

CHƯƠNG 4

CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA CƠ HỌC MÔI TRƯỜNG LIÊN TỤC

4.1. Bảo toàn khối lượng. Phương trình liên tục.

Khối lượng của một môi trường liên tục, chiếm thể tích V của không gian ở thời điểm t :

$$m = \int_V \rho(x, t) dV \quad (4.1)$$

với $\rho(x, t)$ là hàm mật độ, liên tục của tọa độ.

Định luật bảo toàn khối lượng:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(x, t) dV = \int_V \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right] dV = 0 \quad (4.2)$$

Từ (4.2), ta suy được phương trình liên tục:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \frac{d\rho}{dt} + \rho v_{k,k} = \frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot v) = 0 \quad (4.3)$$

Hay,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0 \quad \text{hoặc} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad (4.4)$$

Trong chất lỏng không nén: $d\rho/dt = 0$ và (4.3) có dạng:

$$v_{k,k} = 0 \text{ , hay } \operatorname{div} v = 0 \quad (4.5)$$

Trường vận tốc trong môi trường không nén:

$$v_i = \varepsilon_{ijk} s_{k,j}, \text{ hay } v = \nabla \times s \quad (4.6)$$

với $s(x,t)$ là thể của vector v .

Phương trình liên tục dạng **Lagrange**:

$$\int_{V_0} \rho_0(X, 0) dV_0 = \int_V \rho(x, t) dV \quad (4.7)$$

với V_0 , V là thể tích mà môi trường chiếm chỗ vào thời điểm $t_0=0$, $t > 0$.

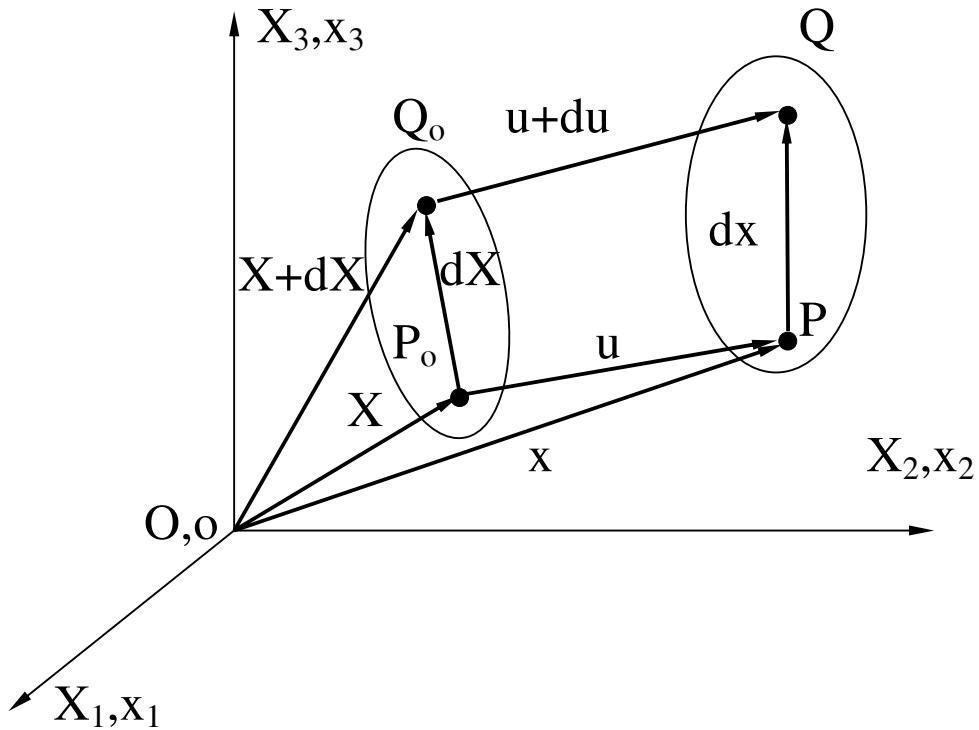
Định thức **Jacobian**:

$$J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial X_1} \frac{\partial x_j}{\partial X_2} \frac{\partial x_k}{\partial X_3} \quad (a)$$

với $X = X_1 \hat{I}_1 + X_2 \hat{I}_2 + X_3 \hat{I}_3 = X_k \hat{I}_k$ là vector định vị điểm ở thời điểm ban đầu trong hệ trực giao $OX_1X_2X_3$ và $x = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3 = x_i \hat{e}_i$ là vector định vị điểm ở thời điểm sau trong hệ trực giao $ox_1x_2x_3$.

Phương trình mô tả chuyển động điểm:

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) = x_i(X, t), \text{ hay } x = x(X, t) \quad (b)$$



Hình 4.1.

$$dV = J dV_0 \quad (c)$$

Do đó,

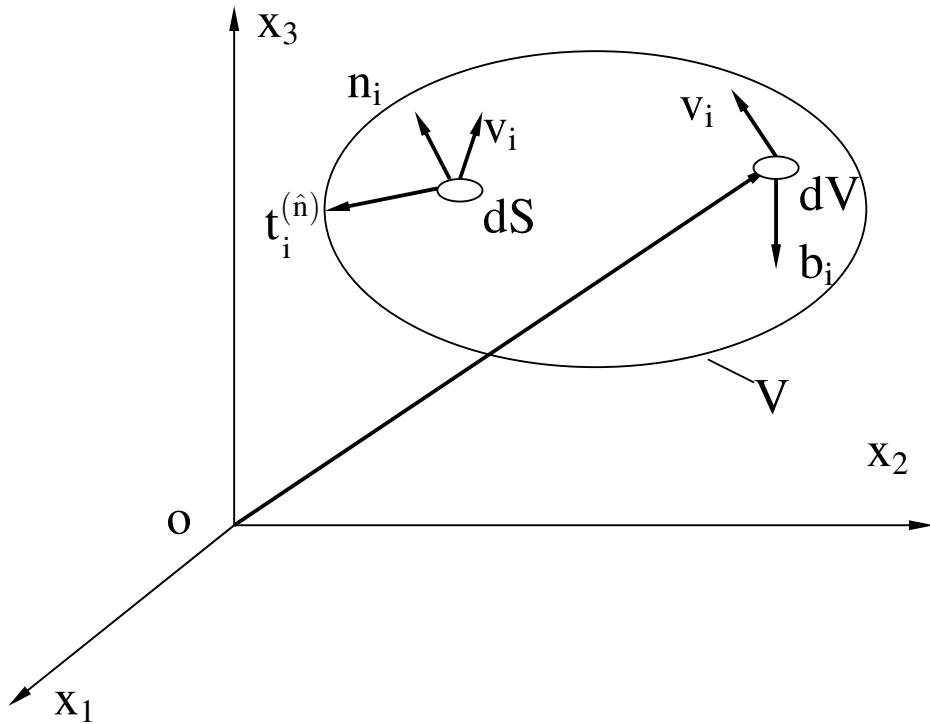
$$\int_{V_0} \rho_0(X, 0) dV_0 = \int_{V_0} \rho(x(X, t), t) J dV_0 = \int_{V_0} \rho(X, t) J dV_0 \quad (4.8)$$

Biểu thức (4.8) đúng cho mọi thể tích V_0 , nên:

$$\rho_0 = \rho J \quad \text{hay} \quad \frac{d}{dt}(\rho J) = 0 \quad (4.9)$$

4.2. Định lý biến thiên động lượng. Phương trình chuyển động. Phương trình cân bằng.

Lực khối b_i tác động lên thể tích dV , $t_i^{(n)}$ ứng suất tác động lên diện tích dS , trường vận tốc $v_i = du_i/dt$.



Hình 4.2. Thể tích chuyển động.

Động lượng của hệ:

$$P_i(t) = \int_V \rho v_i dV \quad (4.10)$$

Nếu nội lực tác động tuân theo định luật ba Newton, thì định lý biến thiên động lượng:

$$\int_S t_i^{(\hat{n})} dS + \int_V \rho b_i dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV$$

$$\text{hay } \int_S t^{(\hat{n})} dS + \int_V \rho b dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho v dV \quad (4.11)$$

Thay $t_i^{(\hat{n})} = \sigma_{ij}n_j$ vào (4.11) và thay tích phân mặt bằng tích phân thể tích, ta có:

$$\int_V (\sigma_{ji,j} + \rho b_i) dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV$$

hay $\int_V (\nabla_x \cdot \sum + \rho b) dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho v dV \quad (4.12)$

Sử dụng phương trình liên tục, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV &= \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho v_i J dV_0 = \\ &= \int_{V_0} \left(v_i \frac{d(\rho J)}{dt} + \rho J \frac{dv_i}{dt} \right) dV_0 = \int_V \frac{dv_i}{dt} \rho dV \end{aligned} \quad (4.13)$$

Thay (4.13) vào (4.13), ta được:

$$\begin{aligned} \int_V (\sigma_{ji,j} + \rho b_i - \rho \dot{v}_i) dV &= 0 \\ \text{hay } \int_V (\nabla_x \cdot \sum + \rho b - \rho \dot{v}) dV &= 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Do V bất kỳ, nên phương trình chuyển động có dạng:

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i \quad \text{hay} \quad \nabla_x \cdot \sum + \rho b = \rho \dot{v} \quad (4.15)$$

Đối với trường hợp không có gia tốc, phương trình cân bằng (được sử dụng rộng rãi trong cơ học vật rắn):

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0 \quad \text{hay} \quad \nabla_x \cdot \sum + \rho b = 0 \quad (4.16)$$

4.3. Định lý biến thiên moment động lượng.

Moment động lượng hệ đối với gốc tọa độ:

$$N_i(t) = \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k dV \quad \text{hay} \quad N = \int_V (x \times \rho v) dV \quad (4.17)$$

Định lý biến thiên moment động lượng hệ:

$$\begin{aligned} \int_S \varepsilon_{ijk} x_j t_k^{(\hat{n})} dS + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k dV &= \frac{d}{dt} \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k dV \\ \text{hay } \int_S (x \times t^{(\hat{n})}) dS + \int_V (x \times \rho b) dV &= \frac{d}{dt} \int_V (x \times \rho v) dV \end{aligned} \quad (4.18)$$

Thay $t_k^{(\hat{n})} = \sigma_{pk} n_p$ vào (4.18) và xem tensor ứng suất là đối xứng, thì phương trình sẽ đồng nhất khi chỉ tính đến biểu thức (4.15):

$$\int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0 \quad \text{hay} \quad \int_V \sum_V dV = 0 \quad (4.19)$$

Do V tùy ý, nên: $\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0$ hay $\sum_V = 0$ (4.20)

Từ đây thấy rõ: $\sigma_{jk} = \sigma_{kj}$

4.4. Bảo toàn năng lượng. Định luật thứ nhất nhiệt động lực học. Phương trình năng lượng.

Nếu chỉ nghiên cứu các đại lượng cơ học, thì định luật bảo toàn cơ năng cho thể tích môi trường liên tục có thể nhận được từ (4.15). Nhân vô hướng (4.15) với vector vận tốc v_i :

$$\int_V \rho v_i \dot{v}_i dV = \int_V v_i \sigma_{ji,j} dV + \int_V \rho v_i b_i dV \quad (4.21)$$

Tích phân,

$$\int_V \rho v_i \dot{v}_i dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{v_i v_i}{2} dV = \frac{d}{dt} \int_V \frac{\rho v^2}{2} dV = \frac{dK}{dt} \quad (4.22)$$

là vận tốc biến thiên động năng K theo thời gian t .
Chú ý rằng:

$$v_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = D_{ij} + V_{ij}$$

$$v_i \sigma_{ji,j} = (v_i \sigma_{ji})_{,j} - V_{ij} \sigma_{ji}$$

Tensor vận tốc biến dạng (đối xứng):

$$D_{ij} = D_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \text{ hay } D = \frac{1}{2} (v \nabla_x + \nabla_x v)$$

Tensor xoáy phản đối xứng:

$$V_{ij} = -V_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \text{ hay } V = \frac{1}{2} (v \nabla_x - \nabla_x v)$$

Nếu trường vận tốc không quay (xoáy): $V_{ij} \sigma_{ij} = 0$, thì:

$$\frac{dK}{dt} + \int_V D_{ij} \sigma_{ji} dV = \int_V (v_i \sigma_{ji})_{,j} dV + \int_V \rho v_i b_i dV \quad (4.23)$$

Biến đổi tích phân (định lý **Gauss**), ta có:

$$\frac{dK}{dt} + \int_V D_{ij} \sigma_{ji} dV = \int_S v_i t_i^{(\hat{n})} dS + \int_V \rho v_i b_i dV \quad (4.24)$$

Phương trình (4.24) thiết lập mối quan hệ giữa vận tốc biến thiên cơ năng toàn phần của môi trường liên tục, vế trái, với công suất của các lực mặt và khối, vế phải phương trình.

Đối với môi trường liên tục cơ nhiệt, giữa vận tốc biến thiên nội năng:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho u dV = \int_V \rho \dot{u} dV \quad (4.25)$$

với u là nội năng riêng (trong đơn vị thể tích). Gọi c_i vector c_i đặc trưng cho dòng nhiệt qua một đơn vị diện tích trong một đơn vị thời gian do tính dẫn nhiệt và z là hằng số bức xạ nhiệt trên một đơn vị khối lượng trong một đơn vị thời gian. Vận tốc dòng nhiệt đi vào môi trường:

$$\frac{\delta Q}{dt} = - \int_S c_i n_i dS + \int_V \rho z dV \quad (4.26)$$

Biến thiên năng lượng của môi trường liên tục cơ nhiệt:

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{\delta W}{dt} + \frac{\delta Q}{dt} \quad (4.27)$$

với $\delta W/dt$ là công suất của ngoại lực. Dạng chi tiết của (4.27):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{v_i v_i}{2} dV + \int_V \rho \dot{u} dV &= \\ = \int_S v_i t_i^{(\hat{n})} dS + \int_V \rho v_i b_i dV + \int_V \rho z dV - \int_S c_i n_i dS & \quad (4.28) \end{aligned}$$

Thay tích phân mặt bằng tích phân khối (**Gauss**), dạng cục bộ của phương trình năng lượng:

$$\frac{d}{dt} \frac{v^2}{2} + \frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} (\sigma_{ij} v_i)_{,j} + b_i v_i - \frac{1}{\rho} c_{i,i} + z \quad (4.29)$$

Nhân vô hướng (4.15) với vector vận tốc:

$$\rho \dot{v}_i v_i = v_i \sigma_{ji,j} + \rho v_i b_i$$

Thay đẳng thức trên vào (4.29) ta có dạng rút gọn của phương trình năng lượng cục bộ:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} D_{ij} - \frac{1}{\rho} c_{i,i} + z \quad (4.30)$$

Phương trình (4.30) biểu thị vận tốc biến thiên nội năng bằng tổng công suất của ứng suất cộng với dòng nhiệt vào môi trường.

4.5. Phương trình trạng thái. Entropy. Định luật thứ hai nhiệt động lực học.

Cho trạng thái nhiệt động học của môi trường liên tục, nghĩa là hoàn toàn bao quát cả hệ. Trong trường hợp

tổng quát cách mô tả này xác định bằng một số đại lượng nhiệt động học và động học, được gọi là các tham số trạng thái. Chúng có quan hệ với nhau bằng các phương trình trạng thái. Định luật thứ nhất nhiệt động lực học cho biết sự biến đổi tương ứng cơ năng và nhiệt năng từ dạng này sang dạng khác, nhưng chưa rõ quá trình này là thuận nghịch hay không thuận nghịch.

Định luật thứ hai nhiệt động lực học giả định có hai hàm trạng thái khác nhau: nhiệt độ tuyệt đối T và entropy (entropy riêng) s . Trong cơ học môi trường liên tục, mật độ entropy s được định nghĩa sao cho entropy toàn phần S :

$$S = \int_V \rho s dV$$

Entropy của hệ có thể thay đổi hoặc do tương tác với môi trường xung quanh, hoặc do biến đổi xảy ra bên trong hệ:

$$ds = ds^{(e)} + ds^{(i)} \quad (4.31)$$

với ds , $ds^{(e)}$, $ds^{(i)}$ lần lượt là gia số của entropy riêng do tương tác tổng, với môi trường ngoài, biến đổi bên trong.

$$ds^{(i)} > 0 \text{ trong các quá trình không thuận nghịch,} \quad (4.32)$$

$$ds^{(i)} = 0 \text{ trong các quá trình thuận nghịch,} \quad (4.33)$$

Nếu trong quá trình thuận nghịch ký hiệu dòng nhiệt trên một đơn vị khối lượng của hệ là $dq_{(R)}$, thì:

$$ds^{(e)} = dq_{(R)} / T \text{ trong các quá trình thuận nghịch, (4.34)}$$

4.6. Bất phương trình Cladius. Hàm hao tán.

Theo định luật thứ hai nhiệt động lực học, vận tốc biến thiên entropy toàn phần S của môi trường liên tục không nhỏ hơn tổng dòng entropy qua biên của thể tích này và entropy do các nguồn bên ngoài sinh ra trong thể tích. **Bất phương trình Cladius:**

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho s dV \geq \int_V \rho e dV - \int_S \frac{c_i n_i}{T} dS \quad (4.35)$$

với e là công suất của các nguồn entropy cục bộ ngoài trên một đơn vị khối lượng. Đẳng thức trong (4.35) xảy ra đối với các quá trình thuận nghịch, bất đẳng thức xảy ra đối với các quá trình không thuận nghịch.

Thay tích phân mặt trong (4.35) bằng tích phân khối, ta có dạng cục bộ cho vận tốc nội sinh entropy γ , trên một đơn vị khối lượng:

$$\gamma \equiv \frac{ds}{dt} - e - \frac{1}{\rho} \left(\frac{c_i}{T} \right)_{,i} \geq 0 \quad (4.36)$$

Trong cơ học môi trường liên tục, tensor ứng suất có thể phân ra hai thành phần:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(C)} + \sigma_{ij}^{(D)} \quad (4.37)$$

với $\sigma_{ij}^{(C)}$, $\sigma_{ij}^{(D)}$ là tensor ứng suất bảo toàn, hao tán. Thay tensor gia số biến dạng: $d\varepsilon_{ij} = D_{ij}dt$ vào (4.30), ta sẽ có phương trình năng lượng:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij}^{(C)} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{\rho} \sigma_{ij}^{(D)} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{dq}{dt} \quad (4.38)$$

trong (4.38) $\frac{1}{\rho} \sigma_{ij}^{(D)} \dot{\varepsilon}_{ij}$ là vận tốc hao tán năng lượng trên một đơn vị khối lượng do ứng suất gây ra, dq/dt là vận tốc của dòng nhiệt vào môi trường trên một đơn vị khối lượng. Nếu trong môi trường xảy ra quá trình thuận nghịch thì sẽ không có hao tán năng lượng; ngoài ra $dq/dt = dq_{(R)}/dt$, kết hợp (4.38) với (4.34):

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij}^{(C)} \dot{\varepsilon}_{ij} + T \frac{ds}{dt} \quad (4.39)$$

Đối với quá trình không thuận nghịch, được mô tả bằng (4.38), vận tốc sinh entropy có thể tìm từ phương trình (4.39). Như vậy:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{\rho T} \sigma_{ij}^{(D)} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (4.40)$$

Đại lượng $\sigma_{ij}^{(D)} \dot{\varepsilon}_{ij}$ gọi là hàm hao tán. Đối với các quá trình đoạn nhiệt không thuận nghịch ($dq = 0$), theo định luật nhiệt động hai $ds/dt > 0$. Từ đó từ (4.40) suy ra hàm hao tán $\sigma_{ij}^{(D)} \dot{\varepsilon}_{ij}$ là xác định dương.

4.7. Các phương trình xác định. Các phương trình liên tục cơ nhiệt và cơ học.

Đối với môi trường cơ nhiệt, các phương trình cơ bản:

- Phương trình liên tục (4.4):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad (4.41)$$

- Phương trình chuyển động (4.15):

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i \quad \text{hay} \quad \nabla_x \cdot \Sigma + \rho b = \rho \dot{v} \quad (4.42)$$

- Phương trình năng lượng(4.30):

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} D_{ij} - \frac{1}{\rho} c_{i,i} + z \quad (4.43)$$

Khi các lực khối b_i và các nguồn nhiệt phân bố là cho trước, *các phương trình (4.41), (4.42), (4.43) lập thành hệ 5 phương trình độc lập, chứa 14 ẩn số của tọa độ và thời gian*. Các ẩn số: mật độ ρ , ba thành phần vận tốc v_i (hoặc các thành phần chuyển vị u_i), sáu thành phần ứng suất độc lập σ_{ij} , ba thành phần vector dòng nhiệt c_i và mật độ nội năng u . Bổ sung vào đó cần thực hiện bất phương trình *Claudius* (4.36):

$$\frac{ds}{dt} - e - \frac{1}{\rho} \left(\frac{q_i}{T} \right)_{,i} \geq 0$$

biểu hiện dương tính của sự sinh entropy. Bất phương trình này còn thêm vào hai ẩn số: mật độ entropy s và nhiệt độ tuyệt đối T . Nghĩa là để giải được hệ, cần tìm thêm 11 phương trình nữa. Sáu trong số đó là các phương trình xác định, đặc trưng cho các tính chất vật lý riêng biệt của môi trường nghiên cứu. Ba phương trình của quy luật truyền nhiệt và hai là các phương trình trạng thái nhiệt động học.

Chức năng của là các phương trình xác định là thiết lập các biểu thức toán học giữa các tham số tĩnh, động học và nhiệt động học, mô tả ứng xử của vật liệu khi có các tác động cơ-nhiệt. Trong nhiều trường hợp có thể bỏ qua tương tác của các quá trình cơ học và nhiệt động học, thí dụ như lý thuyết nhiệt đàm hồi không kết hợp. Trong trường hợp này các quá trình cơ học thuần túy mô tả bằng các phương trình (4.41) và (4.42). **Hệ này gồm 4 phương trình với 10 ẩn số.** Do đó, **cần thêm 6 phương trình xác định nữa.** Theo lý thuyết không kết hợp, các phương trình xác định chỉ chứa các tham số động lực học (ứng suất) và động học (vận tốc, chuyển vị, biến dạng) và thường là các biểu thức giữa ứng suất và biến dạng. Trường nhiệt độ thường được xem là đã biết, hoặc là có thể bài toán truyền nhiệt giải riêng, độc lập với bài toán cơ. Trong các quá trình đẳng nhiệt, nhiệt độ giả thiết là không đổi và bài toán là cơ học thuần túy.