

## PHẦN 1

# TENSOR

## CHƯƠNG 1 CÁCH VIẾT THEO CHỈ SỐ

### 1-1. Biến số

Để rút gọn cách viết người ta sử dụng cách diễn đạt theo chỉ số như sau : Các biến số  $x, y, z, t\dots$  được biểu diễn bằng một chữ cái với một chỉ số kèm theo. Ví dụ với chữ  $x$  chẳng hạn, như vậy n biến số độc lập sẽ là  $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$  hoặc  $x^1, x^2, x^3, x^4$ . Chỉ số có thể đặt ở dưới hoặc ở trên. Tuy nhiên, với cùng biến số  $x$  chẳng hạn thì khi có chỉ số dưới sẽ có giá trị khác với khi có chỉ số trên.

Với quy ước đó ta dễ dàng biểu diễn một tổng có dạng :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = \sum_{i=1}^{j=4} a_i x_i$$

$$\frac{\partial u}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial u}{\partial x^3} dx^3 = \sum_{i=1}^{j=3} \frac{\partial u}{\partial x^i} dx^i$$

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial y^1}{\partial x^\beta} + \frac{\partial y^2}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial y^2}{\partial x^\beta} + \dots + \frac{\partial y^n}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial y^n}{\partial x^\beta} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial y^i}{\partial x^\beta}$$

dưới dạng tổng theo hai chỉ số khác nhau như :

$$\sum_{i=1}^{i=3} \sum_{j=1}^{j=2} a_{ij} b^{ij} \text{ hay } \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} A^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}$$

Các biểu thức đó có nghĩa là :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=3} \sum_{j=1}^{j=2} a_{ij} b^{ij} &= \sum_{i=1}^{i=3} a_{i1}^{b^{i1}} + a_{i2}^{b^{i2}} = \\ &= a_{11} b^{11} + a_{21} b^{21} + a_{31} b^{31} + a_{12} b^{12} + a_{22} b^{22} + a_{32} b^{32} \\ \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} A^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} &= \\ &= \sum_{\beta=1}^{\beta=n} \left[ A^{1\beta} \frac{\partial x^1}{\partial y^j} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^i} + A^{2\beta} \frac{\partial x^2}{\partial y^j} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^i} + \dots + A^{n\beta} \frac{\partial x^n}{\partial y^j} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^i} \right] = \\ &= A^{11} \frac{\partial x^1}{\partial y^i} \frac{\partial x^1}{\partial y^j} + A^{21} \frac{\partial x^2}{\partial y^i} \frac{\partial x^1}{\partial y^j} + \dots + A^{n1} \frac{\partial x^n}{\partial y^i} \frac{\partial x^1}{\partial y^j} + \\ &+ A^{12} \frac{\partial x^1}{\partial y^i} \frac{\partial x^2}{\partial y^j} + A^{22} \frac{\partial x^2}{\partial y^i} \frac{\partial x^2}{\partial y^j} + \dots + A^{n2} \frac{\partial x^n}{\partial y^i} \frac{\partial x^2}{\partial y^j} + \\ &+ \dots + \dots + \dots + \dots + \\ &+ A^{1n} \frac{\partial x^1}{\partial y^i} \frac{\partial x^n}{\partial y^j} + A^{2n} \frac{\partial x^2}{\partial y^i} \frac{\partial x^n}{\partial y^j} + \dots + A^{nn} \frac{\partial x^n}{\partial y^i} \frac{\partial x^n}{\partial y^j} \end{aligned}$$

Chúng ta có thể biểu diễn một tích dưới dạng :

$$\prod_{i=1}^{i=3} (a_i^1 - b_i^1) = (a_1^1 - b_1^1)(a_2^1 - b_2^1)(a_3^1 - b_3^1)$$

### 1-2. Quy ước Anh-stanh (Einstein)

Ta đưa ra quy ước sau đây để loại bỏ dấu tổng :

Nếu trong một đơn thức một chỉ số được nhắc lại một lần trên và dưới hoặc ngược lại điều đó có nghĩa là ta phải lấy tổng đối với chỉ số đó.

Ví dụ :

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i y^i = a_1 y^1 + a_2 y^2 + \dots + a_n y^n$$

Được viết gọn lại như sau :

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i y^i = a_i y^i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Biểu thức  $a_k^l \cdot b_j^k$  với ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) có nghĩa là :

$$a_k^l \cdot b_j^k = a_1^l b_1^k + a_2^l b_2^k + \dots + a_n^l b_n^k$$

Biểu thức :  $a_k^l \cdot b_j^k \cdot c^l$  với ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) và ( $l = 1, 2, \dots, n$ )  
có nghĩa là :

$$\begin{aligned} a_k^l \cdot b_j^k \cdot c^l &= a_1^l b_1^k c^l + a_2^l b_2^k c^l + \dots + a_m^l b_m^k c^l + \\ &+ a_1^l b_1^k c^2 + a_2^l b_2^k c^2 + \dots + a_m^l b_m^k c^2 + \\ &+ \dots + \dots + \dots + \\ &+ a_1^l b_1^k c^n + \dots + a_m^l b_m^k c^n \end{aligned}$$

Quy ước đó áp dụng cả cho các đạo hàm riêng với hàm n biến số.

$$\frac{\partial x^2}{\partial y^\beta} dy^\beta = \frac{\partial x^2}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2} dy^2 + \dots + \frac{\partial x^2}{\partial y^n} dy^n$$

Biểu thức  $\frac{\partial S}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial y^k}$  có nghĩa là :

$$\frac{\partial S}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial y^k} = \frac{\partial S}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial y^k} + \frac{\partial S}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial y^k} + \dots + \frac{\partial S}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial y^k}$$

Các chỉ số để chỉ phép cộng nếu trên được gọi là "chỉ số cảm". Ta có thể thay đổi chỉ số cảm mà ý nghĩa của biểu thức không thay đổi. Ví dụ :

$$ab_i = a^m b_{\alpha} = a^m b_{\beta} = \dots$$

$$\frac{\partial S}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial y^k} = \frac{\partial S}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial x^m}{\partial y^k} = \frac{\partial S}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y^k} = \dots$$

### 1-3. Kí hiệu Krô-nê-kê (Kronecker)

Kí hiệu Krô-nê-kê còn được gọi là kí hiệu đường chéo chính. Kí hiệu đó được viết như sau :

$$\begin{aligned}\delta_{ij} &= 1 && \text{khi } i = j \\ \delta_{ij} &= 0 && \text{khi } i \neq j\end{aligned} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Với định nghĩa đó ta có thể thiết lập ma trận sau đây :

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta thấy các phần tử trên đường chéo chính là bằng đơn vị còn các phần tử khác là bằng không.

Ví dụ với biểu thức

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2$$

Có thể viết dưới dạng :

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n+1} (dx^i)^2$$

Sử dụng kí hiệu Krô-nê-kê ta viết lại gọn hơn :

$$ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (i = 1, 2, \dots, n \text{ và } j = 1, 2, \dots, n)$$

Những chỉ số trong kí hiệu Krô-nê-kê có thể viết ở dưới, ở trên hay cả trên cả dưới tùy theo điều kiện sử dụng :  $\delta_{ij}$ ,  $\delta^i_j$

#### 1-4. Kí hiệu phần đối xứng (Kí hiệu Spin)

Được viết như sau :

$$\varepsilon^{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2)$$

$$\varepsilon^{ij} = 1 \quad (i = 1; j = 2)$$

$$\varepsilon^{ij} = -1 \quad (i = 2; j = 1)$$

nghĩa là  $\varepsilon^{11} = 0, \varepsilon^{22} = 0, \varepsilon^{12} = 1, \varepsilon^{21} = -1$

Ta nhận thấy rằng :  $\varepsilon^{ij} = -\varepsilon^{ji}$

Ví dụ với định thức :

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2$$

Có thể biểu diễn như sau :

$$\varepsilon^{ij} a_i^1 a_j^2 = a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2$$

Kí hiệu phần đối xứng còn viết cho ba chỉ số hoặc nhiều hơn nữa. Ví dụ với ba chỉ số ta có :

$$\varepsilon^{ijk} \text{ hay } \varepsilon_{ijk}$$

Trị số đó sẽ bằng không nếu hai chỉ số bất kỳ có cùng trị số, bằng 1 nếu ba chỉ số có thứ tự 1 2 3 hay một số chẵn lân hoán vị.

Bằng -1 nếu chỉ số có thứ tự là một số lẻ lân hoán vị của 1 2 3.

Ví dụ :

$$\varepsilon^{112} = \varepsilon^{222} = \varepsilon^{333} = 0$$

$$\varepsilon^{123} = \varepsilon^{312} = \varepsilon^{231} = 1$$

$$\varepsilon^{132} = \varepsilon^{213} = \varepsilon^{321} = -1$$

Nghĩa là

$$\varepsilon^{ijk} = \frac{1}{2}(i - j)(j - k)(k - 1)$$

Cũng có thể xét như hình vẽ (1-1)



Hình P-1. Hoán vị theo  
chiều này thì  $\varepsilon^{123} = 1$  và theo  
chiều ngược lại  $\varepsilon^{123} = -1$

Một định thức hạng ba có thể biểu diễn như sau :

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = e^{ijk} a_1^1 a_2^2 a_3^3$$

*Chỉ số nháy lại* : Nếu có một chỉ số nào đó được nháy lại nhiều lần ở trên hoặc ở dưới thì phép tổng chỉ lấy một lần.

Ví dụ :

$$a_{\alpha\sigma} dx^\alpha \cdot dx^\sigma = a_{11} (dx^1)^2 + a_{22} (dx^2)^2 + \dots + a_{nn} (dx^n)^2$$

Thực vậy vì theo định nghĩa :

$$a_{\alpha\sigma} dx^\alpha \cdot dx^\sigma = \delta_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Trên đây ta đã nói các tính chất chung cho các chỉ số ở trên hoặc ở dưới. Trong phép toán tenxơ chỉ số ở trên hoặc ở dưới rất quan trọng, vị trí đó chỉ cho ta biết đó là vectơ phản biến hay hiệp biến (diều này sẽ được nói rõ ở phần sau) do đó ta phải thận trọng không được nhầm lẫn.

### 1-5. Các phép toán đại số dưới dạng chỉ số

1. *Phép cộng* : Chỉ số có thể thực hiện khi :

- Các đại lượng được biểu diễn bằng các dạng chỉ số phải là các đại lượng cùng loại.
- Các chỉ số phải cùng có giới hạn nhu nhau. Nếu các chỉ số không có cùng một giới hạn thì ta phải sử dụng các phép biến đổi để chúng có cùng một giới hạn trước khi thực hiện phép cộng.

Ví dụ : Nếu ab và cd là các đại lượng đồng loại thì tổng  $a_i^3 b^i$  và  $c_i d^i$  với  $i = 1, 2, 3, 4$  sẽ là :

$$a_i^3 b^i + c_i d^i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

2. Phép nhân với một số : Ta có các biểu thức tương quan sau đây :

$$5(\mu a^i b^j) = 5\mu(a^i b^j)$$

$$(\mu + \nu)a^i b^j = \mu a^i b^j + \nu a^i b^j$$

$$\mu(a^i b^j + c^k d^l) = \mu(a^i b^j) + \mu(c^k d^l)$$

$\mu$  và  $\nu$  là một số thực nào đó.

3. Phép nhân hai số dưới dạng chỉ số :

Giả sử ta có hai số  $a = m^\alpha r_\alpha$  và  $b = n^\beta s_\beta$  với  $\alpha = 1, 2, 3, 4$ . Tích của  $a.b$  sẽ như sau :

$$a.b = m^\alpha \cdot r_\alpha \cdot n^\beta s_\beta = m^\alpha \cdot n^\beta \cdot r_\alpha s_\beta$$

Ta đã phải đổi chỉ số cảm ở số hạng thứ hai nếu không sẽ bị nhầm lẫn vì  $m^\alpha \cdot n^\beta \cdot r_\alpha s_\alpha$  không phải là tích của  $a.b$  vì dạng khai triển của biểu thức đó sẽ là :

$$m^\alpha n^\beta r_\alpha s_\alpha = m^1 n^1 r_1 s_1 + m^2 n^2 r_2 s_2 + \dots + m^4 n^4 r_4 s_4$$

Một ví dụ khác, ta có :

$$dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

$$dy^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta} dx^\beta \quad (\beta = 1, 2, 3)$$

Vậy :

$$dy^i dy^j = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta} dx^\alpha \cdot dx^\beta$$

với ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) và ( $\beta = 1, 2, 3$ )

Không nên nhầm phép toán đó với phép nhân sau đây :

$$(dy^i)^2 = \left( \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \right)^2 \cdot (dx^\alpha)^2 \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

Tính chất hoán vị, kết hợp và phân phối đều nghiệm đúng với các phép toán chỉ số :

$$a_i b^i = b^i a_i$$

$$(a_j^i b_k^j) c^k = a_j^i (b_k^j c^k)$$

$$a_j(b_n^i + c_n^i) = a_j b_n^i + a_j c_n^i$$

4. Lũy thừa : Ví dụ ta phải thực hiện phép lũy thừa :

$$(a_j^i \cdot b_k^j)^3 \quad (j = 1, 2, 3)$$

Ta phải thay các chỉ số cầm như sau :

$$(a_j^i b_k^j)^3 = (a_s^i b_t^j)(a_s^i b_k^s)(a_t^i b_k^t)$$

$$\quad \quad \quad (j = 1, 2, 3)$$

$$\quad \quad \quad (s = 1, 2, 3)$$

$$\quad \quad \quad (t = 1, 2, 3)$$

5. Phép đạo hàm :

Giả sử  $a_i$  và  $b^i$  với  $i = 1, 2, \dots, n$  là các hàm số cùng biến số t. Đạo hàm của tích  $a_i b^i$  sẽ là :

$$\frac{d}{dt} (a_i b^i) = \dot{a}_i b^i + a_i \dot{b}^i$$

$$\text{Trong đó : } \dot{a}_i = \frac{da_i}{dt} \text{ và } \dot{b}^i = \frac{db^i}{dt}$$

Thực vậy ta có :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (a_i b^i) &= \frac{d}{dt} (a_1 b^1 + a_2 b^2 + \dots + a_n b^n) \\ &= \dot{a}_1 b^1 + a_1 \dot{b}^1 + \dot{a}_2 b^2 + a_2 \dot{b}^2 + \dots + \dot{a}_n b^n + a_n \dot{b}^n \\ &= \dot{a}_i b^i + a_i \dot{b}^i \end{aligned}$$

Bây giờ ta hãy xét trường hợp với hai chỉ số cầm :

$$\frac{d}{dt} (a_i b^i c^j) \text{ với } (i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\frac{d}{dt} (a_{ij} b^i c^j) = \dot{a}_{ij} b^i c^j + a_{ij} \dot{b}^i c^j + a_{ij} b^i \dot{c}^j$$

Thực vậy, đặt  $d_i = a_{ij} c^j$  biến thức trên được viết lại như sau :

$$a_{ij} b^i c^j = d_i b^i$$

Ở trên ta đã có :

$$\frac{d(d_i b^i)}{dt} = d_i b^i + d_i \dot{b}^i$$

Tính  $\dot{d}_i$  ta có :

$$\dot{d}_i = \dot{a}_{ij} c^j + a_{ij} \dot{c}^j$$

Vậy :

$$\frac{d(a_{ij} b^i c^j)}{dt} = (\dot{a}_{ij} c^j + a_{ij} \dot{c}^j) b^i + d_i \dot{b}^i = \dot{a}_{ij} b^i c^j + a_{ij} \dot{b}^i c^j + a_{ij} b^i \dot{c}^j$$

Cùng cách chứng minh với nhiều chỉ số cảm. Ví dụ :

$$\frac{d}{dt} (a_{ij} b^{ij}) = \dot{a}_{ij} b^{ij} + a_{ij} \dot{b}^{ij}$$

Đặc biệt trong trường hợp dạng toàn phương :

$$\frac{d}{dt} (a_{ij} x^i x^j) = \dot{a}_{ij} x^i x^j + a_{ij} \dot{x}^i x^j + a_{ij} x^i \dot{x}^j$$

Khi  $a_{ij}$  là những hằng số thì ta có :

$$\frac{d}{dt} (a_{ij} x^i x^j) = a_{ij} (\dot{x}^i x^j + x^i \dot{x}^j)$$

### 6. Các đạo hàm riêng phần :

Áp dụng các quy tắc đạo hàm trên ta có :

$$\frac{\partial}{\partial x^1} (a_{ij} b^i c^j) = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^1} b^i c^j + a_{ij} \frac{\partial b^i}{\partial x^1} c^j + a_{ij} b^i \frac{\partial c^j}{\partial x^1}$$

$a_{ij}$ ,  $b^i$ ,  $c^j$  là các hàm số đối với nhiều biến số  $x^1, x^2, \dots, x^n$ .

Cùng cách như vậy ta lấy vi phân riêng phần đối với  $x^2, \dots, x^n$ .

Trường hợp riêng quan trọng đó là dạng toàn phương đối xứng :

$$T = a_{ij}x^i x^j$$

Trong đó  $a_{ij} = a_{ji}$  và là các hằng số

Ta có :

$$\frac{\partial T}{\partial x^k} = a_{ij} \left[ \frac{\partial x^i}{\partial x^k} x^j + \frac{\partial x^j}{\partial x^k} x^i \right]$$

Trong đó  $\frac{\partial x^i}{\partial x^k} = 0$  với  $i \neq k$  và bằng 1 với  $i = k$ .

$$\text{Do đó : } \frac{\partial T}{\partial x^k} = a_{ij} [\delta_k^i x^j + \delta_k^j x^i]$$

$$\text{Nhưng } \delta_k^i \cdot a_{ij} = a_{kj} \text{ và } \delta_k^j \cdot a_{ij} = a_{ik}$$

$$\text{Vậy : } \frac{\partial T}{\partial x^k} = a_{kj} x^j + a_{ik} x^i$$

Trong biểu thức cuối cùng ta có thể thay các chỉ số cùm.

$$\text{Vậy : } \frac{\partial T}{\partial x^k} = 2a_{kj} \cdot x_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

7. Phép tích phân : Phép tích phân được thực hiện theo quy tắc của phép tổng.

Ví dụ :

$$\int_a^b a_i b^i dt = \int_a^b a_1 b^1 dt + \int_a^b a_2 b^2 dt + \dots + \int_a^b a_n b^n dt$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

Ta cũng có thể sử dụng pháp tích phân đoạn :

$$\int_a^b a_i db^i = a_i [b^i]_a^b - \int_a^b b^i da_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$