

CHƯƠNG III

TENXƠ HẠNG HAI TRONG KHÔNG GIAN OCLID

Tenxơ hạng hai là tenxơ thường gặp nhất trong cơ học vì vậy trong bài này ta nói kĩ về tenxơ hạng hai dưới dạng ma trận để tiện dùng trong tính toán.

3-1. Khái niệm chung

1. Một định nghĩa khác về tenxơ hạng hai

- Ta gọi tenxơ hạng hai là một phép biến đổi tuyến tính trong không gian vécta Oclid V . Phép ánh xạ đó tác dụng lên một vécta và cho một vécta khác cũng trong không gian đó. Nó thỏa mãn các điều kiện sau đây :

$$T(\vec{U} + \vec{V}) = T(\vec{U}) + T(\vec{V}) \quad (3-1)$$

$$T(a\vec{U}) = aT(\vec{U}) \quad (3-2)$$

Điều đó đúng với mọi \vec{U} và \vec{V} trong V và vô hướng a . Ta có :

$$T(\vec{U}) = \vec{W} \text{ hay viết gọn hơn } T\vec{U} = \vec{W}$$

T là một trong phép ánh xạ $\mathcal{L}(V)$. Tập hợp đó bao gồm nó cũng là một không gian vécta. Ta có thể tìm thấy các phép ánh xạ tuyến tính sau đây :

* T^t được gọi là chuyển vị của T với tính chất

$$T\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{U} \cdot T^t\vec{V} \forall \vec{U}, \vec{V} \in V \quad (3-3)$$

$$(TS)^t = S^t T^t \quad (3-4)$$

* T^{-1} là phép ánh xạ nghịch của T nghĩa là :

$$TT^{-1} = T^{-1}T = I \quad (3-5)$$

I gọi là phép ánh xạ phản thân. Tác động lên một véctơ nào đó sẽ cho chính véctơ đó.

Ta có :

$$(T^{-1})^t = (T^t)^{-1} = T^{-t} \quad (3-6)$$

Một tenxơ đối xứng có tính chất sau đây :

$$T^t = T \quad (3-7)$$

Một tenxơ phản đối xứng là :

$$T^t = -T \quad (3-8)$$

Trong hệ tọa độ Đê các một tenxơ T bất kì luôn luôn có thể tách thành một tenxơ hạng hai đối xứng T^S và một phản đối xứng T^A .

$$T = T^S + T^A = \frac{1}{2}(T + T^t) + \frac{1}{2}(T - T^t)$$

Sự phân tích đó là duy nhất.

Một tenxơ dương là một tenxơ đối xứng sao cho

$$TV\vec{V} \geq 0 \text{ với mọi } \vec{V} \neq 0 \quad \vec{V} \in v \quad (3-9)$$

Một tenxơ trực giao là một phép ánh xạ tuyến tính hai chiều sao cho

$$T^t = T^{-1} \Rightarrow TT^t = I \quad (3-10)$$

Ma trận của tenxơ phản thân I là một ma trận vuông

$$I = [\delta^{ij}] \quad (3-11)$$

Xin nhắc lại rằng tổng và tích của hai phép ánh xạ tuyến tính là một phép ánh xạ tuyến tính. Tích đó có tính chất kết hợp và phân phối đối với tổng. Gọi S và T là hai phép ánh xạ tuyến tính nào đó tác động lên véctơ \vec{V} . Ta luôn có :

$$(S + T)\vec{V} = S\vec{V} + T\vec{V} = R\vec{V}$$

Nếu kí hiệu R^{ij} là các thành phần của $R\vec{V}$ và S^{ij}, T^{ij} là các thành phần của $S\vec{V}$ và $T\vec{V}$ thì ta có :

$$R^{ij} = S^{ij} + T^{ij} \quad (3-12)$$

Tương tự đối với tích :

$$\begin{aligned} S[T\vec{V}] &= P\vec{V} \\ P^{ij} &= S^{ij}.T^{ij} \end{aligned} \quad (3-13)$$

Các thành phần R^{ij} , S^{ij} và T^{ij} lập thành các ma trận. Với các kết luận trên ta dễ dàng chứng minh được rằng ma trận của một tenxơ đối xứng là đối xứng và của tenxơ phản đối xứng là phản đối xứng.

2. Ma trận của một tenxơ hạng hai

Gọi \vec{e}_i là các véctơ nền trực giao. T tác dụng vào \vec{e}_j cho ta một véctơ d_j nào đó :

$$\vec{d}_j = T\vec{e}_j \quad (3-14)$$

\vec{d}_j phải có các thành phần hình chiếu trong hệ quy chiếu \vec{e}_i . Ta có :

$$\vec{d}_j = \tau^{ij} \cdot \vec{e}_i \quad (3-15)$$

Chi số i chỉ phương chiếu và j là phương của \vec{e}_j chịu tác động của phép ánh xạ T. Nếu không gian là n chiều τ^{ij} sẽ có n^2 thành phần. Các thành phần đó lập thành một ma trận vuông mỗi hàng biểu diễn các thành phần của d_j . Bây giờ ta hãy xét tương quan giữa τ^{ij} và T.

Vì T là một tenxơ hạng hai vậy theo định nghĩa ta có :

$$T = T^{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad (3-16)$$

Đem thay vào (3-14) ta có :

$$\vec{d}_j = [T^{ik}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_k] \cdot \vec{e}_j$$

(Trong đó ta phải thay một chi số cấm để khỏi nhầm)

Từ đó ta có thể viết tiếp :

$$\vec{d}_j = T^{ik} \cdot \vec{e}_i (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_j) = T^{ik} \cdot \vec{e}_i \cdot \delta_{kj}$$

Hay $\vec{d}_j = T^{ij} \vec{e}_i$ (3-17)

So sánh (6-15) và (6-17) ta có :

$$t^{ij} = T^{ij} \quad (3-18)$$

Cũng từ đó cho phép ta kết luận rằng hai định nghĩa, định nghĩa trước đây và định nghĩa trong chương này là như nhau.

Mở rộng định nghĩa đó cho một tensor hạng cao.

Một phép ánh xạ tuyến tính kết hợp một tensor hạng p cho một tensor hạng q là một tensor hạng p + q.

Ví dụ : Giả sử có T hạng hai và S hạng ba. Một phép ánh xạ \mathcal{L} tuyến tính kết hợp T để thành S. Vậy \mathcal{L} phải là một tensor hạng năm.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}^{ijklm} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l \otimes \vec{e}_m ; \quad T = T_{pq} \vec{e}^p \otimes \vec{e}^q \\ \mathcal{L}[T] &= S = S^{ijk} \cdot \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k\end{aligned}$$

Như vậy là từ \mathcal{L} sang S đã có sự rút gọn hai lần.

3. Vết và định thức của một tensor hạng hai

a. Ta định nghĩa vết của một tensor và kí hiệu là $\text{tr}(T)$ là giá trị sau đây :

$$\text{tr}(T) = T^{ll} \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

Nó là một lượng bất biến trong phép biến đổi tọa độ.

Phép toán đó nghiêm đúng với các tính chất sau :

$$\text{tr}(I) = n \quad \text{tr}(S + T) = \text{tr}(S) + \text{tr}(T)$$

$$\text{tr}(\alpha T) = \alpha \text{tr}(T)$$

$$\text{tr}(T) = \text{tr}(T^t); \text{tr}(T^A) = 0; \text{tr}(T^S) = \text{tr}(T)$$

$$\text{tr}(T_1 T_2 \dots T_n) = \text{tr}(T_{i+1} T_{i+2} \dots T_n T_1 T_2 \dots T_i)$$

Phép toán $\text{tr}(ST^t)$ nghiêm với các tiên đề về tích vô hướng.

Từ đó ta có thể định nghĩa về norme của tensor hạng hai bởi biểu thức :

$$|T| = \sqrt{\text{tr}(TT^t)}$$

b. Định thức của ma trận của một tenxơ T có một giá trị độc lập đối với nền đã tính toán.

Ta có các tính chất sau :

$$\det I = 1$$

$$\det(aT) = a^n \det T$$

$$\det T^t = \det T$$

$$\det(T_1, T_2, \dots, T_n) = \det T_1 \cdot \det T_2 \cdots \det T_n$$

3-2. Tenxơ hạng hai trong không gian ba chiều

1. *Phương và giá trị chính.* Giả sử T là một tenxơ hạng hai, \vec{u} là một vectơ đơn vị bất kì. Tìm phương \vec{u} để khi T kết hợp với \vec{u} ta được một vectơ cùng phương với \vec{u} . Nghĩa là

$$Tu = \lambda u \quad (3-19)$$

λ là một vô hướng.

Phương \vec{u} thỏa mãn phương trình (3-19) được gọi là phương chính của T. Các vô hướng λ tương ứng được gọi là những trị chính của T.

Ta có thể viết (3-19) dưới dạng khác :

$$(T - \lambda I)\vec{u} = 0 \quad (3-20)$$

Hoặc dưới dạng các thành phần :

$$(T^{ij} - \lambda \delta_{ij})u_j = 0 \quad (3-21)$$

Biểu thức (3-21) lập thành một hệ thống ba phương trình tuyến tính thuần nhất với ba ẩn số (u_j). Để có nghiệm khác không định thức của hệ phải bằng không.

$$\det(T - \lambda I) = 0 \quad (3-22)$$

Nghĩa là :

$$\begin{vmatrix} T^1 - \lambda & T^{12} & T^{13} \\ T^{21} & T^{22} - \lambda & T^{23} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3-23)$$

Khai triển định thức ta có phương trình đặc tính sau đây :

$$\begin{aligned} -\lambda^3 + (T^{11} + T^{22} + T^{33})\lambda^2 - \\ - (T^{11}T^{22} + T^{22}T^{33} + T^{33}T^{11} - T^{23}T^{32} - T^{31}T^{13} - T^{12}T^{21})\lambda \mp \\ \mp \det T = 0 \end{aligned} \quad (3-24)$$

Phương trình đó có ba nghiệm. Có thể có hai trường hợp :

- Ba nghiệm đều thực
- Hai nghiệm liên hợp và một nghiệm thực

Như vậy tenxơ T luôn có ít nhất một trị chính thức. Kí hiệu là λ_3 .

Ta gọi tenxơ đồng dạng với T tất cả các tenxơ T' sao cho

$$T' = QTQ^T$$

Trong đó Q là một tenxơ trực giao bất kì.

(Tenxơ trực giao khi $Q \cdot Q^T = Q^{-1} = Q^T$)^{*}

Ta có thể chứng minh dễ dàng rằng T và T' có cùng những trị chính. Các phương chính của chúng được liên kết bởi

$$\vec{u}_i' = Q\vec{u}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

2. *Bất biến chính và mômen*

Phương trình đặc tính (3-24) là bất biến khi thay đổi hệ tọa độ điều này có thể nhận thức được từ phương trình (3-24). Trong phương trình đó ta chỉ đưa vào kí hiệu tuyệt đối mà không cần qua trực quy chiếu.

Như vậy các hệ số của phương trình (3-24) phải là những lượng bất biến trong phép biến đổi tọa độ.

Phương trình đó được viết lại dưới dạng chính tắc như sau :

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda) &= -\lambda^3 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2 - \\ &- (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)\lambda + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

(*) Nói kí ở phần sau.

Do đó ta có các biểu thức về các bất biến như sau :

$$\begin{aligned} J_1 &= T^{11} + T^{22} + T^{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{tr}(T) = T^{ii} \\ J_2 &= T^{11}T^{22} + T^{22}T^{33} + T^{33}T^{11} - T^{23}T^{32} - T^{31}T^{13} - T^{12}T^{21} = \\ &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = \\ &= \frac{1}{2}[\text{tr}^2(T) - \text{tr}(T^2)] = \frac{1}{2}[(T^{ii})^2 - T^{ij}T^{ji}] \\ J_3 &= \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}T^{ip}T^{jq}T^{kr} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det T \end{aligned}$$

Ta gọi chúng là các bất biến chính, chúng độc lập đối với nhau không một trị số nào trong chúng là hàm của trị khác.

Mọi hệ thống với ba hàm độc lập có các đối số là các bất biến chính đều tương đương với (J_1, J_2, J_3) . Vì rằng J_2 và J_3 có biểu thức theo các thành phần của T trong hệ trục bất kì là phức tạp nên người ta thường dùng các bất biến sau đây :

$$\bar{J}_1 = \text{tr}(T), \bar{J}_2 = \text{tr}(T^2), \bar{J}_3 = \text{tr}(T^3) \quad (3-25)$$

Các bất biến đó được gọi là các mômen của T .

Như ta đã có $\bar{J}_1 = J_1$ và $J_2 = \frac{1}{2}[\bar{J}_1^2 - \bar{J}_2]$. Để xác định \bar{J}_3 ta sử dụng định lí của Cayley-Hamilton như sau : Tất cả các tensor hạng hai đều nghiệm đúng với phương trình đặc tính của nó như sau (không chứng minh) :

$$-T^3 + J_1T^2 - J_2T + J_3I = 0$$

Xác định vết của biểu thức đó ta sẽ tìm thấy \bar{J}_3 . Cuối cùng ta có :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1 = \bar{J}_1 \\ J_2 = \frac{1}{2}(\bar{J}_1^2 - \bar{J}_2) \\ J_3 = \frac{1}{6}\bar{J}_1^3 - \frac{1}{2}\bar{J}_1\bar{J}_2 + \frac{1}{3}\bar{J}_3 \end{array} \right. \quad \text{và ngược lại} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{J}_1 = J_1 \\ \bar{J}_2 = J_1^2 - 2J_2 \\ \bar{J}_3 = J_1^3 - 3J_1J_2 + 3J_3 \end{array} \right. \quad (3-26)$$

Ta dễ dàng nghiệm lại rằng các mômen là các hàm độc lập. Chúng thiết lập thành một hệ thống bất biến độc lập tương đương với $(J_1 J_2 J_3)$. Như vậy một tensor hạng hai bất kì nhận sáu bất biến độc lập.

3. Tensor trực giao

Một tensor Q trực giao được định nghĩa bởi biểu thức :

$$Q^{-1} = Q^t \quad (3-27)$$

Do đó :

$$QQ^t = I \text{ vậy } \det^2 Q = 1 \text{ do đó } \det Q = \pm 1$$

Một tensor trực giao biến đổi một hệ chuẩn trực giao thành một hệ mới trực giao. Ta hãy chú ý rằng các cột của ma trận Q là những thành phần của hệ trực mới trong hệ trực cũ. Chúng ta có các điều kiện trực giao như sau :

$$Q_{ki}Q_{kj} = \delta_{ij} \quad (3-28)$$

Đặc biệt là một tensor trực giao không thay đổi moduyn của một vectơ. Nếu \vec{u} là phương chính của Q thì ta có :

$$1 = |\vec{u}| = |Q \cdot \vec{u}| = |\lambda \vec{u}| = |\lambda| |\vec{u}| = |\lambda|$$

Như vậy các trị chính có moduyn là 1. Khi nó là thực nó chỉ có thể bằng ± 1 . Như trên ta đã nói một tensor hạng hai có ít nhất một trị chính thực λ_3 vậy $\lambda_3 = \pm 1$.

Giả sử \vec{u}_3 là phương chính kết hợp và bây giờ hãy chọn một hệ chuẩn có trục thứ 3 là trục của \vec{u}_3 . Trong hệ đó ta có : $Q\vec{u}_3 = \lambda_3 \vec{u}_3 = \pm \vec{u}_3$ và điều đó dẫn đến $Q_{13} = Q_{23} = 0$.

$$\begin{bmatrix} x & x & Q_{13} \\ x & x & Q_{23} \\ x & x & \pm 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} Q_{13} \cdot 1 = 0 \\ Q_{23} \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

Sử dụng các điều kiện trực giao dưới dạng : (công thức (3-28))

$$Q_{k1} \cdot Q_{11} = 0 ; Q_{k2} \cdot Q_{22} = 0$$

Ta tìm thấy $Q_{31} = Q_{32} = 0$ như vậy Q sẽ có dạng như sau :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}_{(., ., \vec{u}_3)}$$

Các điều kiện trực giao còn lại có dạng

$$\begin{cases} (Q_{11})^2 + (Q_{21})^2 = 1 \\ (Q_{12})^2 + (Q_{22})^2 = 1 \\ Q_{11} \cdot Q_{12} + Q_{21} \cdot Q_{22} = 0 \end{cases}$$

Các biểu thức đó chứng tỏ rằng có một góc ϕ sao cho ma trận có thể viết dưới dạng :

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}_{(., ., \vec{u}_3)}$$

Ta xét các tenxơ trực giao khác nhau.

a. Tenxơ trực giao thực

Đó là các tenxơ có $\det Q = 1$.

Như ta đã có $\det Q = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$, λ_1 và λ_2 là liên hợp môđuyn 1 và $\lambda_1 \lambda_2 = 1$. Do đó $\lambda_3 = 1$. Vậy :

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(., ., \vec{u}_3)}$$

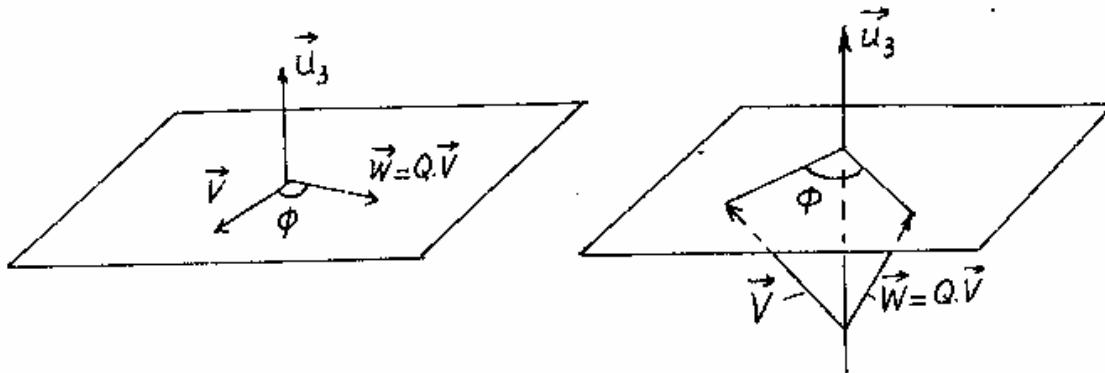
Đó là phép quay một góc ϕ quanh \vec{u}_3 . Hai giá trị chính khác là λ_1 , $\lambda_2 = e^{\pm i\phi}$ các phương chính \vec{u}_1 , \vec{u}_2 là không thực trừ những trường hợp đặc biệt.

* Trường hợp chung $\Phi \neq 0, \pi$

$\lambda_1 = e^{i\Phi}$ và $\lambda_2 = e^{-i\Phi}$, $\lambda_3 = 1$ phương \vec{u}_3 là phương chính mặt phẳng vuông góc với \vec{u}_3 được biến đổi thành chính nó và đó là mặt chính song trong đó không có phương nào là phương chính.

Cho một véctơ \vec{V} nào đó trong mặt phẳng. Q sẽ làm quay véctơ đó thành \vec{W} trong phép quay với Φ quanh \vec{u}_3 (hình 3-1).

Nếu \vec{V} là một véctơ trong không gian thì véctơ $\vec{W} = Q\vec{V}$ là phép quay của \vec{V} quanh trục \vec{U}_3 một góc quay Φ (h. 3-2).



Hình 3-1.

Hình 3-2.

* Trường hợp riêng $\Phi = 0$

Khi đó ta có $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Q sẽ có dạng

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I]$$

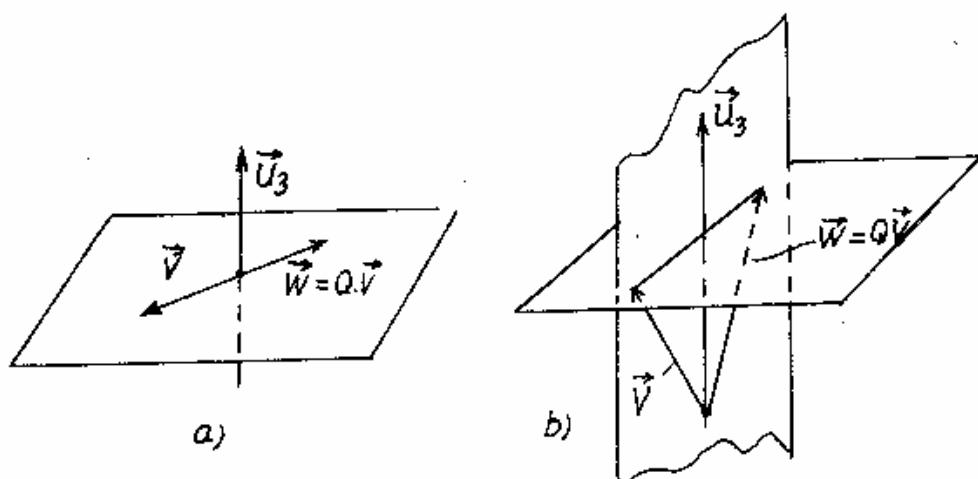
Mọi phương đều là phương chính. Mọi véctơ được biến đổi thành chính nó.

* Trường hợp riêng $\phi = \pi$

Khi đó $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ và $\lambda_3 = 1$

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\dots \vec{u}_3)}$$

Tất cả các phương trong mặt phẳng vuông góc với \vec{u}_3 là phương chính (H.3-3a).



Hình 3-3.

Tất cả các véctơ trong mặt đó được biến thành véctơ đối của nó. Các vectơ trong không gian cũng biến thành véctơ đối của nó qua phương \vec{u}_3 . (H.3-3b)

b. *Tenxơ trực giao không thực*

Đó là các tenxơ trực giao mà $\det Q = -1$.

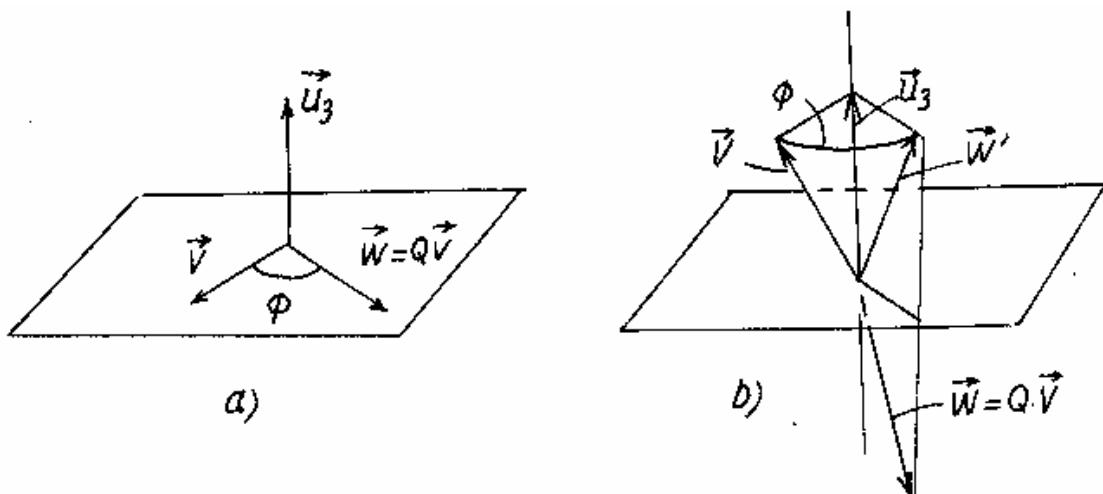
Như vậy $\lambda_3 = -1$. Ma trận Q được viết như sau :

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\Phi & \sin\Phi & 0 \\ -\sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{(\dots, \vec{u}_3)}$$

Nó biểu hiện một tích của phép quay với góc ϕ chung quanh trục \vec{u}_3 và một phép đối xứng qua mặt phẳng vuông góc với \vec{u}_3 .

* *Trường hợp tổng quát* $\phi \neq 0, \pi$

Khi đó ta có $\lambda_1 = e^{i\Phi}$, $\lambda_2 = e^{-i\Phi}$, $\lambda_3 = -1$. Một véctơ song song với \vec{u}_3 được biến đổi thành véctơ đối, mặt phẳng vuông góc với \vec{u}_3 được biến đổi thành chính nó (mặt chính) nhưng không có phương nào là chính (H.3-4).



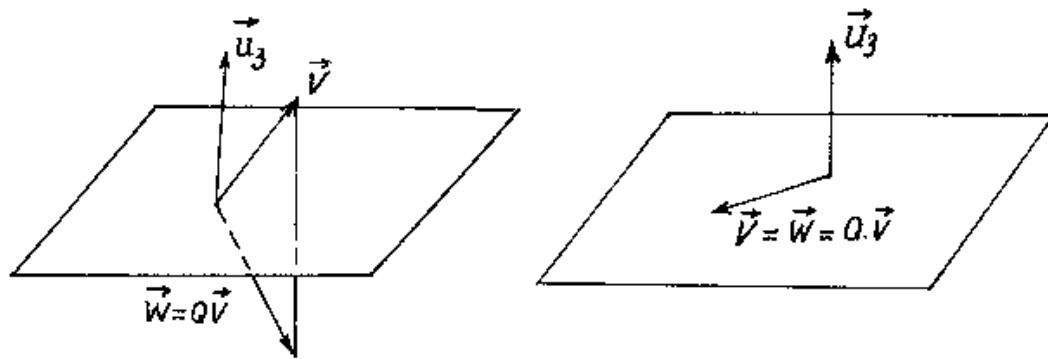
Hình 3 - 4.

* Trường hợp riêng $\Phi = 0$

Khi đó ta có $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ và $\lambda_3 = -1$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{(0, 0, \vec{u}_3)}$$

Sự biến đổi là một phép đối xứng qua mặt phẳng vuông góc với \vec{u}_3 . Tất cả mọi phương trong mặt đó là chính và tất cả mọi vectơ trong mặt đó được biến đổi thành chính nó.



Hình 3 - 5.

* Trường hợp riêng $\Phi = \pi$

Khi đó ta có $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{(\dots)} = -I$$

Tất cả mọi phương trong không gian đều là chính. Tất cả các vectơ đều được biến đổi thành vectơ đối. Phép biến đổi là một phép đối xứng qua gốc tọa độ.

c. *Bất biến của một tenxơ trực giao*

Ta nhìn thấy một tenxơ trực giao chỉ có một bất biến độc lập đó là góc quay ϕ . Trục quay và mặt đối xứng không được kể là bất biến khác vì rằng vị trí và phương của nó chỉ được xác định tương ứng với một hệ quay chiếu nhất định (vị trí quan sát).

Trị số các bất biến chính là như sau :

a. *Tenxơ giao thực*

$$J_1 = \text{tr}Q = 2\cos\Phi + 1$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(\text{tr}^2Q - \text{tr}Q^2) = 2\cos\Phi + 1$$

$$J_3 = \det Q = 1$$

b. *Tenxơ trực giao không thực*

$$J_1 = \text{tr}Q = 2\cos\Phi - 1$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(\text{tr}^2Q - \text{tr}Q^2) = -2\cos\Phi + 1$$

$$J_3 = \det Q = -1$$

Tất cả các bất biến đó đều là các hàm số với ϕ .

4. *Tenxơ đối xứng*

Giả sử S là một tenxơ đối xứng $S = S^t$ và gọi λ_3 và \vec{u}_3 là trị chính thực và phương chính kết hợp. Vậy từ điều kiện

$$S\vec{u}_3 = \lambda_3\vec{u}_3$$

dẫn đến $S^{13} = S^{23} = 0$ và vì là đối xứng nên $S^{31} = S^{32} = 0$.

Cuối cùng ta có :

$$S = \begin{bmatrix} S^{11} & S^{12} & 0 \\ S^{21} & S^{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}_{(\dots, \vec{u}_3)}$$

Phương trình (6-24) có dạng sau đây :

$$(S^{11} - \lambda)(S^{22} - \lambda)(\lambda_3 - \lambda) - S^{21} \cdot S^{12}(\lambda_3 - \lambda) = 0$$

Dễ dàng đặt thành thừa số và rút ra được các nghiệm sau đây :

$$\lambda_3 \text{ và } \lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2} [S^{11} + S^{22} \pm \sqrt{(S^{11} - S^{22})^2 + 4S^{12} \cdot S^{21}}]$$

Vì rằng $S^{12} = S^{21}$ nên biểu thức dưới dấu căn là một tổng các bình phương vậy các trị chính λ_1 và λ_2 là các số thực. Ta có kết luận quan trọng.

Một tensor hạng hai đối xứng có cả ba trị chính đều là thực

Chúng ta sẽ chứng minh rằng nếu hai trị chính là phân biệt thì các phương chính kết hợp với hai trị chính đó là vuông góc với nhau.

Thực vậy, giả sử $\lambda_1 \neq \lambda_2$ và $S\vec{u}_1 = \lambda_1 \vec{u}_1$, $S\vec{u}_2 = \lambda_2 \vec{u}_2$. Theo định nghĩa về ma trận chuyển vị ta có :

$$S\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_1 S^t \vec{u}_2$$

Vì S là đối xứng nên ta có :

$$S\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_1 S\vec{u}_2$$

Hay :

$$\lambda_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_1 \cdot \lambda_2 \vec{u}_2$$

Cuối cùng ta có :

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \text{ vì } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ nên } \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$$

Chúng trực giao với nhau.

Xét các loại tenxơ đối xứng.

a. Trường hợp tổng quát $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4$

(Trị chính khác nhau từng đôi một).

Các phương chính lập thành một hệ quy chiếu trực giao $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$. Trong hệ quy chiếu đó S được viết như sau :

$$S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}_{(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)}$$

Hay có thể viết :

$$S = \lambda_1 \vec{u}_1 \otimes \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 \otimes \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 \otimes \vec{u}_3$$

Ví dụ : Giả sử S đã cho như sau :

$$S = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 10 \\ 2 & -11 & 8 \\ 10 & 8 & -5 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

Phương trình đặc tính đưa về thừa số dưới dạng :

$$\det(S - \lambda I) = (\lambda - 9)(\lambda + 9)(\lambda + 18) = 0$$

Vậy ta tìm thấy ba trị chính $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -9$ và $\lambda_3 = -18$.

Để xác định các phương chính $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ ta dựa vào định nghĩa $S\vec{u} = \lambda\vec{u}$

Ví dụ $\lambda_1 = 9$ ta có hệ thống

$$\begin{aligned} -2l_1 + 2m_1 + 10n_1 &= 9l_1 \\ 2l_1 - 11m_1 + 8n_1 &= 9m_1 \\ 10l_1 + 8m_1 - 5n_1 &= 9n_1 \end{aligned}$$

Từ hệ phương trình đó ta tìm thấy

$$\vec{u}_1 = \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3$$

Tương tự như vậy ta sẽ tìm được \vec{u}_2 và \vec{u}_3 . Như vậy sự chuyển từ hệ quy chiếu \vec{e}_i sang \vec{u}_i được thực hiện bởi ma trận Q như sau :

$$\vec{u}_i = Q\vec{e}_i \text{ với } Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}_{(\vec{e}_i)}$$

Áp dụng công thức đồng dạng :

$$T' = QTQ^t$$

Ta có thể tìm thấy các thành phần của S trong hệ mới :

$$S' = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 10 \\ 2 & -11 & 8 \\ 10 & 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$S' = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix}_{\vec{u}_i}$$

b. Trường hợp riêng $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$

Với mọi hệ quy chiếu $(., ., \vec{u}_3)$ nhận trục u_3 làm trục thứ ba, tenxơ S sẽ có dạng :

$$S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}_{(., \vec{u}_3)}$$

Tất cả các hệ $(., ., \vec{u}_3)$ là hệ chính của S. Mọi phương trong mặt phẳng vuông góc với \vec{u}_3 là phương chính của S.

Phép biến đổi là tích affin với tỉ số λ_3 và song song với \vec{u}_3 và một phép vị tự với tỉ số λ_1 trong mặt phẳng vuông góc với \vec{u}_3 .

c. *Trường hợp riêng* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$

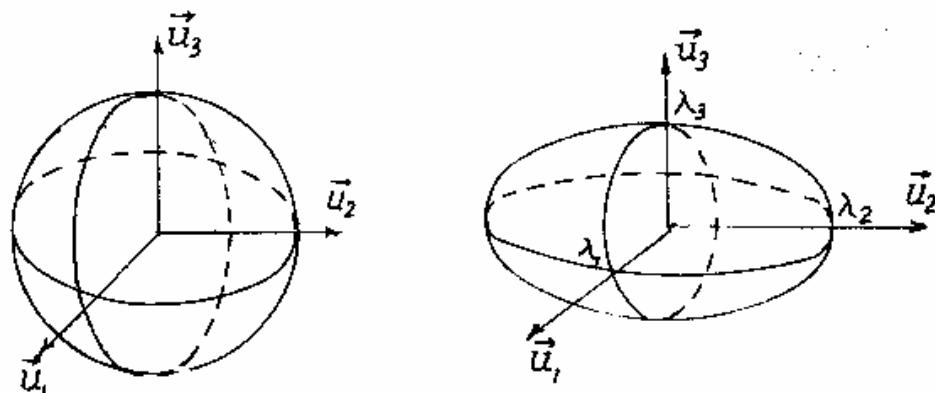
Trong mọi hệ quy chiếu, tenxơ S có dạng :

$$S = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}_{(., .)} = \lambda \cdot I$$

$S = \lambda \cdot I$ là một tenxơ đẳng hướng. Mọi hệ quy chiếu là hệ chính và tất cả các phương đều là chính. Phép biến đổi là một phép vị tự trong không gian với tỉ số vị tự là λ .

d. *Bất biến của một tenxơ đối xứng*

Tenxơ đối xứng S biến đổi một hình cầu bán kính là 1 thành một mặt ellipsoidem các bán trục là bằng $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ và song song với $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$



Hình 3 - 6.

Vậy một tenxơ đối xứng hoàn toàn được xác định bởi các trị chính và các phương chính. Các phương chính không thuộc vào các lượng nội tại vì rằng phương của chúng phụ thuộc vào chuẩn đã chọn để xác định chúng. Như vậy một tenxơ đối xứng chỉ có ba lượng nội tại đó là các trị chính. Đó là các bất biến độc lập của tenxơ.

Để thiết lập hệ ba bất biến độc lập của S ta có thể chọn hoặc ba trị chính $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ hoặc ba bất biến chính $J_1 J_2 J_3$ hoặc các mômen $\bar{J}_1 \bar{J}_2 \bar{J}_3$.

5. Các phép toán đối xứng với tenxơ đối xứng

a. Tổng của hai tenxơ đối xứng

Giả sử $C = A + B$ với $A = A^t$ và $B = B^t$

Vậy $C^t = C$ nên tổng của hai tenxơ đối xứng là một tenxơ đối xứng.

Nếu A và B có cùng phương chính

$$A = a_1 \vec{u}_1 \otimes \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 \otimes \vec{u}_2 + a_3 \vec{u}_3 \otimes \vec{u}_3$$

$$B = b_1 \vec{u}_1 \otimes \vec{u}_1 + b_2 \vec{u}_2 \otimes \vec{u}_2 + b_3 \vec{u}_3 \otimes \vec{u}_3$$

thì C cũng có cùng phương chính thực vậy vì :

$$C = (a_1 + b_1) \vec{u}_1 \otimes \vec{u}_1 + (a_2 + b_2) \vec{u}_2 \otimes \vec{u}_2 + (a_3 + b_3) \vec{u}_3 \otimes \vec{u}_3$$

Nếu A và B không cùng có phương chính thì phương chính của C nói chung là khác với A và B.

b. Tích của hai tenxơ đối xứng

Giả sử $C = AB$ với $A^t = A$ $B^t = B$

Vậy ta thấy dễ dàng rằng

$$C^t = (AB)^t = B^t A^t = B.A$$

Nói chung $BA \neq AB$ nên một cách tổng quát C không phải là đối xứng.

* *Định lí :* Tích giao hoán đưa đến cùng các phương chính.

Hệ quả : Nếu A và B có cùng phương chính, C sẽ đối xứng và có cùng phương chính với A và B.

$$C = a_1 b_1 \vec{u}_1 \otimes \vec{u}_1 + a_2 b_2 \vec{u}_2 \otimes \vec{u}_2 + a_3 b_3 \vec{u}_3 \otimes \vec{u}_3$$

nhiều vậy $A^2 \dots A^n$ là đối xứng, có cùng phương chính với A.

* Chú ý các phép nhân như ta đã định nghĩa :

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \otimes \vec{u}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A \cdot B &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a_1 b_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 b_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 b_3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Vì vậy

$$C = a_1 b_1 \vec{u}_1 \otimes \vec{u}_1 + a_2 b_2 \vec{u}_2 \otimes \vec{u}_2 + a_3 b_3 \vec{u}_3 \otimes \vec{u}_3 \}$$

* Ta có thể kết hợp với A và B để thành một tenxơ đối xứng (trong trường hợp hai tenxơ không có cùng các phương chính chung) như sau :

$$\begin{aligned}C &= AB + BA \\ C^t &= (AB + BA)^t = (AB)^t + (BA)^t = \\ &= B^t A^t + A^t B^t = AB + BA = C\end{aligned}$$

Song trong trường hợp chung các phương chính của C là khác với phương chính của A và B.

c. Căn số của một tenxơ xác định dương

Nhắc lại rằng một tenxơ được xác định dương là một tenxơ đối xứng S sao cho :

$$\vec{S} \vec{V}, \vec{V} > 0 \text{ với mọi véc-tơ } \vec{V} \neq 0$$

Vì S là đối xứng nên nó nhận ba trị chính thức $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ và ba phương chính thức \vec{u}_i với $S \vec{u}_i = \lambda_i \vec{u}_i$ (i ở đây không phải chỉ là số cám).

Từ đó ta có kết luận rằng ba trị chính là dương $\lambda_i > 0$. Vậy các căn số của λ_i là thực.

Ta gọi căn số của tensor xác định dương S là tensor đối xứng \vec{u} có các phương chính như S và có các trị chính là $\lambda_1^{1/2}, \lambda_2^{1/2}, \lambda_3^{1/2}$.

Thực vậy, giả sử u được xác định bởi :

$$u = \begin{bmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{1/2} \end{bmatrix}_{(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)}$$

Vậy ta phải có

$$u^2 = u \cdot u = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}_{(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)} = S$$

Ta viết $u = S^{1/2}$

Ví dụ :

Giả sử ta có tensor được xác định dương S được cho trong hệ trục \vec{e}_i bởi ma trận :

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

Trị chính và phương chính kết hợp là :

$$\lambda_1 = 1, \quad \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\lambda_2 = 5, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\lambda_3 = 9, \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vậy tenxơ S được diễn đạt trong hệ trục chính bởi ma trận :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}_{(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)}$$

Sự chuyển đổi từ hệ \vec{e}_i sang \vec{u}_i được thực hiện bởi ma trận chuyển đổi trực giao Q :

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_i)}$$

Vậy căn số của S là :

$$u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{(\vec{u}_i)}$$

Để có được ma trận u trong hệ (\vec{e}_i) ta thực hiện phép chuyển đổi từ (\vec{u}_i) sang (\vec{e}_i) nhờ ma trận $Q^{-1} = Q^t$ và nhờ biểu thức ma trận :

$$u_{(\vec{e}_i)} = Q \cdot \vec{u}(\vec{u}_i) Q^t$$

Cuối cùng ta có :

$$u = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} & \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} & \frac{\sqrt{5}+1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

Để kiểm tra lại ta có thể thực hiện tích $u^2 = u \cdot u$ và ta lại tìm thấy biểu thức của S trong hệ (\vec{e}_i) .

Chú ý : Nếu S là xác định dương, những trị chính của nó sẽ là dương và ta có : $\det S = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > 0$. Đặc biệt $\det S \neq 0$ vậy S là đảo ngược (S^{-1} tồn tại). Căn số của $U = S^{1/2}$ cũng là một tenxơ xác định dương vậy U^{-1} là tồn tại và $(U^{-1})^2 = S^{-1}$.