

CHƯƠNG II

PHÉP BIẾN ĐỔI TỌA ĐỘ. TENXÓ

2-1. Phép biến đổi tọa độ

Ta hãy lấy một ví dụ đơn giản thường dùng.

Hệ tọa độ độc cực trong mặt phẳng

Trong mặt phẳng ta chọn một hệ quy chiếu vuông góc $(0, X^1, X^2)$ với các vectơ đơn vị \vec{a}_1, \vec{a}_2 .

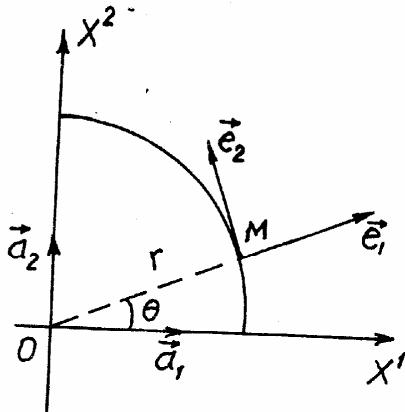
Tọa độ của điểm M trong hệ quy chiếu đó là X^i ($i = 1, 2$).

Nếu sử dụng hệ tọa độ độc cực, tọa độ của M sẽ là (r, θ) với $r = \overrightarrow{OM}$ và $\theta = (\vec{a}_1, \overrightarrow{OM})$.

Tương quan giữa các tọa độ là như sau :

$$\begin{aligned} X^1 &= r\cos\theta \\ X^2 &= r\sin\theta \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (2-1)$$

Hoặc ngược lại :



Hình 2-1.

$$r = \sqrt{(X^1)^2 + (X^2)^2} \quad \theta = \operatorname{Arctg} \frac{X^2}{X^1} \quad (2-2)$$

Theo định nghĩa ta gọi đường tọa độ qua $M(r, \theta)$ là tập hợp của những điểm M có một trong hai tọa độ của M được xem là hằng và tọa độ kia biến thiên bất kì. Như vậy khi ta cho r thay đổi và θ là cố định thì đường tọa độ là nửa đường thẳng OM . Ngược lại nếu cho r cố định và θ thay đổi thì đường tọa độ là đường tròn tâm O bán kính OM .

Chúng ta hãy tính vi phân $d\vec{M}$ của véc-tơ bán kính \vec{OM}

$$d\vec{M} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} d\theta \quad (2-3)$$

Các véc-tơ $\frac{\partial \vec{M}}{\partial r} = \vec{e}_1$ và $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} = \vec{e}_2$ như được biểu diễn trên hình vẽ và được tính theo các véc-tơ nên \vec{a}_i như sau :

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= X^1 \vec{a}_1 + X^2 \vec{a}_2 \\ \vec{OM} &= r \cos \theta \cdot \vec{a}_1 + r \sin \theta \cdot \vec{a}_2\end{aligned}$$

Từ đó ta có :

$$\left. \begin{aligned}\vec{e}_1 &= \cos \theta \cdot \vec{a}_1 + \sin \theta \cdot \vec{a}_2 \\ \vec{e}_2 &= -r \sin \theta \vec{a}_1 + r \cos \theta \vec{a}_2\end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

Nếu tính tích vô hướng của \vec{e}_1 và \vec{e}_2 ta thấy tích đó bằng không, vậy chúng vuông góc với nhau. Độ dài của \vec{e}_1 và \vec{e}_2 là 1 và r.

Biểu thức vi phân (2-3) có thể viết lại như sau :

$$d\vec{M} = dr \vec{e}_1 + d\theta \vec{e}_2 \quad (2-5)$$

Ở mỗi điểm M bất kì chúng ta gán vào đó một hệ tọa độ địa phương (M, \vec{e}_i), \vec{e}_i là các véc-tơ tiếp tuyến với các đường tọa độ đi qua M. Trong tương quan của biểu thức (2-5) trên đây các thành phần dr và $d\theta$ của véc-tơ vi phân $d\vec{M}$ trong nền địa phương \vec{e}_i được gọi là các thành phần phản biến của $d\vec{M}$ (xem định nghĩa trang 20). Nay giờ ta hãy tìm cách biểu diễn các thành phần đó qua nền \vec{a}_i .

Từ các biểu thức (2-1) ta có :

$$\left. \begin{aligned}dX^1 &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\ dX^2 &= \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta\end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

Có thể biểu diễn dưới dạng ma trận như sau :

$$\begin{bmatrix} dX^1 \\ dX^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr \\ d\theta \end{bmatrix} \text{ với } r \neq 0 \quad (2-7)$$

Từ đó ta có thể tính dr và $d\theta$

$$\begin{aligned} dr &= \frac{X^1}{\sqrt{(X^1)^2 + (X^2)^2}} dX^1 + \frac{X^2}{\sqrt{(X^1)^2 + (X^2)^2}} dX^2 \\ d\theta &= \frac{-X^2}{(X^1)^2 + (X^2)^2} dX^1 + \frac{X^1}{(X^1)^2 + (X^2)^2} dX^2 \end{aligned} \quad (2-8)$$

Hay có thể viết :

$$\begin{bmatrix} dr \\ d\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X^1}{\sqrt{(X^1)^2 + (X^2)^2}} & \frac{X^2}{\sqrt{(X^1)^2 + (X^2)^2}} \\ \frac{-X^2}{(X^1)^2 + (X^2)^2} & \frac{X^1}{(X^1)^2 + (X^2)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX^1 \\ dX^2 \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

Các định thức của các ma trận biến đổi nền của (2-7) và (2-9) có trị số là r và $\frac{1}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}}$. Tích của chúng là 1, vậy các định thức đó là nghịch đảo nhau.

Chú ý rằng những phần tử của những ma trận thay đổi nền (2-7) và (2-9) là những hàm của tọa độ M .

Bây giờ ta hãy tính \vec{dM}^2 , bình phương khoảng cách giữa hai điểm rất gần nhau. Khoảng cách đó thường được gọi là khoảng cách cơ bản. Ta cũng xét cả hai tọa độ xem chúng có bằng nhau hay không ?

a. Trong tọa độ Đề các [hệ quy chiếu $(0, \vec{a}_i)$]

$$\text{Đặt } \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \gamma_{ij} \text{ với } [\gamma_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ta có : } \vec{dM}^2 = dX^i \vec{a}_i \cdot dX^j \vec{a}_j = dX^i dX^j \gamma_{ij}$$

$$\text{Vậy : } \vec{dM}^2 = (dX^1)^2 + (dX^2)^2 \quad (2-10)$$

b. Trong tọa độ đặc cực [hệ quy chiếu (M, \vec{e}_i)]

$$\text{Đặt } dr = d\eta^i, d\theta = d\eta^j \text{ và } \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = g_{ij}$$

$$\vec{dM}^2 = d\eta^i \cdot d\eta^j \cdot g_{ij}$$

$$\text{Với } [g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Vậy : } \vec{dM}^2 = dr^2 + r^2.d\theta^2 \quad (2-11)$$

Sử dụng (2-6) để tính biểu thức (2-10) ta có :

$$\begin{aligned} \vec{dM}^2 &= (dX^1)^2 + (dX^2)^2 \\ &= (\cos\theta.dr - r\sin\theta.d\theta)^2 + s(\sin\theta.dr + r\cos\theta.d\theta)^2 \end{aligned}$$

$$\vec{dM}^2 = dr^2 + r^2.d\theta^2$$

Như vậy \vec{dM} là như nhau trong cả hai hệ trục tọa độ.

Một cách tổng quát giả sử trong môi trường liên tục chuyển động chúng ta có hai hệ trục tọa độ ξ^i và η^i với ($i = 1, 2, 3$). Biểu thức tương quan giữa chúng là :

$$\xi^i = \xi^i(\eta^1, \eta^2, \eta^3) \quad (2-12)$$

Vì phân của ξ^i sẽ là :

$$d\xi^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^j} d\eta^j \quad (2-13)$$

Biểu thức này tương đương với biểu thức (2-6) trong ví dụ đơn giản trên đây. $\frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^j}$ thành lập một ma trận với i là hàng và j là cột. Định thức của ma trận là Jacobiên của phép biến đổi. Vì rằng giữa các tọa độ phải có một sự tương ứng nhất nhất nên Jacobiên phải khác không và từ đó ta cũng có thể tính ngược lại.

$$d\eta^i = \frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^j} d\xi^j \quad (2-14)$$

Ma trận biến đổi $\frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^j}$ là ma trận nghịch đảo của $\frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^j}$.

$$\text{Thực vậy vì } \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^k} \cdot \frac{\partial \eta^j}{\partial \xi^k} = \delta_k^i \quad (k = 1, 2, 3)$$

Giả sử ζ^i là các đường tọa độ qua một điểm M nào đó trong không gian η^i . Xét vi phân $d\vec{M}$. Vi phân đó là một hàm của ζ^i . Ta có thể viết :

$$d\vec{M} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \zeta^i} d\zeta^i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2-15)$$

Biểu thức $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \zeta^i} = \vec{e}_i$ được gọi là các vectơ cơ sở hoặc vectơ nền của hệ tọa độ địa phương tại M .

Chúng hướng theo đường tiếp tuyến của các đường tọa độ. Biểu thức (2-15) được viết lại dưới dạng

$$d\vec{M} = d\zeta^i \cdot \vec{e}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2-16)$$

Tương tự như vậy ta có thể biểu diễn $d\vec{M}$ qua các vectơ nền \vec{e}_i' của hệ trục η^i

$$d\vec{M} = d\eta^i \cdot \vec{e}_i' \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2-17)$$

Xét tương quan giữa \vec{e}_i , \vec{e}_i' và giữa $d\zeta^i$, $d\eta^i$.

Theo định nghĩa ta có :

$$\vec{e}_j' = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \eta^j} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \zeta^i} \cdot \frac{\partial \zeta^i}{\partial \eta^j}$$

Vậy :

$$\vec{e}_j' = \frac{\partial \zeta^i}{\partial \eta^j} \cdot \vec{e}_i \quad (2-18)$$

Theo (2-14) ta viết lại tương quan giữa $d\eta^i$ và $d\zeta^i$ để so sánh

$$d\eta^i = \frac{\partial \eta^i}{\partial \zeta^j} d\zeta^j \quad (2-19)$$

Như vậy các vectơ nền \vec{e}_i' được biến đổi nhờ ma trận $A = \left[\frac{\partial \zeta^i}{\partial \eta^j} \right]$ và các thành phần dM được biến đổi nhờ ma trận $B = \left[\frac{\partial \eta^i}{\partial \zeta^j} \right]$.

Các phép biến đổi đó ngược nhau nên đối tượng \vec{dM} bất biến khi thay hệ trục tọa độ. Thực vậy :

$$\vec{dM} = d\eta^j \cdot \vec{e}_j = \frac{\partial \eta^j}{\partial \xi^i} d\xi^i \cdot \vec{e}_j$$

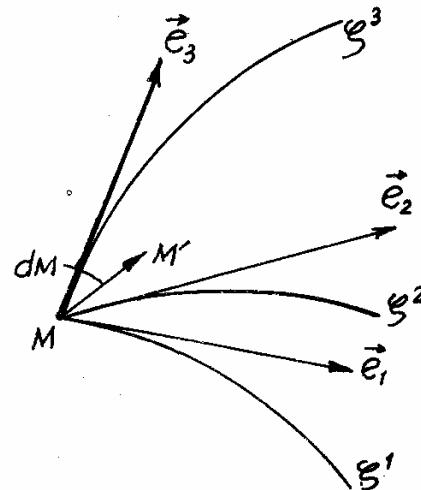
$$\vec{dM} = \frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^j} \cdot \vec{e}_i \cdot \widehat{d\xi^i} = d\xi^i \vec{e}_i$$

Bây giờ giả sử ta có một đối tượng Y nào đó, qua sự biến đổi của hệ trục tọa độ, Y được biến đổi nhờ ma trận A giống như các véctơ cơ sở \vec{e}^i thì ta gọi đối tượng đó là hiệp biến. Các véctơ nền \vec{e}_i là các vectơ nền hiệp biến. Nếu như đại lượng đó được biến đổi nhờ ma trận B thì ta gọi đại lượng đó là phản biến.

Những điều chúng ta vừa nói trên đây là cho một không gian ba chiều. Tất cả đều đúng với một không gian n chiều. Ta chỉ cần lấy chỉ số i, j = 1, 2 ..., n. Dĩ nhiên ta không thể có một hình ảnh cụ thể như (h.2-2) được nữa.

Trong không gian n chiều ta có định nghĩa về véctơ như sau :

Nếu có một đối tượng \vec{V} được biểu diễn qua các véctơ nền giống như dM



Hình 2-2.

$$\vec{V} = V^i \cdot \vec{e}_i \quad (2-20)$$

Các thành phần $V^i(\xi^i)$ của \vec{V} biến đổi giống như các thành phần của dM .

$$V^i(\eta^i) = \frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^j} \cdot V^j(\xi^i) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (2-21)$$

thì đối tượng đó sẽ bất biến đổi với phép biến đổi tọa độ và được gọi là véctơ.

Véc-tơ cơ sở hay còn gọi là véc-tơ nền là phần tử gốc của mỗi véc-tơ. V^i được gọi là các thành phần của véc-tơ \vec{V} . Ở đây V^i được biến đổi nhờ ma trận B nên thành phần đó được gọi là thành phần phản biến trong hệ nền hiệp biến của \vec{V} .

Ta cũng có thể biểu diễn \vec{V} qua các thành phần hiệp biến :

$$\vec{V} = V_i \vec{e}^i \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

Với V_i (chỉ số ở dưới) biến đổi trong phép biến đổi tọa độ như sau :

$$V'_i(\eta^i) = \frac{\partial \zeta^j}{\partial \eta^i} \cdot V_j(\zeta^i) \quad (i, j = 1, 2, \dots n) \quad (2-22)$$

V_i được gọi là thành phần hiệp biến của \vec{V} trong hệ nền phản biến \vec{e}^i (ta sẽ nói rõ thêm ở phần sau).

2-2. Tích tensor

Trong trường véc-tơ V n chiều chúng ta kết hợp với nó một không gian mới n^2 chiều và kí hiệu $V \otimes V$ không gian đó được gọi là tích tensor của không gian V với chính nó. Giả sử \vec{V} và \vec{W} là hai véc-tơ thuộc về V vậy $\vec{V} \otimes \vec{W}$ được gọi là tích tensor của hai véc-tơ. Phép ánh xạ đó có các tính chất sau đây :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{V} \otimes (\vec{W}_1 \otimes \vec{W}_2) = \vec{V} \otimes \vec{W}_1 + \vec{V} \otimes \vec{W}_2 \\ (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \otimes \vec{W} = \vec{V}_1 \otimes \vec{W} + \vec{V}_2 \otimes \vec{W} \\ a \vec{W} \otimes \vec{V} = \vec{W} \otimes a \vec{V} = a(\vec{W} \otimes \vec{V}) \\ \vec{V} \otimes \vec{W} \neq \vec{W} \otimes \vec{V} \end{array} \right\} \quad (2-23)$$

Nghĩa là nó có đủ các tính chất của tích tuyến tính đối với hai thừa số. Không gian véc-tơ $V \otimes V$ được thiết lập bởi tất cả các tổ hợp tuyến tính dạng :

$$a_{ij}(\vec{V} \otimes \vec{W}_j)$$

Bây giờ ta giả sử ta có hai véc-tơ $\vec{V} = V^i \vec{e}_i$ và $\vec{W} = W^j \vec{e}_j$. Các tính chất tuyến tính đưa đến kết quả là :

$$\vec{V} \otimes \vec{W} = V^i \cdot W^j (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \quad (2-24)$$

Ta thấy ngay rằng n^2 tích $(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)$ tạo nên một nền mới của không gian véctơ $V \otimes V$. Tích tenxơ của hai véctơ được gọi là một nhị tích. Ta có thể mở rộng khái niệm trên đây cho một tích tenxơ của nhiều véctơ và tạo nên một không gian véctơ mới với hệ nền mới với các dạng :

$$\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l$$

Các tích đó được gọi là đa tích.

Để làm sáng tỏ hãy xét trường hợp đối với không gian ba chiều có các trục tọa độ \vec{x} \vec{y} \vec{z} thẳng trực giao. Giả sử trong không gian đó ta có hai véctơ \vec{X} và \vec{Y} . Gọi tích tenxơ của \vec{X} và \vec{Y} là đại lượng $\vec{X} \otimes \vec{Y}$ có chín thành phần. Các thành phần đó là những phần tử của ma trận 3×3 được thành lập như sau :

$$\vec{X} \otimes \vec{Y} = XY^t = \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{bmatrix} [Y^1 Y^2 Y^3]$$

Trong đó X^1 X^2 X^3 và Y^1 Y^2 Y^3 là các thành phần của \vec{X} và \vec{Y} . Ta sử dụng kí hiệu Y^t để chỉ ma trận chuyển vị của \vec{Y} .

$$\text{Ta có : } \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{bmatrix} [Y^1 Y^2 Y^3] = \begin{bmatrix} X^1 Y^1 & X^1 Y^2 & X^1 Y^3 \\ X^2 Y^1 & X^2 Y^2 & X^2 Y^3 \\ X^3 Y^1 & X^3 Y^2 & X^3 Y^3 \end{bmatrix}$$

Ma trận đó có thể viết dưới dạng :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X^1 Y^1 & X^1 Y^2 & X^1 Y^3 \\ X^2 Y^1 & X^2 Y^2 & X^2 Y^3 \\ X^3 Y^1 & X^3 Y^2 & X^3 Y^3 \end{bmatrix} &= X^1 Y^1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + X^2 Y^1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ &\quad + \dots + X^3 Y^1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= X^1 Y^1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [100] + X^2 Y^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [100] + \dots + X^3 Y^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [001] \end{aligned}$$

Ta dễ dàng nhận thấy rằng biểu thức đó có nghĩa là :

$$\vec{X} \otimes \vec{Y} = X^1 Y^1 (\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1) + X^2 Y^1 (\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1) + \dots + X^3 Y^3 (\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3)$$

Hay viết theo chỉ số :

$$\vec{X} \otimes \vec{Y} = X^i Y^j (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)$$

Như vậy $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ tạo nên một hệ nền mới và $X^i Y^j$ là các thành phần của tích $\vec{X} \otimes \vec{Y}$ trong hệ nền đó.

2-3. Định nghĩa về tenxơ

Nếu có một đối tượng T sao cho các thành phần T^{ij} của nó trong hệ nền $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ được biến đổi theo công thức :

$$T^{ij} = \frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial \eta^j}{\partial \xi^q} T^{pq} \quad (2-25)$$

thì T là bất biến trong phép biến đổi từ hệ quy chiếu ζ^i sang η^i . Thực vậy, theo định nghĩa ta phải có :

$$T = T^{ij} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)$$

Hay :

$$T = \frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial \eta^j}{\partial \xi^q} T^{pq} \left(\frac{\partial \xi^p}{\partial \eta^i} \cdot \frac{\partial \xi^q}{\partial \eta^j} \right) (\vec{e}_p \otimes \vec{e}_q)$$

$$T = T^{pq} (\vec{e}_p \otimes \vec{e}_q) = T^{ij} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)$$

T được gọi là một tenxơ hạng hai và T^{ij} là các thành phần phản biến của T trong hệ nền hiệp biến $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$

Với định nghĩa đó ta thấy với vectơ \vec{V} được xác định trong hệ nền \vec{e}_i với biểu thức như đã có :

$$\vec{V} = V^i \vec{e}_i$$

Là một tenxơ hạng nhất vì \vec{V} cũng bất biến trong phép biến đổi tọa độ.

Với một hàm J nào đó là một hàm số đối với các điểm mà trị số của nó không thay đổi trong phép biến đổi hệ tọa độ thì hàm đó được gọi là tenxơ hạng không.

$$J'(\eta^i) = J(\zeta^i)$$

Từ đó ta có thể mở rộng định nghĩa cho một tenxơ hạng bất kì, chẳng hạn tenxơ hạng năm.

$$T = T^{ijklm} \cdot \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l \otimes \vec{e}_m \quad (2-26)$$

Trong đó các thành phần T^{ijklm} được biến đổi theo kiểu phản biến

$$T^{ijklm} = \frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^p} \cdot \frac{\partial \eta^j}{\partial \xi^q} \cdot \frac{\partial \eta^k}{\partial \xi^r} \cdot \frac{\partial \eta^l}{\partial \xi^s} \cdot \frac{\partial \eta^m}{\partial \xi^t} \cdot T^{ijklm} \quad (2-27)$$

và được gọi là các thành phần phản biến của T trong hệ nền hiệp biến.

Ta có nhận xét sau đây : Tất cả mọi phần tử của không gian véctơ $V \otimes V$ là một tenxơ hạng hai trong đó có cả các nhị tích. Như vậy một nhị tích là một tenxơ hạng hai nhưng điều ngược lại là không đúng vì một tenxơ hạng hai có thể là một tổ hợp của nhiều nhị tích. Ví dụ :

$$T = \alpha(\vec{X} \otimes \vec{Y}) + \beta(\vec{U} \otimes \vec{V}) + \gamma(\vec{R} \otimes \vec{S})$$

Nhận xét đó cũng có thể mở rộng cho tenxơ hạng bất kì.

2-4. Véctơ cơ sở phản biến

Như trên chúng ta đã có (2-18)

$$\vec{e}_j = \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^j} \cdot \vec{e}_i$$

\vec{e}_i được gọi là các véctơ cơ sở hay véctơ nền hiệp biến.

Bây giờ giả sử ta có một tenxơ hạng hai nào đó $\alpha = \alpha^{ij} \cdot \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ và trong hệ tọa độ ζ^i ta đưa vào một véctơ mới :

$$\vec{e}^i = \alpha^{ij} \cdot \vec{e}_j \quad (2-28)$$

(Chú ý \vec{e}^i với chỉ số viết lên trên)

Tương tự như vậy trong hệ tọa độ η^i ta đưa vào véctơ

$$\vec{e}^p = \alpha'^{pq} \vec{e}_q \quad (2-29)$$

Thì tương quan giữa \vec{e}^i và \vec{e}^p là như sau :

Ta có :

$$\vec{e}_q = \frac{\partial \zeta^s}{\partial \eta^q} \cdot \vec{e}_s$$

và $\alpha'^{qp} = \frac{\partial \eta^p}{\partial \zeta^i} \cdot \frac{\partial \eta^q}{\partial \zeta^j} \alpha^{ij}$

Thay vào (2-29) ta có :

$$\vec{e}^p = \frac{\partial \eta^p}{\partial \zeta^i} \cdot \frac{\partial \eta^q}{\partial \zeta^j} \alpha^{ij} \frac{\partial \zeta^s}{\partial \eta^q} \vec{e}_s$$

Để ý đến tích

$$\frac{\partial \eta^q}{\partial \zeta^j} \cdot \frac{\partial \zeta^s}{\partial \eta^q} = \delta_j^s$$

Ta có thể viết gọn lại như sau :

$$\begin{aligned} \vec{e}^p &= \frac{\partial \eta^p}{\partial \zeta^i} \alpha^{ij} \vec{e}^j = \frac{\partial \eta^p}{\partial \zeta^i} \vec{e}^i \\ \vec{e}^p &= \frac{\partial \eta^p}{\partial \zeta^i} \vec{e}^i \end{aligned} \quad (2-30)$$

Tương quan giữa \vec{e}^p và \vec{e}^i theo dạng phản biến nên \vec{e}^i được gọi là các véctơ cơ sở (hoặc nền) phản biến.

Véctơ cơ sở phản biến phụ thuộc vào hệ tọa độ và tenxơ α .

2-5. Các thành phần hiệp biến của tenxơ α

Từ biểu thức (2-28) ta thấy rằng nếu biết \vec{e}^i thì ngược lại có thể tính được \vec{e}_j :

$$\vec{e}_j = \alpha_{ji} \vec{e}^i \quad (2-31)$$

Ma trận α_{ji} là ma trận nghịch đảo của α^{ji} và điều kiện đòi hỏi là định thức $|\alpha^{ji}|$ phải khác 0 ($\Delta \neq 0$).

Các thành phần của ma trận nghịch đảo được tính với biểu thức :

$$\alpha_{ij} = \frac{k^{ij}}{\Delta} \quad (2-32)$$

Trong đó k_{ij} là phần phụ đại số của các phần tử của ma trận α^{ij} và $\Delta = \det \alpha^{ij}$.

Biểu thức (2-31) được viết trong hệ tọa độ ξ^i nếu chuyển sang hệ tọa độ mới η^i ta có :

$$\vec{e}_j' = \alpha'_{ji} \vec{e}^i$$

Nhưng

$$\vec{e}_j' = \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^j} \vec{e}_i \text{ và } \vec{e}^i = \frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^s} \vec{e}_s$$

Nên :

$$\alpha'_{ji} \vec{e}^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^j} \vec{e}_i = \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^j} \alpha_{ik} \vec{e}^k = \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^j} \cdot \frac{\partial \xi^k}{\partial \eta^l} \alpha_{lj} \vec{e}^l$$

Từ đó ta có :

$$\alpha'_{ji} = \frac{\partial \xi^p}{\partial \eta^j} \cdot \frac{\partial \xi^q}{\partial \eta^j} \alpha_{pq} \quad (2-33)$$

Như vậy các thành phần α_{pq} biến đổi theo kiểu hiệp biến nên được gọi là các thành phần hiệp biến của tensor α trong hệ véctơ cơ sở phản biến \vec{e}^i

Ta có thể thiết lập biểu thức tương quan giữa α_{ij} và α^{qp} như sau :

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j &= \alpha_{ij} \cdot \alpha^{iq} \cdot \alpha^{jp} \vec{e}_p \otimes \vec{e}_q = \delta_i^p \alpha^{jq} \vec{e}_p \otimes \vec{e}_q \\ \alpha_{ij} \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j &= \alpha^{pq} \vec{e}_p \otimes \vec{e}_q \end{aligned}$$

2-6. Các thành phần hiệp biến của véctơ bất kì

Với một véctơ bất kì \vec{V} ta có thể viết :

$$\vec{V} = V^j \vec{e}_j = V^j \alpha_{ij} \vec{e}^i = V_i \vec{e}^i$$

Nghĩa là :

$$V_i = \alpha_{ij} V^j \quad (2-34)$$

Như vậy nhờ thành phần hiệp biến của α mà ta đã hạ chỉ số của V^j cũng như của vectơ cơ sở \vec{e}^j . V_i được biến đổi theo kiểu hiệp biến

$$V'_i = \frac{\partial \xi^k}{\partial \eta^i} V_k \quad (2-35)$$

V_i được gọi là các thành phần hiệp biến của vectơ \vec{V} trong cơ sở phản biến \vec{e}^i . Trong trường hợp tổng quát các thành phần hiệp biến và phản biến của vectơ là khác nhau $A^j \neq A_j$.

2-7. Các thành phần hiệp biến và hỗn tạp của tensor

Một tensor hạng bốn có thể viết dưới các dạng sau đây :

$$\begin{aligned} T &= T^{ijklm} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l \times \vec{e}_m = \\ &= T^{ijklm} \alpha_{ip} \alpha_{jq} \alpha_{km} \alpha_{ln} \vec{e}^p \otimes \vec{e}^q \otimes \vec{e}^m \otimes \vec{e}^n \\ T &= T_{pqmn} \vec{e}^p \otimes \vec{e}^q \otimes \vec{e}^m \otimes \vec{e}^n = \\ &= T_{jk}^{il} \alpha_{jp} \alpha_{kq} \vec{e}_i \otimes \vec{e}^p \otimes \vec{e}^q \otimes \vec{e}^l \\ T &= T_{pq}^{il} \vec{e}_i \otimes \vec{e}^p \otimes \vec{e}^q \otimes \vec{e}_l \end{aligned}$$

Thành phần T^{ijklm} là các thành phần phản biến.

Các thành phần T_{pqmn} là thành phần hiệp biến và T_{pq}^{il} là thành phần hỗn tạp của tensor T .

Công thức biến đổi tọa độ của các thành phần hỗn tạp là như sau :

$$T_{nr}^{m...s} = \frac{\partial \eta^m}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \xi^p}{\partial \eta^n} \cdot \frac{\partial \xi^q}{\partial \eta^r} \cdot \frac{\partial \eta^s}{\partial \xi^l} \cdot T_{pq}^{i...l} \quad (2-36)$$