectơ $\vec{a}(M)$ và $\vec{a}(P)$ lên đường MP là bằng nhau. (H. 6-2).



Hình 6-2

Thực vậy, ta đem nhân cả hai vế của (6-28) với \vec{PM} , ta có :

$$\vec{PM} \cdot \vec{a}(M) = \vec{PM} \cdot \vec{a}(P) + \vec{PM}(\vec{g} \wedge \vec{PM}) \quad (6-29)$$

Số hạng cuối cùng của (6-29) là bằng không. Vậy ta có :

$$\vec{PM} \cdot \vec{a}(M) = \vec{PM} \cdot \vec{a}(P) \quad (6-30)$$

Đem chia cả hai vế cho \vec{PM} thì ta có hai hình chiếu của $\vec{a}(M)$ và $\vec{a}(P)$ lên PM . Hai hình chiếu đó bằng nhau.

Ta cũng dễ dàng chứng minh điều ngược lại : *Một trường đẳng chiếu là một trường phản đối xứng.*

6-4. Toocxø

1. *Định nghĩa.* Ta gọi toocxø (τ) là tập hợp tất cả các véctơ \vec{M} của trường phản đối xứng và vectơ \vec{g} của trường đó. \vec{M} được gọi là mômen của (τ) và \vec{g} được gọi là véctơ của trường hay là véctơ của toocxø.

Ta nhận thấy rằng nếu biết \vec{M} tại một điểm nào đó của trường ví dụ tại điểm 0 chẳng hạn, ta sẽ kí hiệu nó là $\vec{M}(0)$ và biết được \vec{g} thì mọi \vec{M} của trường là được xác định. Thực vậy, mômen \vec{M} tại một điểm P nào đó sẽ là :

$$\vec{M}(P) = \vec{M}(0) + \vec{g} \wedge \vec{OP} \quad (6-31)$$

\vec{S} và $\vec{M}(0)$ được gọi là các tọa độ tại 0 của toocxø (τ) và viết :

$$(\tau)[\vec{g}, \vec{M}(0)]$$

Ta cũng nhận thấy \vec{g} là không thay đổi nhưng các véctơ \vec{M} là phụ thuộc vào các điểm của không gian kết hợp (ξ).

2. Tính chất của toocxø

a. *Hai toocxø bằng nhau* : Để có hai toocxø bằng nhau điều kiện cần và đủ là chúng phải có cùng véctơ \vec{g} và có cùng một mômen tại một điểm bất kì trong không gian kết hợp (ξ).

Ví dụ ta có :

$$(\tau_1)[\vec{g}_1, \vec{M}_1(0)] \text{ và } (\tau_2)[\vec{g}_2, \vec{M}_2(0)] \quad (6-32)$$

để (τ_1) và (τ_2) bằng nhau ta phải có :

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{F}}_1 = \vec{\mathcal{F}}_2 \\ \vec{\mathcal{M}}_1(0) = \vec{\mathcal{M}}_2(0) \end{cases} \quad (6-33)$$

b. *Tổng của hai toocxσ*. Tổng của hai toocxσ là một toocxσ mà véctơ của nó là tổng các véctơ thành phần và tại một điểm nào đó mômen của nó là tổng của các mômen thành phần.

Ví dụ với các toocxσ (τ_1) và (τ_2) (6-32). Toocxσ tổng sẽ là :

$$(\tau) = (\tau_1) + (\tau_2)$$

Tọa độ của τ tại O là :

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{F}} = \vec{\mathcal{F}}_1 + \vec{\mathcal{F}}_2 \\ \vec{\mathcal{M}}(0) = \vec{\mathcal{M}}_1(0) + \vec{\mathcal{M}}_2(0) \end{cases} \quad (6-34)$$

c. *Phép nhân với một véc tơ*

Gọi α là một hằng số bất kì, tích của α với toocxσ (τ) là một toocxσ mà :

$$\begin{aligned} &\text{véctơ của nó là } \alpha \vec{\mathcal{F}} \\ &\text{mômen của nó là } \alpha \cdot \vec{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

Ví dụ với toocxσ (τ_1) . Đem nhân (τ_1) với α ta có (τ) với :

$$(\tau) = \alpha(\tau_1) \quad [\alpha \vec{\mathcal{F}}_1, \alpha \vec{\mathcal{M}}_1(0)] \quad (6-35)$$

d. *Toócxσ không*

Một toocxσ không là một toocxσ mà mômen của nó ở mọi điểm trong (ξ) là bằng không và $\vec{\mathcal{F}}$ là một vectơ không. Để đạt được điều đó điều kiện cần và đủ là $\vec{\mathcal{F}} = \vec{0}$ và tồn tại một điểm mà tại đó $\vec{\mathcal{M}}$ cũng bằng không.

e. *Bất biến vô hướng của một toócxσ*.

Cho toocxσ (τ) với các tọa độ tại hai điểm 0 và $0'$ như sau :

$$[\vec{\mathcal{F}}, \vec{\mathcal{M}}(0)] \text{ và } [\vec{\mathcal{F}}, \vec{\mathcal{M}}(0')]$$

Ta hãy so sánh hai tích vô hướng sau đây :

$$J = \vec{F} \cdot \vec{M}(0) \text{ và } J' = \vec{F} \cdot \vec{M}(0')$$

Theo định nghĩa ta có tương quan giữa $\vec{M}(0)$ và $\vec{M}(0')$ như sau :

$$\vec{M}(0') = \vec{M}(0) + \vec{F} \wedge \vec{OO'}$$

Vậy

$$J' = \vec{F} \cdot [\vec{M}(0) + \vec{F} \wedge \vec{OO'}] = \vec{F} \cdot \vec{M}(0) + \vec{F} \cdot (\vec{F} \wedge \vec{OO'})$$

Số hạng cuối cùng của vế phải là bằng không vậy ta có :

$$J' = \vec{F} \cdot \vec{M}(0) = J \quad (6-36)$$

Như vậy tích $J = \vec{F} \cdot \vec{M}(0)$ không phụ thuộc vào điểm 0. Trị số đó được gọi là bất biến vô hướng của toocxσ (τ).

f. Tích của hai toocxσ. (còn được gọi là cōmōmen của hai toocxσ).

Cho hai toocxσ (τ_1) và (τ_2) với các tọa độ tại 0 như sau :

$$(\tau_1)[\vec{F}_1, \vec{M}_1(0)]$$

$$(\tau_2)[\vec{F}_2, \vec{M}_2(0)]$$

Theo định nghĩa tích của hai toocxσ (τ_1) và (τ_2) là số thực $R(0)$ được xác định như sau :

$$R(0) = \vec{F}_1 \vec{M}_2(0) + \vec{F}_2 \vec{M}_1(0) \quad (6-37)$$

Ta viết

$$R(0) = (C_1) \cdot (C_2) \quad (6-38)$$

Ta sẽ chứng minh rằng $R(0)$ không phụ thuộc vào điểm 0.

Thực vậy giả sử ta lấy một 0' khác 0 và tính $R(0')$. Theo định nghĩa ta có :

$$R(0') = \vec{F}_1 \cdot \vec{M}_2(0') + \vec{F}_2 \cdot \vec{M}_1(0') \quad (6-39)$$

Nhưng như ta có :

$$\vec{M}(0') = \vec{M}_2(0) + \vec{F}_2 \wedge \vec{OO'} \quad (6-40)$$

$$\vec{M}_1(0') = \vec{M}_1(0) + \vec{F}_1 \wedge \vec{OO'}$$

Đem (6-40) thay vào (6-39) ta được :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(0') &= \vec{\mathcal{G}}_1 \cdot \vec{\mathcal{M}}_2(0) + \vec{\mathcal{G}}_2 \cdot \vec{\mathcal{M}}_1(0) + \\ &+ \vec{\mathcal{G}}_1 \cdot (\vec{\mathcal{G}}_2 \wedge \vec{OO'}) + \vec{\mathcal{G}}_2 \cdot (\vec{\mathcal{G}}_1 \wedge \vec{OO'}) \end{aligned} \quad (6-41)$$

Hai số hạng cuối của (11-41) triệt tiêu lẫn nhau do đó ta có :

$$\mathcal{P}(0') = \vec{\mathcal{G}}_1 \cdot \vec{\mathcal{M}}_2(0) + \vec{\mathcal{G}}_2 \cdot \vec{\mathcal{M}}_1(0) = \mathcal{P}(0)$$

$$\text{Vậy } \mathcal{P}(0') = \mathcal{P}(0) \quad (6-41)$$

Cômômen của hai toocxσ không phụ thuộc vào điểm chọn để tính.

g. Đạo hàm của toocxσ

Cho toocxσ (t) được xác định bởi véctơ \vec{p} và mômen \vec{K}_o tại O. \vec{p} và \vec{K} là các hàm số đối với thời gian t. Ta có thể viết :

$$(\tau)[\vec{p}(t), \vec{K}_o(t)] \quad (6-42)$$

Tọa độ của (τ) tại O' là

$$(\tau)[\vec{p}(t), \vec{K}_{o'}(t)] \quad (6-43)$$

Theo định nghĩa tương quan giữa \vec{K}_o và $\vec{K}_{o'}$ là :

$$\vec{K}_{o'} = \vec{K}_o + \vec{p}(t) \wedge \vec{OO'} \quad (6-44)$$

Tính đạo hàm của (11-44) ta có :

$$\frac{d}{dt} \vec{K}_{o'} = \frac{d}{dt} \vec{K}_o + \frac{d\vec{p}}{dt} \wedge \vec{OO'} + \vec{p} \wedge \frac{d\vec{OO'}}{dt} \quad (6-45)$$

Vì rằng $\vec{OO'}$ là hằng số đối với thời gian vậy $\frac{d\vec{OO'}}{dt} = 0$. Do đó (11-45) được viết lại như sau :

$$\frac{d}{dt} \vec{K}_{o'} = \frac{d}{dt} \vec{K}_o + \frac{d\vec{p}}{dt} \wedge \vec{OO'} \quad (6-46)$$

Biểu thức đó cho ta thấy các đạo hàm $\frac{d\vec{K}_o}{dt}$ và $\frac{d\vec{K}_o}{dt}$ tương quan với nhau như tương quan của hai mômen trong toocxơ với vectơ là $\frac{d\vec{p}}{dt}$. Như vậy $\frac{d\vec{p}}{dt}$ và $\frac{d\vec{K}}{dt}$ cũng thành lập một toocxơ và toocxơ đó là đạo hàm của (t). Ta có thể viết :

$$\frac{d}{dt}(\tau) = \left[\frac{d\vec{p}}{dt}, \frac{d\vec{K}_o}{dt} \right] \quad (6-47)$$

3. Trục trung tâm của một toócxo

Cho toócxo (τ) với vectơ \vec{g} và bất biến J là khác 0. Tìm quỹ tích của các điểm P trong (ξ) sao cho $\vec{M}(P)$ là song song với \vec{g} .

Giả sử tọa độ của (τ) tại O là $[\vec{g}, \vec{M}(0)]$.

Mômen tại P của (τ) là :

$$\vec{M}(P) = \vec{M}(0) + \vec{g} \wedge \vec{OP} \quad (6-48)$$

Theo giả thiết $\vec{M}(P)$ phải song song với \vec{g} nghĩa là :

$$\vec{M}(P) = \alpha \vec{g} \quad (6-49)$$

trong đó α là một hằng số nào đó. Kết hợp (6-48) và (6-49) ta có thể viết :

$$\vec{M}(0) + \vec{g} \wedge \vec{OP} = \alpha \vec{g} \quad (6-50)$$

Hay :

$$\vec{OP} \wedge \vec{g} = \vec{M}(0) - \alpha \vec{g} \quad (6-51)$$

Vậy \vec{OP} là thương của phép chia hữu hướng giữa $\vec{M}(0) - \alpha \vec{g}$ và \vec{g} . Phép chia đó chỉ có thể thực hiện được khi :

$$\vec{g} \cdot [\vec{M}(0) - \alpha \vec{g}] = 0 \quad (6-52)$$

Từ đó ta có thể xác định được trị số của α .

$$\alpha = \frac{\vec{g} \cdot \vec{M}(0)}{|\vec{g}|^2} \quad (6-53)$$

Sử dụng công thức (6-9) ta có thể viết :

$$\vec{OP} = \frac{\vec{\varphi} \wedge [\vec{M}(0) - \alpha\vec{\varphi}]}{|\vec{\varphi}|^2} + \lambda \vec{S} \quad (6-54)$$

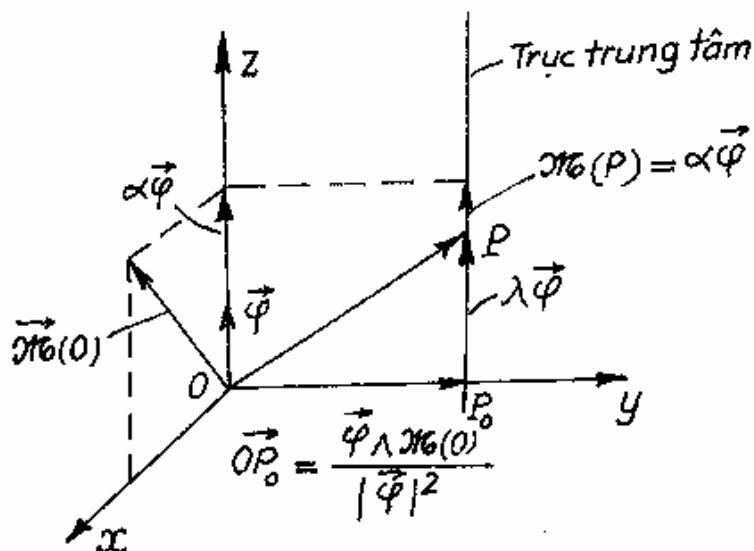
Đường đó được gọi là trục trung tâm của toocxσ (τ). Đường thẳng đó đi qua điểm P_0 với

$$\vec{OP}_0 = \frac{\vec{\varphi} \wedge \vec{M}(0)}{|\vec{\varphi}|^2} \quad (6-55)$$

Tại mọi điểm P trên đường đó vectơ mômen $\vec{M}(P)$ là song song với $\vec{\varphi}$ và có trị số là :

$$M(P) = \frac{\vec{\varphi} \cdot \vec{M}(0)}{|\vec{\varphi}|^2} \vec{\varphi} \quad (6-56)$$

Tất cả những điều trên được biểu diễn qua hình vẽ (h. 6-3).



Hình 6-3